



APOSTILA DE
MATEMÁTICA
EPCAR

Sumário

Introdução à Geometria Plana	004
Introdução aos Triângulos	020
Propriedades dos Triângulos	032
Polígonos	043
Circunferência	053
Propriedades da Circunferência	060
Volumes 1	069
Volumes 2	079
Produtos Notáveis e Fatoração	085
Frações Algébricas	094
Equação do 1º grau	109
Equação do 2º grau	118
Sistemas de Equações	127
Equações Irracionais	138
Noções de Conjuntos	146
Conjuntos Numéricos	159
Funções do 1º grau	167
Funções do 2º grau	180
Potenciação e Radiciação	192
Números Primos e Compostos	208
Critérios de Divisibilidade, MMC E MDC	215
Frações e Dízimas Periódicas	225
Razões, Grandezas Proporcionais e Porcentagem	237
Expressões Numéricas e Algébricas 1	249
Regra de Três Simples e Composta	263
Juros Simples e Compostos	275
Expressões Numéricas e Algébricas 2	286
Sistemas de Numeração e Sistemas Métricos	299

Introdução à Geometria Plana

A geometria plana, também chamada de geometria euclidiana, é a área da matemática que se dedica a estudar os elementos e figuras contidos em um plano, ou seja, figuras bidimensionais. O quadrado, o triângulo e o círculo são exemplos de formas geométricas planas. Apesar de parecerem conceitos simples, essas figuras são fundamentais para muitas áreas do conhecimento, como trigonometria, cálculo de área, dentre outras.

Conceitos primitivos

Os conceitos primitivos são elementos fundamentais para a compreensão e desenvolvimento do estudo da geometria plana, ou seja, eles servem de ferramenta na elaboração de conceitos mais complexos.

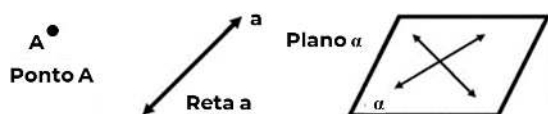
Os elementos iniciais utilizados na geometria plana são:

a) Ponto: é uma indicação sem dimensões, sendo representado por letras maiúsculas do alfabeto.

b) Reta: é composta por um conjunto de pontos que não fazem curva. Elas são infinitas para as duas direções e apresentam uma única dimensão, ou seja, ela possui comprimento, mas não tem largura. É representada por uma letra minúscula do alfabeto,

c) Plano: é o conjunto de retas alinhadas, que apresenta duas dimensões. São representados por letras minúsculas do alfabeto grego.

Veja abaixo a representação de cada um deles:



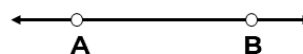
Postulados

- a)** O ponto é indivisível.
- b)** Tanto em uma reta, quanto fora dela, existem infinitos pontos.
- c)** Tanto em um plano, quanto fora dele, existem infinitos pontos.
- d)** Dois pontos distintos definem uma única reta.
- e)** Três pontos distintos e não colineares definem um plano.
- f)** A menor distância entre dois pontos é sempre uma reta.

Observação: Postulados são afirmações que aceitamos como verdadeiras, sem discussão em virtude de suas evidências.

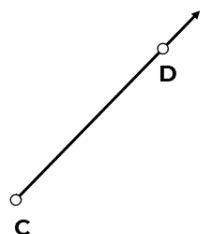
Subconjuntos das retas

Considere a reta que passa pelos pontos **A** e **B** e segue infinitamente, tanto para a direita quanto para a esquerda, como mostra a figura:



A reta acima é denotada como reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Se a reta inicia no ponto **C**, passa pelo ponto **D** e segue infinitamente em apenas um sentido, temos uma semirreta $\overrightarrow{CD}$:



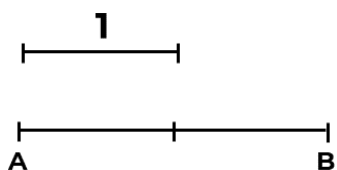
Ou seja, uma semirreta é uma reta que tem começo, mas não tem fim.

Por fim, também podemos ter o segmento de reta, que tem início em um ponto **E** e fim no ponto **F**, ou seja, é um fragmento entre um ponto e outro dentro de uma reta pré-estabelecida. Veja o segmento de reta $\overline{EF}$:



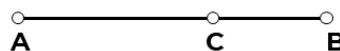
Medida de um segmento

Para medir os segmentos de uma reta, temos que definir um segmento como unidade e, a partir disso, podemos medir qualquer outro segmento. Veja a figura abaixo:



Se considerarmos o segmento unitário, a medida do segmento $AB=2$.

Note que se um ponto **C** pertence a um segmento AB , em termos de medida: $AC + CB = AB$:



Observação: Se dois segmentos de reta AB e CD possuem a mesma medida, dizemos que eles são congruentes ($AB = CD$).

Posições relativas

As posições relativas entre duas ou mais figuras geométricas consistem em analisar a posição de uma com relação à outra no espaço em que ocupam.

Entre Pontos

Dois pontos **A** e **B** podem ser:

a) Coincidentes: quando ocupam a mesma posição no espaço.



A e B são pontos coincidentes.

b) Distintos: quando os pontos não ocupam o mesmo lugar:



C e D são pontos distintos.

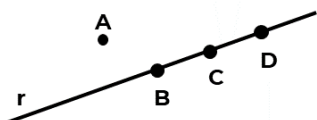
Entre Ponto e Reta

Considere um ponto P e uma reta r , existem duas posições possíveis entre eles:

a) Ponto pertencente à reta: quando a reta r passa pelo ponto P ($P \in r$).

b) Ponto não pertencente à reta: quando a reta r não passa por P ($P \notin r$).

Observe a figura abaixo:



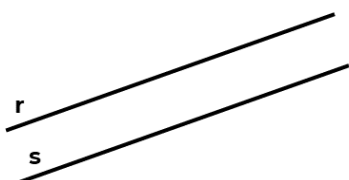
No caso da figura, o ponto $A \notin r$ e os pontos B, C e $D \in r$. Quando temos dois ou mais pontos que pertencem à mesma reta, dizemos que eles são colineares. Assim, B, C e D são colineares.

Entre Retas

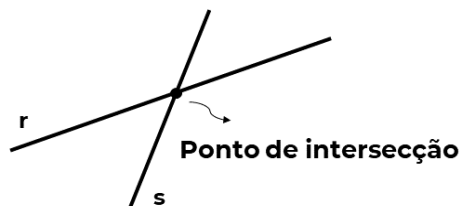
Se duas retas ou mais pertencem a um mesmo plano, elas são chamadas de coplanares e, dependendo da posição relativa entre elas, podemos classificá-las como:

a) Retas Paralelas: quando duas retas que não possuem nenhum ponto em comum, elas são ditas retas paralelas.

Nesse caso, r e s são retas paralelas, cuja representação é $r \parallel s$. Veja:



b) Retas Concorrentes: duas retas são concorrentes quando possuem um único ponto em comum. Assim:

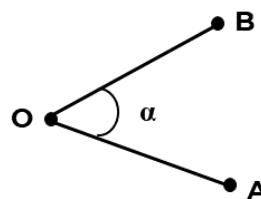


c) Retas Coincidentes: quando duas retas possuem todos os pontos em comum, elas são chamadas de retas coincidentes. Veja a figura abaixo:



Ângulos

A região formada entre duas semirretas de mesma origem O é chamada de região angular ou, simplesmente, ângulo. Veja:



Os ângulos são medidos em graus ($^\circ$). Usamos a notação $\widehat{AOB}$ ou $\angle AB$ para representar o ângulo. Também é comum usarmos letras gregas, como α , β etc, para representarmos os ângulos.

Classificação dos ângulos

Todo ângulo possui uma medida, em graus, que é um número compreendido entre 0 e 360° . Eles

podem ser classificados em relação à sua medida ou à sua soma.

Classificação em relação à medida

Considere um ângulo α , de acordo com o seu valor, ele pode ser classificado em:

i) Agudo: a medida é menor que 90° .

ii) Reto: a medida é igual a 90° .

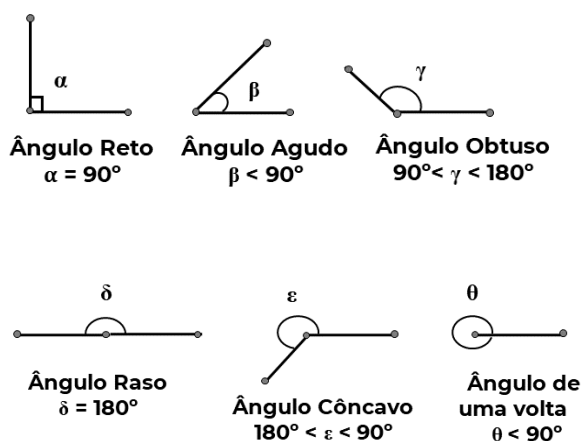
iii) Obtuso: a medida é maior que 90° e menor que 180° .

iv) Raso ou meia-volta: a medida é igual a 180° .

v) Côncavo: a medida é maior que 180° e menor que 360° .

vi) Uma volta ou Inteiro: a medida é igual a 360° .

Veja a representação geométrica dos ângulos:



Observação: Quando o ângulo formado por duas retas é um ângulo reto, dizemos que as retas são perpendiculares.

Classificação em relação à soma

Dois ângulos α e β podem ser:

i) Complementares: quando a soma

da medida dos dois ângulos é 90° ($\alpha + \beta = 90^\circ$). Neste caso, um ângulo é complemento do outro.

ii) Suplementares: quando a soma das medidas dos dois ângulos é 180° ($\alpha + \beta = 180^\circ$), ou seja, cada um deles é suplemento do outro.

iii) Replementares: quando a soma das medidas dos dois ângulos é 360° ($\alpha + \beta = 360^\circ$).

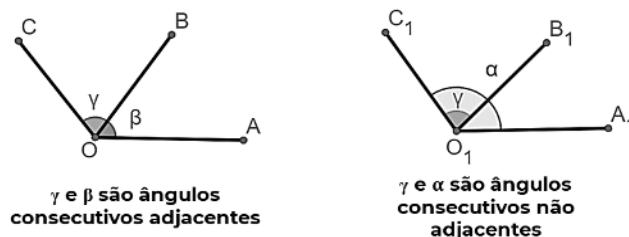
Posições relativas entre ângulos

Considere dois ângulos α e β , eles, podem ser classificados, segundo a posição em que eles ocupam em relação ao outro, como:

a) Consecutivos: quando os dois ângulos possuem um lado em comum.

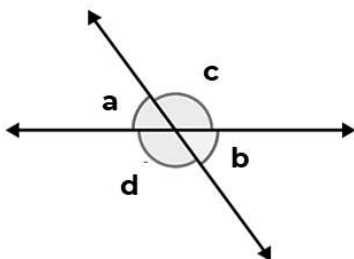
b) Adjacentes: é um caso particular de ângulos consecutivos, em que os ângulos não têm pontos internos comuns.

Na figura abaixo, à esquerda, os ângulos γ e β possuem o lado $\overline{OB}$ em comum. Já à direita, os ângulos γ e α possuem o lado $\overline{O_1C_1}$ em comum. Portanto, eles são consecutivos. Entretanto, perceba que à direita, o ângulo γ está contido em α . Logo, não são adjacentes, pois possuem pontos internos em comum.



c) Opostos pelo vértice (OPV): quando duas retas concorrentes se

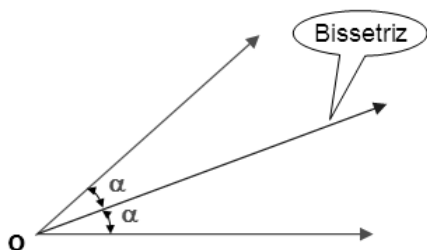
cruzam, elas determinam quatro ângulos. Os ângulos que não são adjacentes são opostos pelo vértice.



Na figura acima, os pares de ângulos (**a** e **b**) e (**c** e **d**) são opostos pelo vértice.

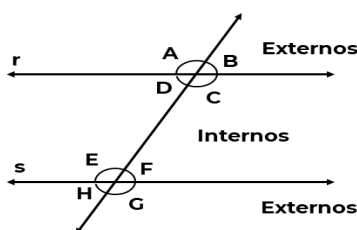
Bissetriz de um ângulo

A bissetriz de um ângulo é a semirreta que parte da sua origem e o divide em dois ângulos adjacentes congruentes, ou seja, de mesma medida:



Ângulos formados por retas paralelas e por uma reta transversal

Considere duas retas r e s paralelas, cortadas pela reta t , como mostra a figura abaixo:



Temos as seguintes relações entre os ângulos formados:

a) Ângulos correspondentes: os pares (A e E), (B e F), (C e G) e (D e H).

b) Ângulos alternos internos: os pares (D e F) e (C e E).

c) Ângulos alternos externos: os pares (A e G) e (B e H).

d) Ângulos colaterais internos: os pares (C e F) e (D e E).

e) Ângulos colaterais externos: os pares (A e H) e (B e G).

f) Opostos pelo vértice: os pares (A e C), (B e D), (E e G) e (F e H).

Propriedades

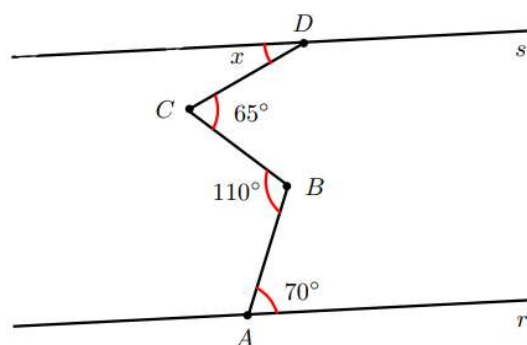
01) Os pares de ângulos correspondentes, alternos (tanto os internos quanto os externos) e os opostos pelo vértice são congruentes.

02) Os pares de ângulos colaterais são suplementares.

Teorema dos bicos

Para apresentar o teorema dos bicos, vamos partir de um exemplo.

Exemplo 01. Na figura a seguir, sabendo que $r \parallel s$, calcule a medida em graus do ângulo x .

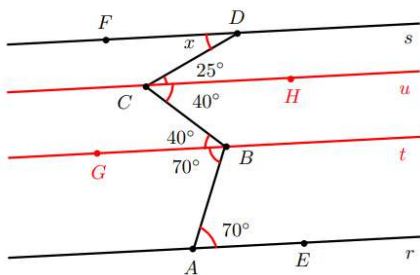


Solução:

$$x = 25^\circ$$

A ideia para resolver esse tipo de questão, é traçar retas paralelas em cada “bico” e observar que vão surgir diversos ângulos entre as retas paralelas e transversais.

Como vimos anteriormente, alguns desses ângulos são congruentes. Então, ficaria assim:



Perceba que o ângulo $\angle ABG$ é alterno interno ao ângulo $\angle EAB$. Portanto, eles são congruentes e $\angle ABG = \angle EAB = 70^\circ$. Além disso:

$$\angle ABG + \angle GBC = \angle ABC = 110^\circ.$$

Então:

$$\angle GBC = 40^\circ.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, temos que:

$$\angle CDF = x = \angle HCD = 25^\circ.$$

Uma consequência dessa ideia é o teorema dos bicos que pode ser expresso por:

“A soma dos bicos que apontam para um lado é igual à soma dos bicos que apontam para o outro lado.”

Ou seja,

$$x + 110^\circ = 65^\circ + 70^\circ$$

$$x = 135^\circ - 110^\circ$$

Exercícios

01. Quando há duas retas pertencentes ao mesmo plano, elas podem ter três posições possíveis. A seguir, faça a correspondência correta entre os tipos de reta e suas respectivas características.

I. Concorrentes

II. Coincidentes

III. Paralelas

() têm infinitos pontos em comum.

() têm um único ponto em comum.

() não têm nenhum ponto em comum.

Marque a alternativa que representa a correspondência correta:

a) I, II e III

b) II, III e I

c) II, I e III

d) III, II e I

e) III, I e II

02. Em uma reta se encontram os quatro pontos consecutivos **A**, **B**, **C** e **D** com $AB = AC - 3$, $AB + CD = 4$ e que satisfazem a seguinte relação:

$$3AB - BD - 2CD = 3$$

Determine as medidas dos comprimentos de AD e AB .

03. Qual o ângulo formado entre as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares?

4. (EEAR - 2002) É FALSO afirmar que:

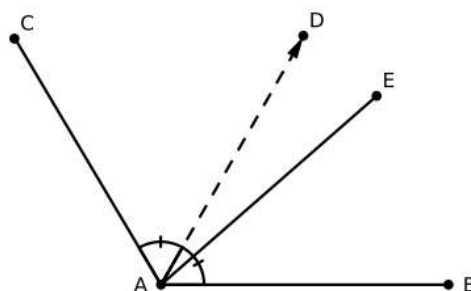
a) Se $\widehat{A\hat{O}B}$ é um ângulo raso, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.

b) Se $\widehat{A\hat{O}B}$ é um ângulo nulo, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.

c) Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, somam 180° .

d) Dois ângulos adjacentes são sempre consecutivos.

05. No desenho abaixo, DA é bissetriz do ângulo $\angle CAB$. Determine o valor do ângulo $\angle DAE$, sabendo que $\angle CAB + \angle EAB = 120^\circ$ e $\angle CAB - \angle EAB = 80^\circ$.



06. (EEAR - 2018) O complemento do suplemento do ângulo de 112° mede:

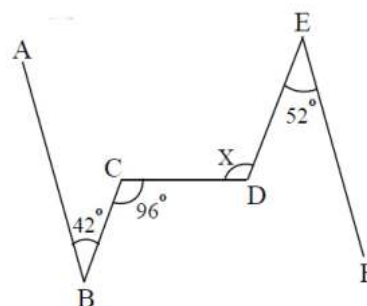
a) 18°

b) 28°

c) 12°

d) 22°

07. (EEAR - 2000) Na figura $BA \parallel EF$. A medida de X é:



a) 105°

b) 106°

c) 107°

d) 108°

08. Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma dos ângulos agudos formados vale 144° . Então a diferença entre as medidas de um ângulo obtuso e de um agudo é

a) 85°

b) 92°

c) 108°

d) 116°

09. (EEAR - 2003) Nesta figura, as retas r e s são paralelas entre si. Os valores de x , y e z são, respectivamente:

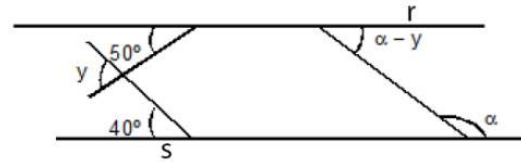
a) $23^\circ 45'$, 85° e 95°

b) 25° , 90° e 90°

c) $23^\circ 7' 5''$, 95° e 85°

d) $26^\circ 15'$, 85° e 95°

10. (AFA - 2001) Sejam r e s retas paralelas. A medida do ângulo α , na figura abaixo, é:



a) 115°

b) 125°

c) 135°

d) 145°

GABARITO

1) C

2) $AD = 7$ e $AB = 3$

3) 90°

4) B

5) 30°

6) D

7) B

8) C

9) A

10) C

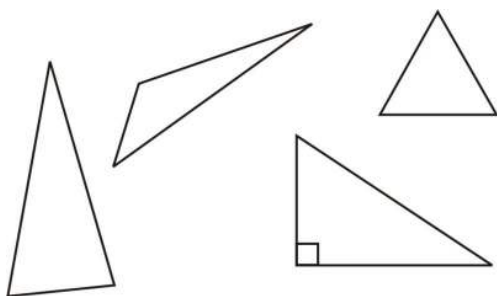
Introdução aos Triângulos

Os triângulos são figuras geométricas planas que possuem três lados e três ângulos. Os triângulos são figuras muito importantes e conhecer as suas características e propriedades são essenciais para compreender outros assuntos, como trigonometria e geometria espacial.

Definição e elementos básicos

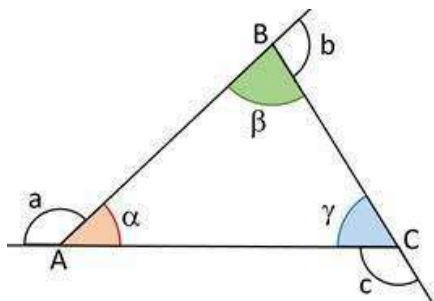
O triângulo é uma figura geométrica plana formada pela união de segmentos de reta definidos por três pontos distintos e não colineares, ou seja, é uma figura de três lados com três ângulos.

A figura a seguir ilustra alguns exemplos de triângulos:



Elementos de um triângulo

Considere o triângulo na figura abaixo:



Os elementos básicos do triângulo são:

a) Lados: são segmentos de reta que se encontram apenas em suas

extremidades. Na figura os lados estão representados pelos segmentos de retas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

b) Vértices: são os pontos de encontros entre os lados de um triângulo. O triângulo possui apenas três vértices, uma vez que possui três lados. Os vértices são representados pelos pontos **A**, **B** e **C**.

c) Ângulos internos: são os ângulos formados por dois lados consecutivos de um triângulo e ficam no seu interior. Na figura α , β e γ correspondem aos ângulos internos.

d) Ângulos externos: Dados um lado qualquer de um triângulo e o prolongamento do lado consecutivo a ele, um ângulo externo é definido como a abertura entre esse lado e o prolongamento. Na figura, os ângulos externos são representados pelas letras **a**, **b** e **c**.

Classificação dos Triângulo

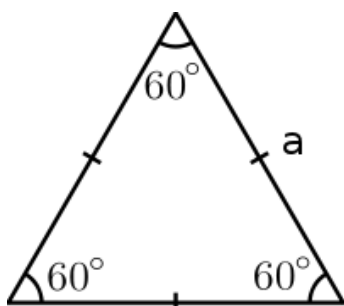
Existem diversas maneiras de classificar triângulos. As duas mais comuns levam em consideração as medidas de seus lados e as medidas de seus ângulos.

Em relação à medida de lados

Em relação aos lados, os triângulos podem ser classificados como:

a) Equilátero:

São aqueles que possuem todos os lados com medidas iguais e, consequentemente, o valor de todos os ângulos internos são iguais:

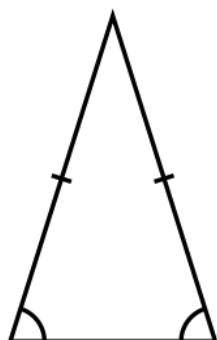


Independente do tamanho dos lados, os triângulos equiláteros possuem os três ângulos internos iguais a 60° .

b) Isósceles:

São aqueles que possuem pelo menos dois lados com medidas iguais. O terceiro lado, que é diferente, é chamado de base.

O ângulo formado pelo lado congruente é chamado de ângulo do vértice e os demais ângulos são denominados como ângulos da base.

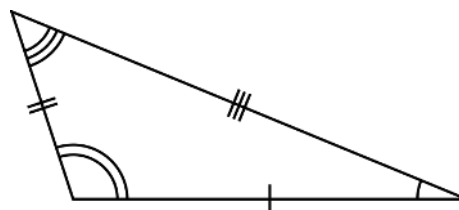


Observação: Os pequenos traços cortando os lados servem para identificar lados de mesmo comprimento.

c) Escaleno:

São os triângulos que não apresentam semelhança entre os lados. Cada ângulo e cada lado

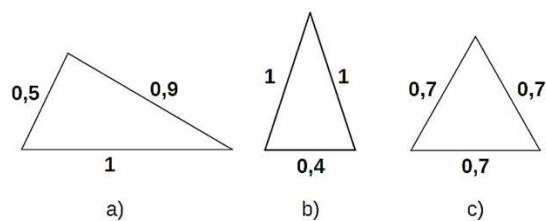
apresentam um valor diferente entre si.



Observação: Cada símbolo representa um valor diferente para os lados.

Exercício Proposto

01. Classifique os triângulos abaixo em equilátero, isósceles e escaleno.

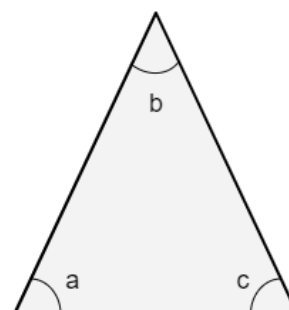


Em relação aos ângulos

Outro critério para a classificação dos triângulos é em relação à abertura dos ângulos internos. Eles podem ser:

a) Acutângulo:

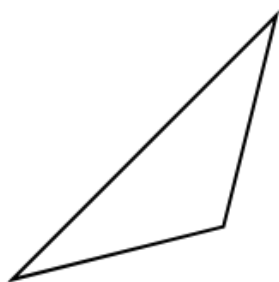
São triângulos que possuem os três ângulos menores que 90° (agudos).



Na figura acima, $a < 90^\circ$, $b < 90^\circ$ e $c < 90^\circ$.

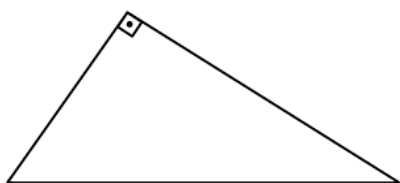
b) Obtusângulo:

São triângulos que possuem um dos ângulos maior que 90° (ângulo obtuso), e os outros ângulos são agudos.



c) Retângulo:

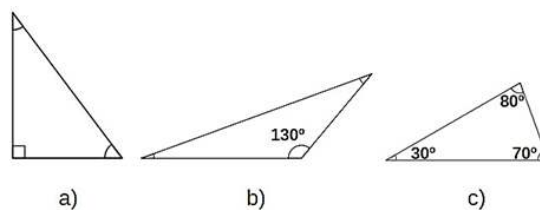
São triângulos formados por um ângulo interno reto (90°). O triângulo retângulo possui muitas particularidades, por exemplo, podem ser encontradas facilmente relações trigono- métricas, distâncias entre dois pontos, dentre outros. Esses assuntos serão abordados nos próximos capítulos.



Observação: O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos.

Exercício Proposto

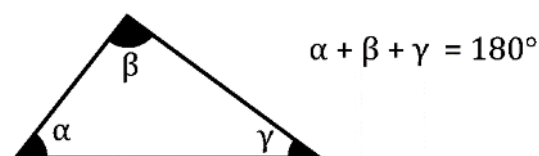
02. Classifique os triângulos abaixo em acutângulo, retângulo e obtusângulo.



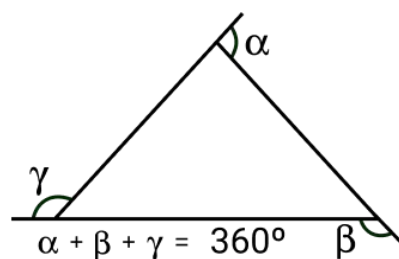
Propriedades elementares dos triângulos

Os triângulos possuem algumas propriedades elementares, como veremos agora.

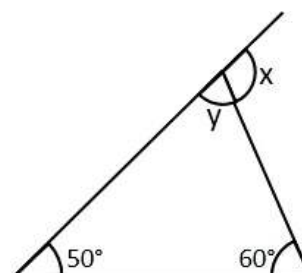
Propriedade 1. A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre será igual a 180° .



Propriedades 2. A soma dos ângulos externos de qualquer triângulo sempre será igual a 360° .



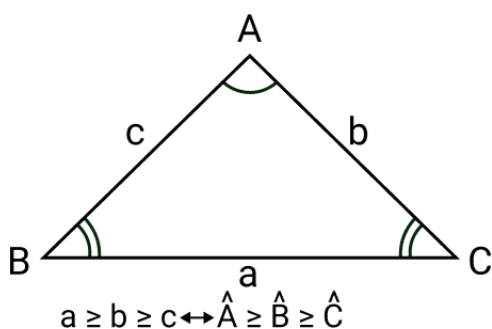
Propriedade 3. Todo ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos seus dois ângulos internos não adjacentes.



Na figura acima, o valor do ângulo x é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes, ou seja,

$$x = 50^\circ + 60^\circ = 110^\circ.$$

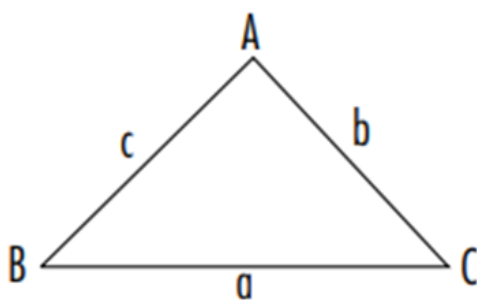
Propriedade 4. O maior lado de um triângulo é sempre oposto ao seu maior ângulo. Por consequência, o menor lado de um triângulo é sempre oposto ao seu menor ângulo. Veja:



Desigualdade Triangular

Segundo o teorema da desigualdade triangular, em todo triângulo, cada lado fixado é menor que a soma dos outros dois lados.

Assim, para o triângulo da figura:



$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Isso implica que:

$$|a - b| < c < a + b.$$

Essa última expressão é uma equação de compatibilidade para que 3 segmentos possam ser lados de um triângulo.

Por exemplo, três segmentos **a**, **b** e **c** cujas medidas são $a = 6$ cm, $b = 3$ cm e $c = 2$ cm, não podem ser lados de um triângulo, pois não obedecem a desigualdade $|a - b| < c < a + b$.

Exercício Proposto

03. Luis é um carpinteiro e está separando ripas de madeira de diversos comprimentos para construir estruturas triangulares.

Dentre as seguintes de trios de ripas, a única capaz de formar um triângulo é:

- a) 3 cm, 7 cm e 11 cm
- b) 6 cm, 4 cm e 12 cm
- c) 3 cm, 4 cm e 5 cm
- d) 7 cm, 9 cm e 18 cm

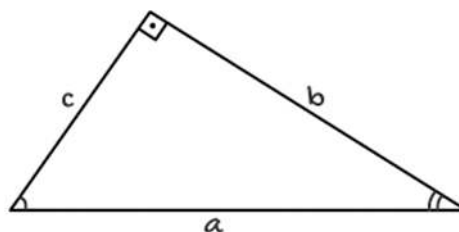
Perímetro e Área

Perímetro

O perímetro de uma figura é definido como a soma da medida de suas arestas.

No caso do triângulo, o perímetro é dado da seguinte forma:

$$\text{Perímetro} = a + b + c$$



Exemplo 01. (IFSC - 2017/Adaptada)

O triângulo, que possui três lados e três ângulos, é uma das figuras geométricas mais importantes da geometria plana. Sabendo que em um triângulo equilátero ABC, o comprimento do lado AB mede $3x + y$, do lado AC mede $2x + y + 2$ e do lado BC mede $x + 3y$, qual é o perímetro desse triângulo?

Como é um triângulo equilátero, todos os lados possuem o mesmo tamanho. Então, podemos considerar que:

$$(I) \quad 3x + y = 2x + y + 2$$

$$(II) \quad 3x + y = x + 3y$$

$$(III) \quad 2x + y + 2 = x + 3y$$

Resolvendo essas equações, temos:

$$(I) \quad 3x + y = 2x + y + 2$$

$$3x = 2x + 2 \rightarrow x = 2$$

$$(II) \quad 3x + y = x + 3y$$

$$2x = 2y$$

$$2(2) = 2y \rightarrow y = 2$$

Agora que temos os valores de x e y , vamos determinar a medida de cada lado:

$$L1: 3x + y = 3(2) + 2 = 8$$

$$L2: 2x + y + 2 = 2(2) + 2 + 2 = 8$$

$$L3: x + 3y = 2 + 3(2) = 8$$

Portanto, o perímetro é dado pela soma de todos os lados:

$$\text{Perímetro} = 8 + 8 + 8 = 24$$

Note que é um triângulo equilátero, ou seja, todos os lados possuem a mesma medida. Então, para encontrar o perímetro bastava

encontrar o valor de apenas um lado e multiplicar por 3.

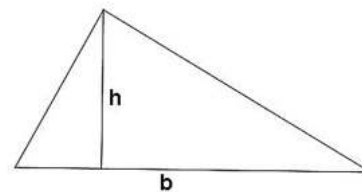
Área

A área representa a medida da superfície delimitada pelas arestas de uma figura.

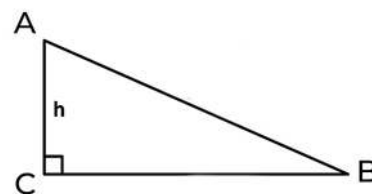
No caso do triângulo, ela pode ser determinada da seguinte maneira:

$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2}$$

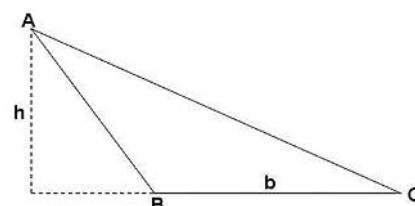
Em que a altura (h) corresponde ao segmento de reta traçado a partir da base de forma a encontrar o vértice mais alto do triângulo, formando um ângulo reto:



No caso dos triângulos retângulos, a altura corresponde a um dos catetos. Veja:



E para os triângulos obtusângulos, a reta que corresponde a altura pode estar do lado de fora da figura, assim:



Exercícios

01. Classifique cada sentença como verdadeira (V) ou falsa (F):

() Todo triângulo retângulo é isósceles.

() Os três ângulos de um triângulo equilátero são congruentes.

() Um triângulo é isósceles se possui os três lados congruentes.

() Não existe triângulo que seja simultaneamente retângulo e equilátero.

() Não existe triângulo que seja simultaneamente retângulo e isósceles.

02. Determine em cada um dos itens abaixo se o triângulo é acutângulo, obtusângulo ou retângulo conhecendo apenas dois de seus ângulos.

a) $\widehat{ABC} = 70^\circ$ e $\widehat{BCA} = 10^\circ$

b) $\widehat{ABC} = 80^\circ$ e $\widehat{BCA} = 15^\circ$

c) $\widehat{ABC} = 30^\circ$ e $\widehat{BCA} = 60^\circ$

d) $\widehat{ABC} = 60^\circ$ e $\widehat{BCA} = 60^\circ$

03. (FGV - 2019) Um triângulo tem um lado medindo 9 cm e outro medindo 7 cm. Sabendo que a medida do terceiro lado é expressa por um número inteiro de centímetros, quantos possíveis valores existem para esse lado?

a) 14

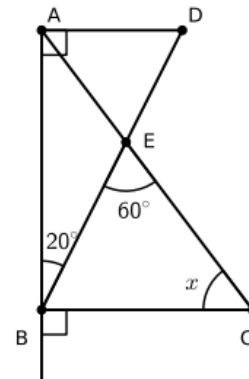
b) 12

c) 13

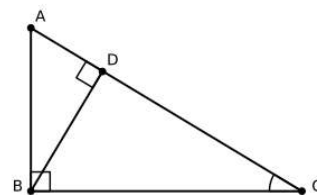
d) 11

e) 15

04. Determine o valor de x no desenho abaixo.



05. No desenho abaixo, sabendo que $\angle BCA = 30^\circ$, encontre o valor de $\angle ABD$.



06. (UECE - 2017) Seja UVW um triângulo isósceles com base VW ; E e F dois pontos nos lados UV e UW , respectivamente, tais que as medidas dos segmentos de reta VW , WE , EF e FU são iguais.

Nessas condições, pode-se afirmar corretamente que a medida do ângulo $V\hat{U}W$ é:

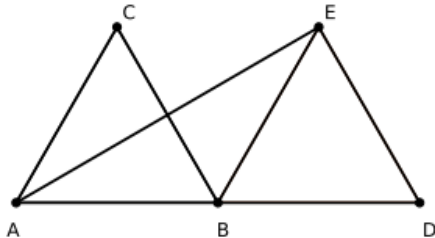
a) maior do que 21° e menor do que 25° .

b) maior do que 25° e menor do que 27° . certo

c) menor do que 21°

d) maior do que 27° e menor do que 32° .

07. No desenho abaixo, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BED$ são equiláteros de mesmo lado. Determine o ângulo $\angle AEB$.

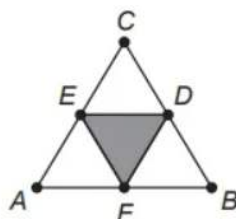


08. (EEAR - 2018) Um triângulo isósceles, de perímetro 24 cm, possui altura relativa à base medindo 6 cm. Assim, a metade da medida de sua base, em cm, é:

- a) $\frac{7}{2}$
- b) $\frac{9}{2}$
- c) $\frac{11}{2}$
- d) $\frac{13}{2}$

09. (ENEM - 2014) Um artista deseja pintar em um quadro uma figura na forma de triângulo equilátero ABC de lado 1 metro.

Com o objetivo de dar um efeito diferente em sua obra, o artista traça segmentos que unem os pontos médios D, E e F dos lados BC, AC e AB, respectivamente, colorindo um dos quatro triângulos menores, como mostra a figura.



Qual é a medida da área pintada, em metros quadrados, do triângulo DEF?

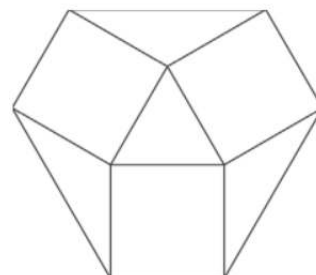
- a) $\frac{1}{16}$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{16}$
- c) $\frac{1}{8}$
- d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

10. (EPCAR - 2010) A figura plana representa o logotipo de uma empresa. Ele foi projetado a partir de um triângulo equilátero central, cujo perímetro mede 0,30 metros. Expandiu-se o desenho, acoplando em cada lado desse triângulo um quadrado. Para fechar a figura foram traçados 3 segmentos retilíneos, completando assim o logotipo.

Nos preparativos para a Copa do Mundo de 2010, esse logotipo será pintado com tintas de mesma qualidade e textura. a saber:

- o triângulo central, na cor branca
- os demais triângulos, na cor verde;
- os quadrados, na cor amarela.

Sabe-se que cada figura será pintada apenas uma vez e que cada mililitro de tinta cobre 1 cm^2 de área.



Considere $\sqrt{3} = 1,74$ e marque a alternativa correta.

- a)** O consumo total de tinta será de mais de meio litro.
- b)** As áreas branca e verde juntas equivalem a 58% da área amarela.
- c)** O consumo de tinta amarela será o dobro do consumo de tinta verde.
- d)** A área branca corresponde a 30% da área verde.

GABARITO

1) F - V - F - V - F

2) a) Obtusângulo b) Acutângulo

c) Retângulo d) Acutângulo

3) C

4) 50°

5) 30°

6) B

7) 30°

8) B

9) B

10) B

Propriedades dos Triângulos

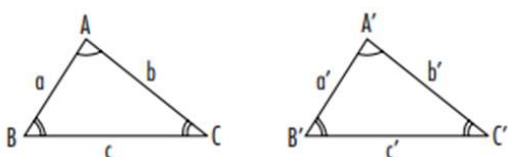
No capítulo anterior, aprendemos um pouco sobre os triângulos e suas propriedades elementares. Neste capítulo, aprofundaremos um pouco mais nesse estudo, trabalhando com certas ferramentas cruciais que nos auxiliam a encontrar algumas medidas desconhecidas do triângulo.

Congruência de Triângulos

O termo congruência, muito utilizado na matemática, pode ser compreendido como equivalência ou igualdade. Nesse sentido, ao tratarmos de congruência entre triângulos, falamos de duas figuras que são iguais em relação aos ângulos e lados.

Sendo assim, um triângulo será congruente (símbolo: $\equiv$) a outro se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que os pares de lados correspondentes sejam congruentes, e os pares de ângulos correspondentes sejam congruentes.

Na figura a seguir temos dois triângulos congruentes:



A correspondência entre os vértices é: $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$.

E a congruência garante que:

$$AB \equiv A'B' \quad \widehat{A} \equiv \widehat{A'}$$

$$BC \equiv B'C' \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'}$$

$$AC \equiv A'C' \quad \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$$

Observação: Utilizamos a notação $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ para representar que os triângulos são congruentes.

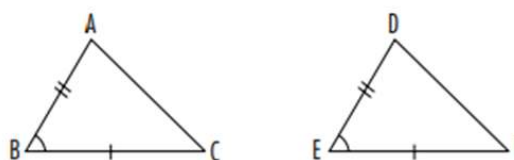
Para constatar a congruência entre triângulos buscamos aspectos que nos auxiliem a identificar se dois triângulos são iguais ou não. Essas ferramentas são divididas em casos e cada uma deve ter suas condições inteiramente respeitadas para concluir a congruência ou não.

Casos de Congruência

1) Lado, Ângulo, Lado (LAL)

Se dois triângulos têm, ordenadamente, congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então, são congruentes.

Assim, se dois lados e o ângulo do vértice de dois triângulos forem iguais, os outros ângulos e o outro lado também são iguais.



Temos, pela figura:

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE}$$

$$\overline{BC} \equiv \overline{EF}$$

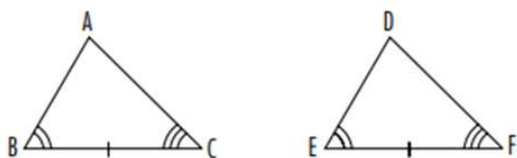
$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$$

Portanto:

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

2) Ângulo, Lado, Ângulo (ALA)

Se dois triângulos têm, ordenadamente, congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes. Caso essa condição seja verdadeira, os outros dois lados e o ângulo oposto são congruentes.



Temos, pela figura:

$$\hat{BAC} \equiv \hat{EDF}$$

$$\overline{AC} \equiv \overline{DF}$$

$$\hat{ACB} \equiv \hat{DFE}$$

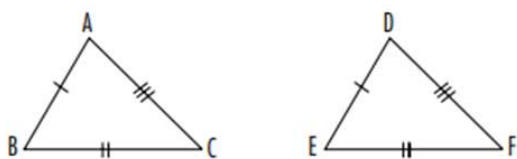
Portanto:

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

3) Lado, Lado, Lado (LLL)

Se dois triângulos têm, ordenadamente, congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

Se todos os lados de dois triângulos são iguais, os seus ângulos também são iguais.



Temos, pela figura:

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE}$$

$$\overline{AC} \equiv \overline{DF}$$

$$\overline{BC} \equiv \overline{EF}$$

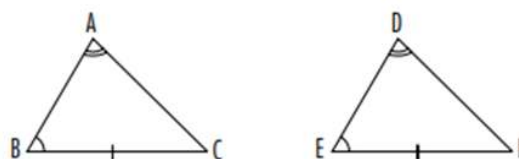
Portanto:

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

4) Lado, Ângulo, Ângulo (LAA)

Se dois triângulos têm, ordenadamente, congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Se a condição for verdadeira, o ângulo e os lados restantes também serão iguais.



Temos, pela figura:

$$\overline{AC} \equiv \overline{DF}$$

$$\hat{BAC} \equiv \hat{EDF}$$

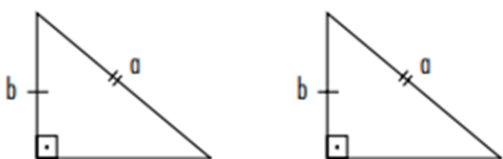
$$\hat{ABC} \equiv \hat{DEF}$$

Portanto:

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

5) Caso especial: Triângulos Retângulos

Se dois triângulos retângulos têm, ordenadamente, congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.



Temos, pela figura:

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE}$$

$$\overline{BC} \equiv \overline{EF}$$

Portanto:

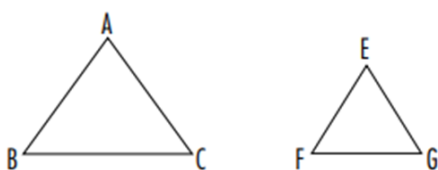
$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

Observação: Lembre-se, para a congruência ser verdadeira os três elementos exigidos no caso precisam ser respeitados. Além disso, se houver quatro ou mais elementos (lados ou ângulos) iguais em dois triângulos, mas eles não se encaixarem em nenhum dos casos, os triângulos não são congruentes.

Semelhança de Triângulos

A semelhança de triângulos é um assunto muito importante em Geometria.

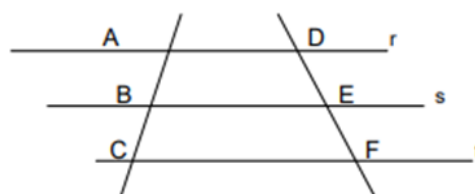
Duas figuras são consideradas semelhantes se apresentam a mesma forma, podendo ter tamanhos diferentes. Portanto, duas figuras semelhantes podem ser entendidas como sendo uma ampliação ou diminuição da outra. Veja:



A ferramenta fundamental para estudar a semelhança de triângulo é o Teorema de Tales, o qual relaciona o comprimento dos segmentos determinados sobre retas transversais a um feixe de retas paralelas.

Teorema de Tales

Considere retas paralelas interceptadas por duas retas transversais:



O teorema de Tales diz que:

“Um feixe de paralelas determina sobre duas retas transversais segmentos com medidas respectivamente proporcionais.”

Matematicamente, temos que:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

Portanto, dois triângulos serão semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que se correspondam ângulos iguais e lados proporcionais.

Assim, dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ serão semelhantes se, e somente se, estes são formados pelos mesmos ângulos internos e:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

Em que k é a constante de proporcionalidade de semelhança.

Note que se $k = 1$, então os triângulos são congruentes, ou seja, a congruência é um caso especial de semelhança.

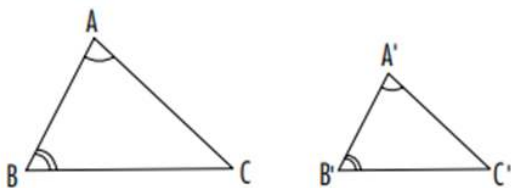
Observação: Utilizamos a notação $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ para expressar a semelhança de triângulos.

Casos de Semelhança

Agora, veremos três casos básicos de semelhança de triângulos, que permitem verificar e garantir a semelhança de uma forma simples.

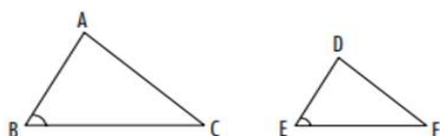
1) Ângulo, Ângulo (AA)

Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes.



2) Lado, Ângulo, Lado (LAL)

Suponha que em dois triângulos seja possível escolher dois lados, em cada um dos triângulos, de modo que, colocados em correspondência, tenham a mesma proporção e, além disso, os ângulos entre os lados definam ângulos congruentes.



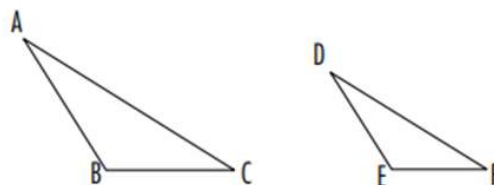
Neste caso,

$$\widehat{B} = \widehat{E}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

3) Lado, Lado, Lado (LLL)

Se em dois triângulos existe uma correspondência entre seus lados, de modo que as medidas tenham a mesma proporcionalidade, então os triângulos são semelhantes.

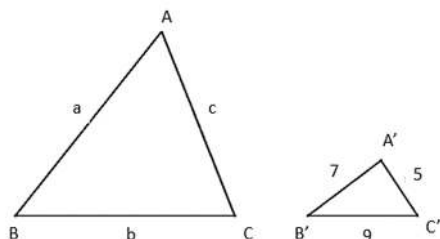


Propriedades

Esses três casos implicam em algumas propriedades, sendo elas:

- 1) Dois triângulos semelhantes a um terceiro são semelhantes entre si.
- 2) Dois triângulos retângulos que possuem um ângulo agudo congruente são semelhantes.
- 3) Dois triângulos isósceles que possuem o ângulo oposto à base congruente, são semelhantes.
- 4) Dois triângulos isósceles que possuem ângulos das bases congruentes são semelhantes.
- 5) Dois triângulos retângulos isósceles são semelhantes.
- 6) Dois triângulos retângulos que têm os catetos respectivamente proporcionais são semelhantes.
- 7) Dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.

Exemplo 01. Considere os triângulos da figura a seguir. Sabendo que eles são semelhantes e que o perímetro do triângulo maior é igual a 84 cm, determine os valores de **a**, **b** e **c**.



Segundo o enunciado, os dois triângulos são semelhantes. Vamos considerar que a semelhança é pelo caso LLL, ou seja, $ABC \sim A'B'C'$, então:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{9} = \frac{c}{5} = k$$

Temos que:

$$\frac{a}{7} = k \rightarrow a = 7k$$

$$\frac{b}{9} = k \rightarrow b = 9k$$

$$\frac{c}{5} = k \rightarrow c = 5k$$

Além disso, sabemos que o perímetro do triângulo maior é igual a 84, ou seja:

$$a + b + c = 84$$

$$7k + 9k + 5k = 84$$

$$21k = 84 \rightarrow k = 4$$

Agora que temos o valor de k, vamos substituir nas igualdades acima para encontrar os valores dos lados:

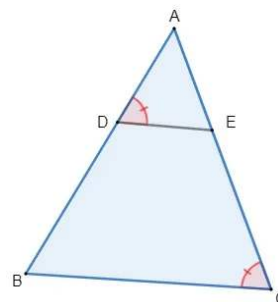
$$a = 7k = 7 \cdot 4 \rightarrow a = 28 \text{ cm}$$

$$b = 9k = 9 \cdot 4 \rightarrow b = 36 \text{ cm}$$

$$c = 5k = 5 \cdot 4 \rightarrow c = 20 \text{ cm}$$

Exercício proposto

01. (PUC-Campinas) Os triângulos ABC e AED, representados na figura a seguir, são semelhantes, sendo os ângulos D e C congruentes.



Se $BC = 16 \text{ cm}$, $AC = 20 \text{ cm}$, $AD = 10 \text{ cm}$ e $AE = 10,4 \text{ cm}$, qual o perímetro do quadrilátero BCED, em centímetros?

Cevianas e pontos notáveis

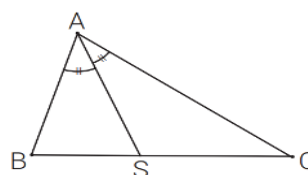
Cevianas

As cevianas são segmentos de retas que ligam um vértice de um triângulo ao lado oposto a este vértice, possuindo algumas propriedades específicas.

Existem algumas cevianas que são mais comuns, são elas::

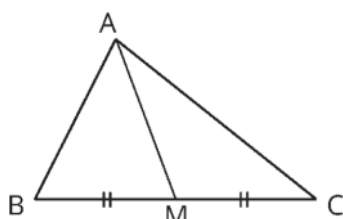
a) Bissetriz: divide o ângulo interno em dois ângulos iguais, representado pelo segmento $\overline{AS}$ na figura.

Na figura, $\overline{AS}$ é a bissetriz interna relativa ao lado $\overline{BC}$, então os ângulos $\widehat{BAS}$ e $\widehat{SAC}$ possuem a mesma medida.



b) Mediana: liga um dos vértices ao ponto médio do lado oposto.

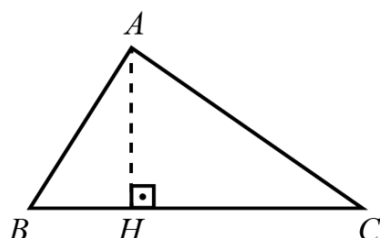
Na figura abaixo, sendo A um vértice e M o ponto médio do lado $\overline{BC}$, então $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.



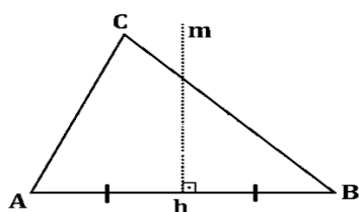
Note que M divide o lado $\overline{BC}$ ao meio, ou seja, $\overline{BM}$ e $\overline{MC}$ possuem a mesma medida.

c) Altura: parte de um dos vértices e cruza o lado oposto (ou a sua reta suporte) perpendicularmente.

Na figura, $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$.



d) Mediatriz: apesar de não ser uma ceviana, é um segmento muito importante. A mediatriz é um segmento que parte do ponto médio de um lado e é perpendicular a este. Ela não é considerada uma ceviana por não passar, necessariamente, pelo vértice.

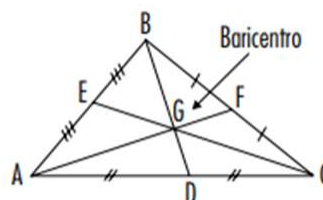


Pontos Notáveis

Os pontos notáveis são pontos que apresentam características distintas e que auxiliam na compreensão sobre os triângulos.

a) Baricentro: é o ponto de encontro das medianas.

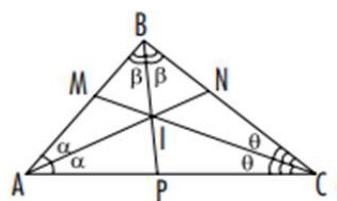
Ele é comumente denotado pela letra **G**, pois é o centro de gravidade (ou centro geométrico) do triângulo.



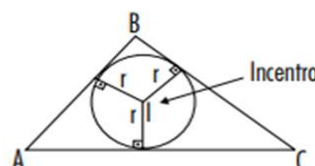
Uma propriedade do baricentro é que esse ponto divide a mediana na razão 2:1, assim:

$$\frac{AG}{GF} = \frac{BG}{GD} = \frac{CG}{GE} = \frac{2}{1}$$

b) Incentro: é o ponto de encontro das 3 bissetrizes internas, representado pela letra **I** na figura.

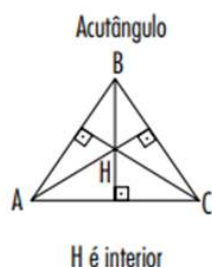


A sua principal particularidade consiste no fato de que ele também é o centro da circunferência inscrita no triângulo, pois ela é equidistante aos lados do triângulo.

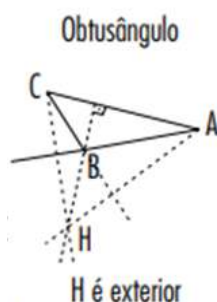


c) Ortocentro: é o ponto de encontro das alturas de um triângulo. A sua posição varia de acordo com o tipo de triângulo.

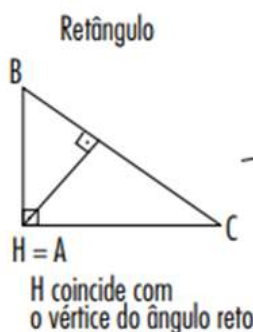
I) Triângulo acutângulo: o ortocentro se encontra no interior do triângulo.



II) Triângulo obtusângulo: o ortocentro fica na região externa ao triângulo.

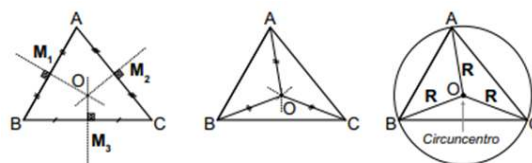


III) Triângulo retângulo: o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.

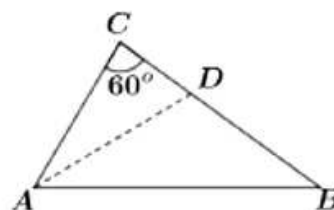


d) Circuncentro: é o ponto de encontro das três mediatrizes dos lados de um triângulo.

O ponto **O** é o centro do círculo que circunscreve o triângulo.

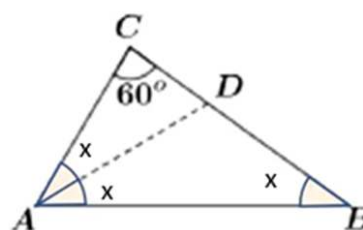


Exemplo 02. No triângulo ABC exibido na figura a seguir, AD é a bissetriz do ângulo interno em A e $\overline{AD} = \overline{BD}$. Qual o ângulo interno em A?



Note que o segmento AD é uma bissetriz que divide o ângulo A em dois ângulos iguais. Como o triângulo ADB possui dois lados iguais, AD e BD, ele é isósceles e os ângulos das bases são iguais.

Vamos chamar de x o ângulo desconhecido:



Temos que no triângulo ABC:

$$60 + x + x + x = 180$$

$$60 + 3x = 180$$

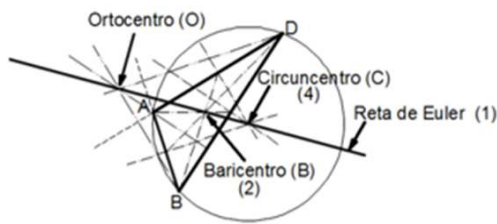
$$3x = 120 \rightarrow x = 40$$

Portanto, o ângulo formado em A é:

$$\hat{A} = 2x = 80^\circ$$

Reta de Euler

A reta de Euler é uma linha especial que conecta três pontos notáveis de um triângulo: ortocentro, circuncentro e baricentro. Veja:



A reta de Euler nos fornece várias relações interessantes entre os pontos notáveis de um triângulo, sendo elas:

- I) A reta de Euler passa pelo ortocentro, circuncentro e baricentro do triângulo.
- II) A reta de Euler é perpendicular à reta que une o ortocentro ao circuncentro do triângulo.
- III) A reta de Euler é paralela à mediana que parte do vértice oposto ao baricentro.
- IV) O segmento do ortocentro ao circuncentro é o dobro do segmento do baricentro ao circuncentro.

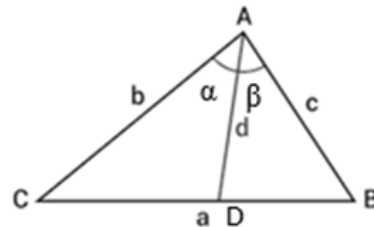
Teoremas

Teorema da Bissetriz

Temos dois teoremas relacionados à bissetriz: o da bissetriz interna e o da bissetriz externa. Ambos são importantes ferramentas que nos auxiliam a encontrar medidas desconhecidas em um triângulo.

Teorema da Bissetriz Interna

A bissetriz interna de um ângulo de um triângulo determina sobre o lado oposto segmentos aos dois outros lados.



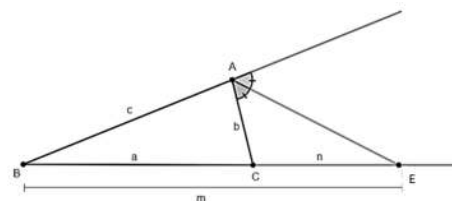
Exemplificando, no $\triangle ABC$ da figura, a bissetriz $\overline{AD}$ divide o ângulo do vértice $\hat{CAB}$ em dois iguais, α e β . Além disso, essa mesma reta divide o segmento $\overline{BC}$ em $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$.

Portanto, pelo teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

Teorema da Bissetriz Externa

O teorema da bissetriz externa demonstra que os segmentos divididos pela bissetriz do ângulo externo de um triângulo são proporcionais aos lados adjacentes.

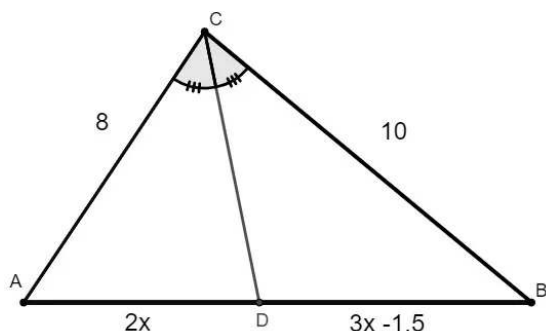


No $\triangle ABC$, da figura acima, a bissetriz do ângulo externo $\hat{ABC}$ é definida pelo segmento $\overline{CE}$. Portanto, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$$

Observação: A demonstração desses dois teoremas é feita a partir do teorema de Tales.

Exemplo 03. Considere a figura abaixo:



Sabendo que os lados foram dados em centímetros, qual a medida do segmento AB?

Pelo teorema da bissetriz interna, temos que:

$$\frac{2x}{8} = \frac{3x-1,5}{10}$$

$$20x = 8(3x - 1,5)$$

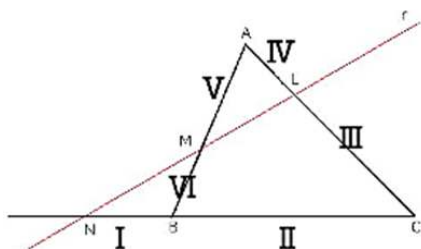
$$20x = 24x - 12$$

$$4x = 12 \rightarrow x = 3$$

Teorema de Menelaus (caracol)

Esse teorema nos dá razões entre os segmentos. Para melhor compreensão, vamos dividi-lo em passos:

1) O primeiro passo é enumerar os lados do triângulo. Assim:



Observação: Enumere com algarismos romanos para não confundir com os dados que o problema fornecer.

2) Em seguida, temos que montar a igualdade:

produto dos ímpares = produto dos pares.

Pela figura, temos que:

$$I \times III \times V = (I \times II) \times IV \times VI$$

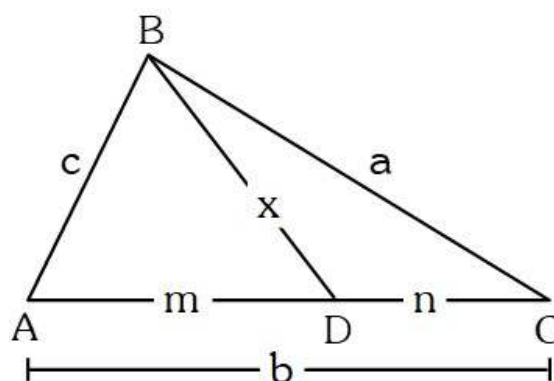
Então:

$$\overline{NB} \times \overline{CL} \times \overline{AM} = \overline{NC} \times \overline{LA} \times \overline{MB}$$

Teorema de Stewart

O Teorema de Stewart é amplamente utilizado para resolver problemas que envolvem cevianas e segmentos em triângulos. Ele é uma poderosa ferramenta para calcular comprimentos desconhecidos e explorar relações entre as partes de um triângulo.

Considere o triângulo ABC da figura a seguir.

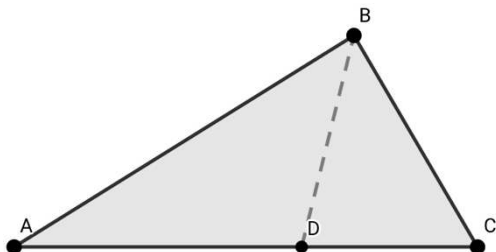


Segundo o teorema de Stewart:

$$x^2 b = a^2 m + c^2 n - mnb$$

Exercícios

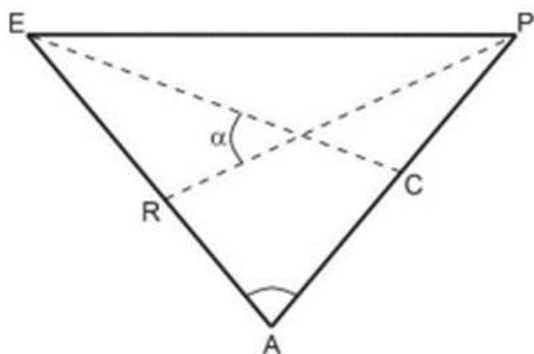
01. No triângulo ABC, AD é bissetriz



interna, $AB=18$ cm, $AC=15$ cm e $BC=11$ cm. Calcule CD.

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6

02. (EPCAR - 2023) No triângulo da figura abaixo, o ângulo $\widehat{EAP}$ mede 80° e são bissetrizes dos ângulos $\widehat{PR}$ e $\widehat{EC}$, respectivamente.



A medida do ângulo α , em graus, é igual a :

- a) 35°
- b) 40°
- c) 45°
- d) 50°

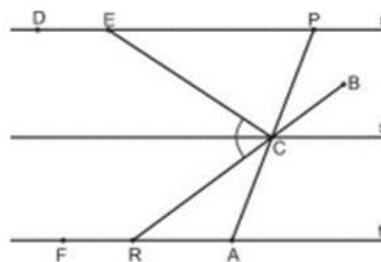
03. Os lados de um triângulo medem respectivamente 4 cm, 5 cm e 6 cm. Calcule o quanto é preciso prolongar o lado maior para que ele se encontre com a bissetriz do ângulo externo oposto.

- a) 20
- b) 22
- c) 24
- d) 25

04. (EPCAR - 2022) Na figura, as retas r , s e t são paralelas.

O ponto C é a intersecção dos segmentos $\overline{RB}$ e $\overline{AP}$ e pertence à reta s .

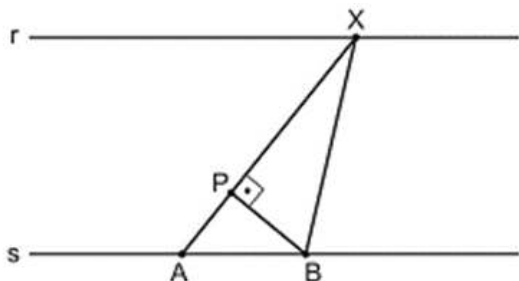
As medidas dos ângulos $\widehat{DEC}$, $\widehat{FRC}$, $\widehat{EPC}$ e $\widehat{CAR}$ são, em graus, respectivamente, iguais a 7β , 7α , 4α e 4β .



A medida do ângulo $\widehat{ECR}$ é igual a:

- a) 30° .
- b) 45° .
- c) 60° .
- d) 90° .

05. (EPCAR - 2017) Considere duas calçadas r e s , paralelas entre si, a uma distância de 6 m uma da outra.



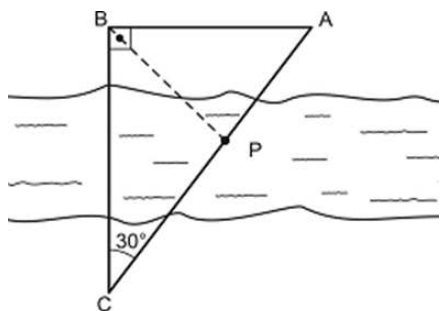
Duas pessoas distantes 5 m uma da outra se encontram nos pontos A e B definidos na calçada s .

Na calçada r está uma placa parada de ônibus no ponto X que dista 10 m da pessoa posicionada em A.

Quando a pessoa em A se deslocar para P sobre o segmento $\overline{AX}$, a distância que irá separá-la da pessoa posicionada no ponto B, em metros, será de:

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6

06. (EPCAR - 2015) As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme figura abaixo.

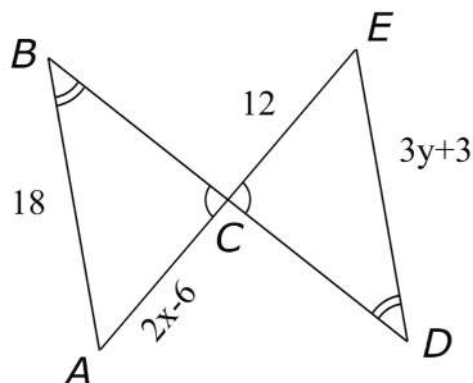


Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo e a bissetriz do ângulo reto corta AC no ponto P.

Se $BC = 6\sqrt{3}$ km, então CP é, em km, igual a:

- a) $6 + \sqrt{3}$
- b) $6(3 - \sqrt{3})$
- c) $9\sqrt{3} - \sqrt{2}$
- d) $9(\sqrt{2} - 1)$

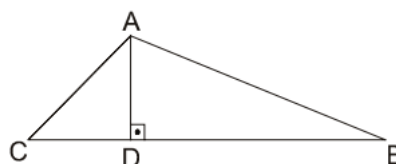
07. Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo CDE.



Os valores de x e y são:

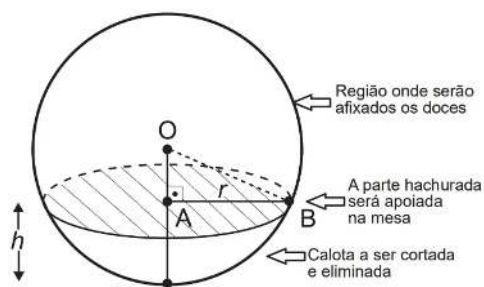
- a) $x=9$ $y=5$
- b) $x=8$ $y=5$
- c) $x=5$ $y=8$
- d) $x=9$ $y=8$

08. (FUVEST - 2006) Na figura abaixo, tem-se $AC=3$, $AB=4$ e $CB=6$. O valor de CD é



- a) 17/12
- b) 19/12
- c) 23/12
- d) 25/12
- e) 29/12

09. (Enem - 2017/Adaptada) Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe deseja dispor da maior área possível da região em que serão fixados os doces.



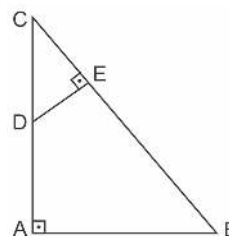
- a) 5
- b) 4
- c) 2
- d) 1

10. (Acafe - 2016) A praça de uma cidade tem a forma de um triângulo retângulo ABC e está sendo reformada. A região triangular foi

dividida em duas partes, conforme a figura abaixo. A região formada pelo triângulo CDE será destinada aos jardins e a região formada pelo quadrilátero

ABED será usada para passeios e eventos.

Sabendo-se que as dimensões são $AB=2$ km, $AC=2,3$ km e $AD = 4DE$, a razão entre a área destinada aos passeios e eventos e a área dos jardins é igual a:



- a) 11/6
- b) 11/2
- c) 11/4
- d) 11

GABARITO

- 1) C
- 2) D
- 3) C
- 4) B
- 5) A
- 6) B
- 7) A
- 8) E
- 9) D
- 10) D

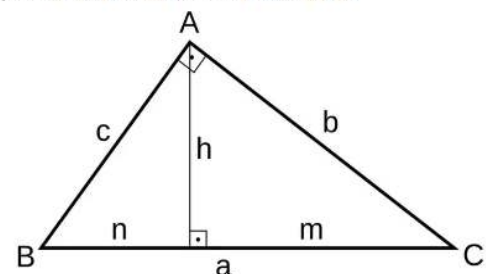
Relações Trigonométricas

A etimologia de Trigonometria vem do grego, “tri + gonos + metron”, que significa três + ângulos + medida. Assim, a trigonometria remete ao estudo das medidas dos ângulos e outros elementos dos triângulos. Neste capítulo estudaremos a trigonometria no triângulo retângulo, bem como aplicar alguns dos conceitos e qualquer tipo de triângulo.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Antes de iniciarmos o assunto sobre trigonometria, vamos ver sobre as relações métricas no triângulo retângulo.

Como vimos nos capítulos anteriores, o triângulo retângulo é caracterizado pela existência de um ângulo reto (90°) formado pelos dois catetos. O lado oposto ao ângulo reto corresponde à hipotenusa.



No triângulo ABC da figura acima, **a** é a hipotenusa, **b** e **c** são os catetos, **m** e **n** são as projeções dos catetos **b** e **c**, respectivamente, e **h** é a altura relativa à hipotenusa.

Aplicando o conceito de semelhança de triângulos, podemos estabelecer algumas relações métricas em um triângulo retângulo. São elas:

a) $bc = ah$

b) $b^2 = am$

c) $c^2 = an$

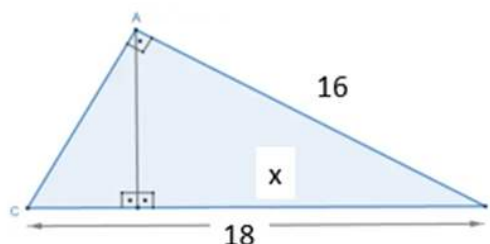
d) $h^2 = mn$

e) $a = m + n$

f) $a^2 = b^2 + c^2$

Essa última relação é uma das mais importantes, conhecida como Teorema de Pitágoras.

Exemplo 01. Determine o valor de x para o triângulo a seguir:



Para calcular o valor de x , iremos utilizar a relação:

$$b^2 = am$$

Em que $b = 16$, $a = 18$ e $m = x$, então:

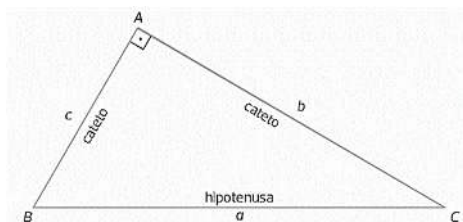
$$16^2 = 18 \cdot x$$

$$x = \frac{256}{18} = 14,22$$

Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é uma ferramenta muito importante para encontrar as medidas de um triângulo retângulo.

Considere o triângulo retângulo a seguir:



O teorema de Pitágoras, nos diz que:

“O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”

Matematicamente:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

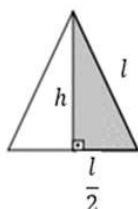
Esse teorema foi baseado na proporção e relação de figuras.

Existem diversos grupos de três números naturais que, juntos, obedecem a essa relação, os chamados de terno pitagórico, como os triângulos: 3, 4 e 5; 5, 12 e 13 e 8, 15 e 17.

Portanto, se há um triângulo cujos lados correspondem a um terno pitagórico, ele é retângulo e, se (a, b, c) é um terno pitagórico, então (ka, kb, kc) , para qualquer número k natural, também é, correspondente a um triângulo retângulo.

Aplicações do Teorema de Pitágoras

a) Relação entre os comprimentos do lado l e da altura h de um triângulo equilátero.



Quando traçamos a altura no triângulo equilátero, formamos um triângulo retângulo (sombreado). Então, pelo teorema de Pitágoras, conseguimos determinar a altura do triângulo equilátero:

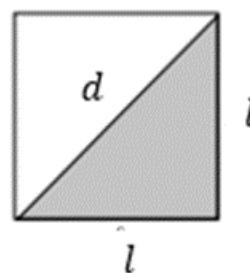
$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

b) Medida da diagonal do quadrado



Ao traçarmos a diagonal de um quadrado, formamos dois triângulos retângulos, em que os lados representam os catetos e a diagonal corresponde à hipotenusa. Assim, a diagonal é:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2 \cdot l^2$$

$$d = l\sqrt{2}$$

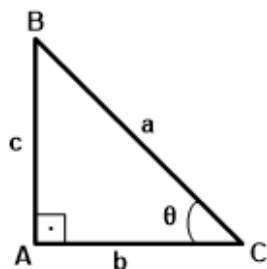
Relações trigonométricas no triângulo retângulo

As relações trigonométricas estão relacionadas com os ângulos de um triângulo retângulo e são resultado

da divisão entre as medidas de dois lados do triângulo.

Essas relações referem-se ao seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante.

Considere o triângulo retângulo ABC da figura a seguir:



em que $\hat{A} = 90^\circ$, $b = AC$, $c = AB$ e $a = BC$.

As possíveis divisões entre dois lados desse triângulo são:

I) Seno (sen): divisão entre o cateto oposto e a hipotenusa:

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

II) Cosseno (cos): divisão entre o cateto adjacente e a hipotenusa:

$$\text{cos}\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

III) Tangente (tg): divisão entre o cateto oposto e o cateto adjacente:

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{c}{b}$$

Note que: $\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$.

O seno, cosseno e tangente são considerados as razões trigonométricas básicas. A partir delas é possível encontrar as razões trigonométricas inversas. São elas:

IV) Cossecante (cossec): inversa do seno:

$$\text{cossec}\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{a}{c}$$

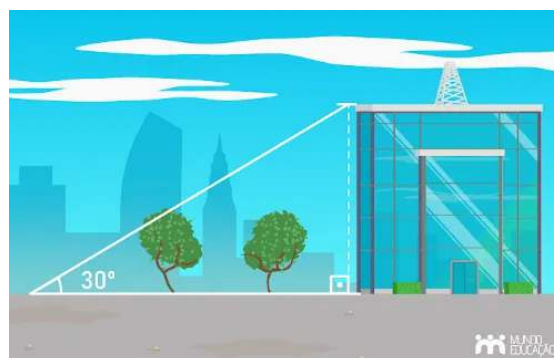
V) Secante (sec): inversa do cosseno:

$$\text{sec}\theta = \frac{1}{\text{cos}\theta} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$$

VI) Cotangente (cotg): inversa da tangente:

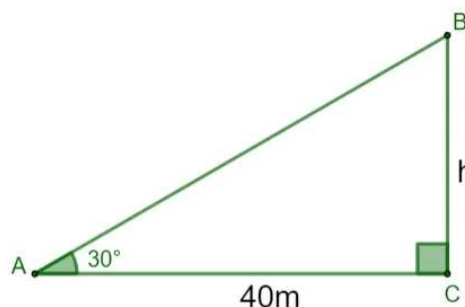
$$\text{cotg}\theta = \frac{1}{\text{tg}\theta} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{b}{c}$$

Exemplo 02. Um engenheiro foi contratado para calcular a altura de um prédio sem subir nele. A uma distância de 40 metros, constatou-se que era possível construir o seguinte triângulo retângulo.



Qual a altura do prédio, aproximadamente? Adote $\sqrt{3} = 1,7$.

Note que, pela imagem, podemos obter o seguinte triângulo:



O valor da altura **h** corresponde ao cateto oposto ao ângulo que conhecemos. Além disso, foi dado o valor do cateto adjacente. Então, para encontrar o valor de **h**, vamos utilizar a tangente do ângulo:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{40}$$

O valor da tangente de 30° vale $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Observação: Ao decorrer do capítulo veremos como calcular o valor das relações trigonométricas para os ângulos mais utilizados.

Portanto,

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{40}$$

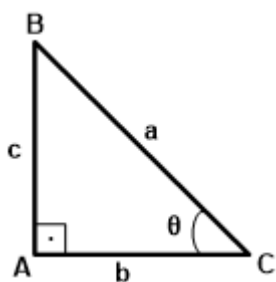
$$3 \cdot h = \sqrt{3} \cdot 40$$

$$3 \cdot h = (1,7) \cdot 40$$

$$h \approx 22,7$$

Relação Fundamental da Trigonometria

Considere o triângulo da figura abaixo:



Temos que:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{c}{a} \rightarrow c = a \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{b}{a} \rightarrow b = a \cdot \cos(\theta).$$

Além disso, segundo o Teorema de Pitágoras:

$$c^2 + b^2 = a^2$$

Substituindo, temos que:

$$(a \cdot \operatorname{sen}(\theta))^2 + (a \cdot \cos(\theta))^2 = a^2$$

$$a^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\theta) + a^2 \cdot \cos^2(\theta) = a^2$$

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

A relação acima é chamada de Relação Fundamental da Trigonometria ou Relação Trigonométrica Fundamental.

Relações derivadas da relação fundamental

A partir da relação fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1,$$

podemos fazer manipulações e encontrar outras relações trigonométricas. Veja:

a) Dividindo ambos os membros da igualdade por $\cos^2(\theta)$, tem-se:

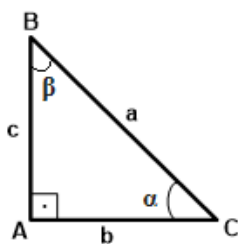
$$\operatorname{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

b) Dividindo ambos os lados da relação fundamental por $\operatorname{sen}^2(\theta)$, encontra-se:

$$1 + \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

Ângulos Complementares

No triângulo retângulo ABC da figura abaixo, $\alpha + \beta = 90^\circ$, ou seja, α e β são ângulos complementares.



Temos algumas relações entre os ângulos complementares:

- $\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}; \cos \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos \beta$
- $\cos \alpha = \frac{b}{a}; \text{sen } \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \cos \alpha = \text{sen } \beta$
- $\text{tg } \alpha = \frac{c}{b}; \text{cotg } \beta = \frac{c}{b} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \text{cotg } \beta$
- $\text{seca} = \frac{a}{b}; \text{cosec } \beta = \frac{a}{b} \Rightarrow \text{seca} = \text{cosec } \beta$
- $\text{cosseca} = \frac{a}{c}; \sec \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \text{cosseca} = \sec \beta$
- $\text{cotg } \alpha = \frac{b}{c}; \text{tg } \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{cotg } \alpha = \text{tg } \beta$

Ângulos Notáveis

Os ângulos notáveis são os ângulos que aparecem com mais frequência, sendo eles: 30° , 45° e 60° . Por isso, é importante que se memorize os valores das principais razões trigonométricas.

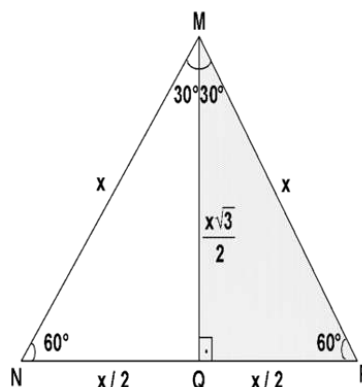
Ângulos: 30° e 60°

Primeiramente, note que como são ângulos complementares ($30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$), então:

$$\text{sen } 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$\text{sen } 60^\circ = \cos 30^\circ.$$

Para deduzir os valores das razões trigonométricas para os ângulos de 30° e 60° , vamos considerar o triângulo equilátero da figura a seguir:



Portanto:

$$\text{sen } 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{x/2}{x} = \frac{1}{2}$$

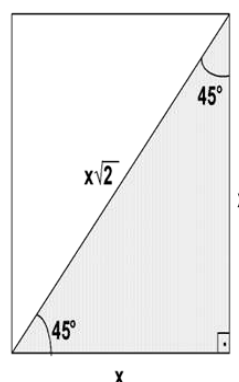
$$\text{sen } 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}/2}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\text{sen } 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Ângulo: 45°

Para o ângulo de 45° , considere a figura abaixo:



Aqui temos que:

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ$$

Então:

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{sen } 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

A tabela abaixo resume os valores das razões trigonométricas para esses três ângulos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Relações trigonométricas em um triângulo qualquer

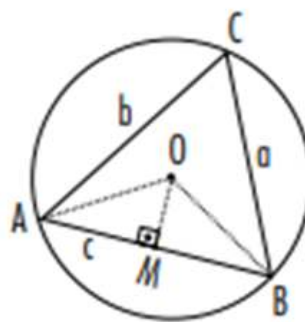
Até agora nós vimos as relações em um triângulo retângulo, mas podemos obter as relações trigonométricas para qualquer tipo de triângulo.

Lei dos Senos

A primeira que vamos ver é conhecida como Lei dos Senos, em que se estabelece uma relação entre os lados de qualquer triângulo e seus ângulos opostos.

A lei dos senos é utilizada quando se deseja encontrar as medidas dos lados, dados dois ângulos e outro lado, ou ainda um dos ângulos, dados dois lados e um ângulo.

Considere o triângulo ABC inscrito na circunferência de raio R, como mostra a figura a seguir:



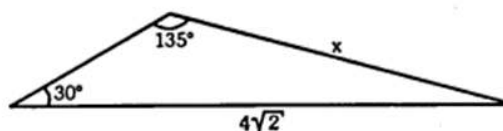
Pela lei dos senos, vale as seguintes igualdades:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen A}}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen B}}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen C}}} = 2R$$

em que R é o raio do círculo que circunscreve o triângulo.

Essa lei demonstra que a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre constante, que a medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Exemplo 03. Qual o valor de x na figura abaixo:



Vamos resolver aplicando a Lei dos Senos:

$$\frac{x}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} = \frac{4\sqrt{2}}{\widehat{\text{sen } 135^\circ}}$$

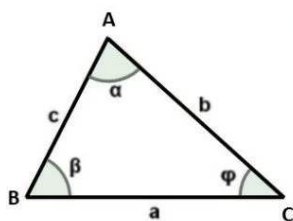
$$x = \frac{4\sqrt{2} \cdot \widehat{\text{sen } 30^\circ}}{\widehat{\text{sen } 135^\circ}}$$

$$x = \frac{4\sqrt{2} \cdot (1/2)}{(\sqrt{2}/2)} = 4$$

Lei dos Cossenos

A segunda relação é conhecida como Lei dos Cossenos. Ela estabelece uma relação entre os lados de qualquer triângulo e seus ângulos, por meio do valor dos cossenos.

Em um triângulo qualquer ABC, valem as seguintes igualdades:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \varphi$$

De um forma geral, a lei dos cossenos estabelece que:

“Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles.”

Exemplo 04. Dois lados de um triângulo medem 4 cm e 6 cm e formam entre si 120°. Quanto é a medida do terceiro lado?

Aplicando a lei dos cossenos, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ$$

$$a^2 = 16 + 36 - 48 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a = 2\sqrt{19}$$

Em resumo, tanto a Lei dos Senos quanto a do Cossenos tem como objetivo descobrir as medidas dos lados de um triângulo acutângulo ou obtusângulo, ou um dos seus ângulos.

Observação: Podemos reconhecer a natureza de um triângulo pela relação dos seus lados. Assim, sabendo-se as medidas dos lados de um triângulo, e chamando a medida do maior lado de **a**, e as outras duas de **b** e **c**, reconhecemos a natureza de um triângulo com base nas equivalências:

a) Triângulo acutângulo:

$$a^2 < b^2 + c^2$$

b) Triângulo obtusângulo:

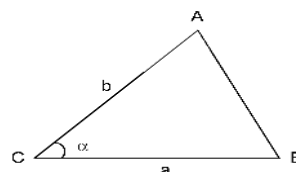
$$a^2 > b^2 + c^2$$

c) Triângulo retângulo:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Área do triângulo

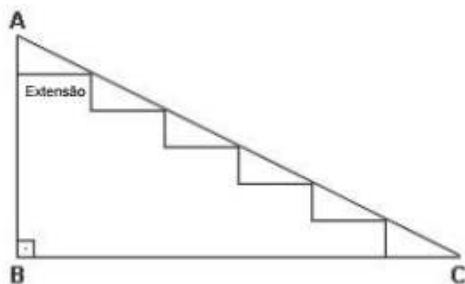
É possível determinar a área de um triângulo em função da medida de dois lados e da medida do ângulo formado por eles. Para tal, utiliza-se a fórmula a seguir.



$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$$

Exercícios

01. (UNIFOR-CE - 2012) A figura abaixo representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão (vide figura), além de mesma altura.



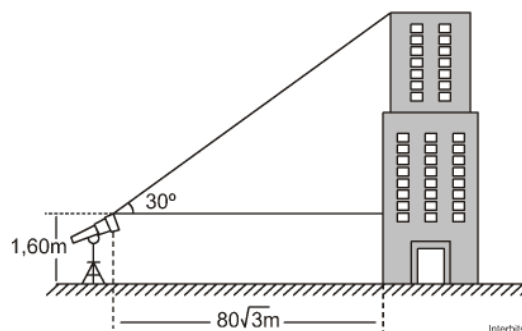
Se $AB = 3$ m e $\angle BCA$ mede 30° , então a medida da extensão de cada degrau é:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m.
- b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m.
- c) $\sqrt{6}$ m.
- d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m.
- e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ m.

02. (UEL-PR) O triângulo ABC é retângulo no vértice A. Sabendo que $\cos B = 0,6$, então $\cotg C$ é igual a:

- a) $5/3$.
- b) $4/3$.
- c) $3/4$.
- d) $3/5$.
- e) $1/2$.

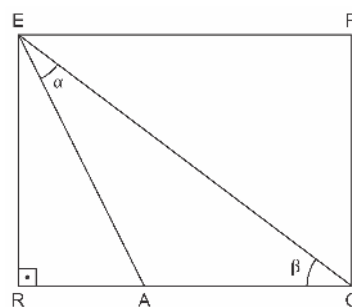
03. (UNIFOR-CE) Uma pessoa está a $80\sqrt{3}$ m de um prédio e vê o topo do prédio sob um ângulo de 30° , como mostra a figura abaixo.



Se o aparelho que mede o ângulo está a 1,6 m de distância do solo, então podemos afirmar que a altura do prédio em metros é:

- a) 80,2
- b) 81,6
- c) 82,0
- d) 82,5
- e) 83,2

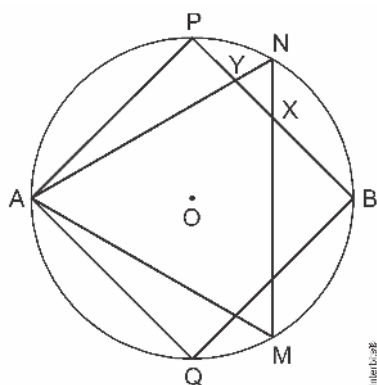
04. (EPCAR - 2021) No retângulo EPCR da figura a seguir, $PC = 6$ cm, $RA = 3$ cm e $AC = 5$ cm.



O valor de $\sin \alpha + \cos \alpha$ é:

- a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
- b) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
- c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

05. (EPCAR - 2022) Considere a figura abaixo e os dados:



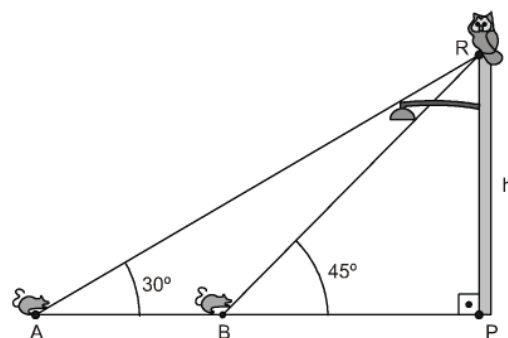
Dados:

- $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
- $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
- A, B, M, N, P e Q pertencem à circunferência de centro O e raio R.
- AMN é um triângulo equilátero.
- APBQ é um quadrado.

Nessas condições, a razão $\frac{NY}{NX}$ é igual a:

- a) $\sqrt{3} - 1$
- b) $\sqrt{3} + 1$
- c) 1
- d) 2

06. (EPCAR - 2012) Uma coruja está pousada em R, ponto mais alto de um poste, a uma altura h do ponto P, no chão. Ela é vista por um rato no ponto A, no solo, sob um ângulo de 30° , conforme mostra figura abaixo.

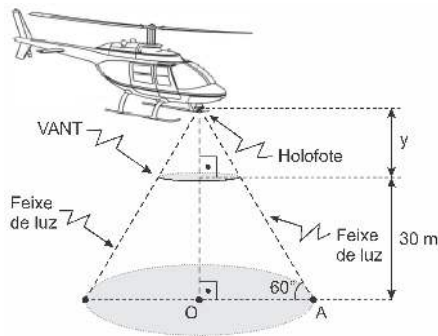


O rato se desloca em linha reta até o ponto B, de onde vê a coruja, agora sob um ângulo de 45° com o chão e a uma distância $\overline{BR}$ de medida $6\sqrt{2}$ metros. Com base nessas informações, estando os pontos A, B e P alinhados e desprezando-se a espessura do poste, pode-se afirmar então que a medida do deslocamento $\overline{AB}$ do rato, em metros, é um número entre:

- a) 3 e 4
- b) 4 e 5
- c) 5 e 6
- d) 6 e 7

07. (EPCAR - 2020) À noite, um helicóptero da Força Aérea Brasileira sobrevoa uma região plana e avista um VANT (Veículo Aéreo Não Tripulado) de forma circular e altura desprezível, com raio de 3 m, estacionado paralelamente ao solo a 30 m de altura.

O VANT está a uma distância y metros de um holofote que foi instalado no helicóptero. O feixe de luz do holofote que ultrapassa o VANT incide sobre a região plana e produz uma sombra circular de centro O e raio R. O raio R da circunferência da sombra forma um ângulo de 60° com o feixe de luz, conforme se vê na figura seguinte.

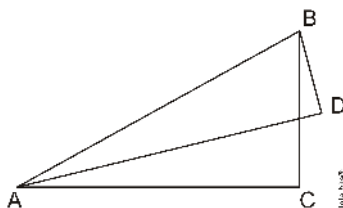


Nesse momento, uma pessoa que se encontra num ponto A da circunferência da sombra corre para o ponto O, pé da perpendicular traçada do holofote à região plana.

A distância, em metros, que essa pessoa percorre de A até O é um número entre:

- a) 18 e 19
- b) 19 e 20
- c) 20 e 21
- d) 22 e 23

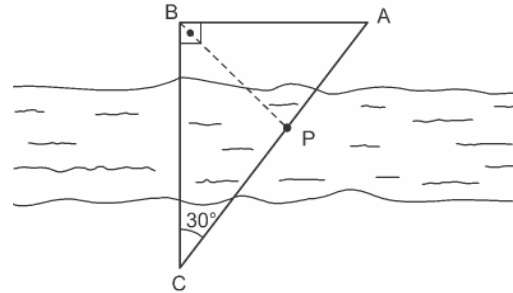
08. (EPCAR - 2011) Em relação à figura abaixo, tem-se $\widehat{CAD} = 30^\circ$, $AC = 2$ cm e $BC = 4$ cm.



Se $AC \perp CB$ e $AD \perp DB$, então, BD, em cm, é igual a:

- a) $\frac{6-\sqrt{3}}{3}$
- b) $6\sqrt{3} - 3$
- c) $2\sqrt{3} - 1$
- d) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

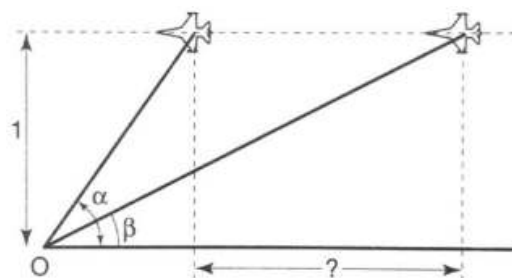
09. (EPCAR - 2016) As cidades A, B e C situam-se às margens de um rio e são abastecidas por uma bomba situada em P, conforme figura abaixo.



Sabe-se que o triângulo ABC é retângulo em B e a bissetriz do ângulo reto corta AC no ponto P. Se $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ km, então CP é, em km, igual a:

- a) $6 + \sqrt{3}$
- b) $6(3 - \sqrt{3})$
- c) $9\sqrt{3} - \sqrt{2}$
- d) $9(\sqrt{2} - 1)$

10. (UnP-RN) Um avião de combate de ISRAEL voa numa reta horizontal à altura de 1 km em relação a um observador O no solo, situado na projeção horizontal da trajetória. No instante t_0 , é visto sob ângulo β e, no instante t_1 , sob ângulo α . Com essa descrição, podemos afirmar que a distância percorrida entre os instantes t_0 e t_1 é representada pela expressão:



a) $\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha$.

b) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$.

c) $\cos \beta - \cos \alpha$.

d) $\cotg \beta - \cotg \alpha$.

GABARITO

1) A

2) B

3) B

4) A

5) A

6) C

7) B

8) C

9) B

10) D

Polígonos

A palavra polígono vem do grego, formada pela união de dois termos “poly” e “gon” que significa muito ângulos. Os polígonos são figuras planas e fechadas constituídas por segmentos de retas. Os polígonos ocupam uma posição de destaque na geometria, sendo uma área importante no estudo da matemática. Neste veremos a definição de polígonos e suas propriedades.

Definição

O polígono são figuras geométricas planas e fechadas formadas por segmentos de reta.

Um polígono é formado por cinco elementos básicos:

a) Lados: são os segmentos de reta que contornam a figura.

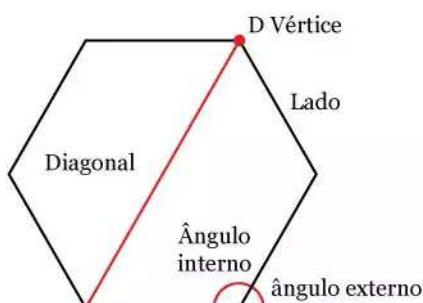
b) Vértices: correspondem aos pontos de encontro entre dois lados.

c) Ângulos internos: é o ângulo que está no interior do polígono, formado por dois lados.

d) Ângulo externo: é o prolongamento de um ângulo interno que, somado a ele, forma um ângulo de 180° .

e) Diagonais: são os segmentos de reta que ligam dois vértices não consecutivos da figura.

Veja a identificação desses elementos em um polígono qualquer:



Tipos de polígonos

Os polígonos podem ser classificados de diferentes modos. Agora veremos as principais classificações.

Número de Lados

Um polígono pode ser classificado em relação ao seu número de lados.

A tabela mostra o nome dos principais polígonos em relação ao número de lados.

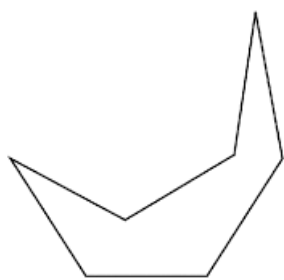
Número de lados (n)	Nomenclatura
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono

9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Docecágono
20	Icoságono

Observação: note que não é necessário decorar a tabela, com exceção do triângulo e do quadrilátero, para formar a palavra fazemos:

Número de lados (sufixo) + gono.

Exemplo 01. Determine o nome do polígono a seguir:



O polígono apresenta sete lados, então o sufixo será hepta.

Portanto, o nome desse polígono é heptágono.

Regulares e Irregulares

Quando um polígono possui os lados e os ângulos internos com medidas iguais eles são classificados como regulares.

Se as medidas forem diferentes, os polígonos são classificados como irregulares.

Uma característica específica dos polígonos regulares é que eles são figuras simétricas, ou seja, eles podem ser divididos em partes iguais por um eixo de simetria.

Alguns exemplos dos principais polígonos regulares são:

a) Triângulo equilátero: é o polígono regular mais simples. Possui três lados congruentes e três ângulos internos de 60° cada.

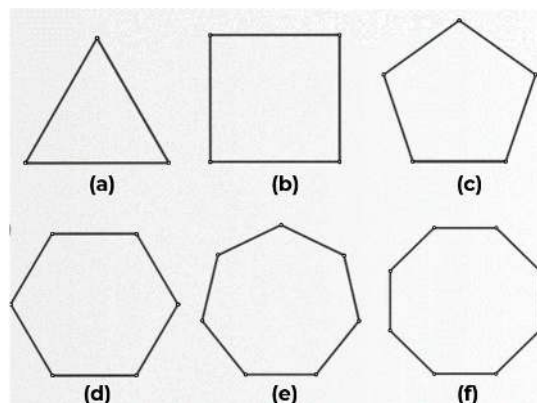
b) Quadrado: possui quatro lados congruentes e quatro ângulos retos.

c) Pentágono: possui cinco lados congruentes e cinco ângulos internos de 108° cada.

d) Hexágono: possui seis lados congruentes e seis ângulos internos de 120° cada.

e) Heptágono: possui sete lados congruentes e sete ângulos internos de aproximadamente $128,57^\circ$ cada.

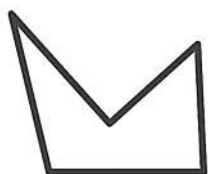
f) Octógono: possui oito lados congruentes e oito ângulos internos de 135° cada.



Convexos e côncavos

Um polígono é classificado como convexo quando todos os pontos de um segmento de reta estejam dentro dele. Além disso, em um polígono os ângulos internos são menores que 180° .

Um polígono é considerado côncavo quando os segmentos de reta estão fora do polígono, mesmo com suas extremidades no interior dela. Neste caso, pelo menos um dos ângulos internos é superior a 180° .



Polígono Côncavo



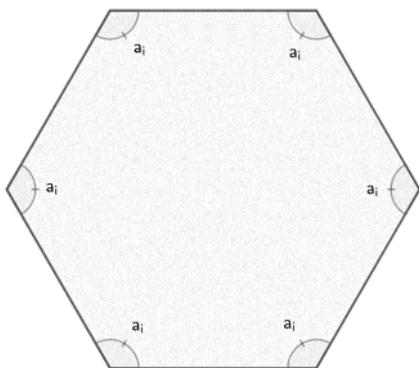
Polígono Convexo

Propriedades

Agora iremos explorar as propriedades dos polígonos, como soma dos ângulos internos e externos, diagonais e cálculo de áreas.

Soma dos ângulos internos

Considere a figura a seguir:



A soma dos ângulos internos (S_n) está relacionada com a quantidade de lados (n) do polígono.

Podemos obter a partir da expressão:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Para calcular o valor de cada ângulo interno, basta dividir o valor da soma S_n pelo número de lados:

$$a_i = \frac{S_i}{n}$$

Exemplo 02. Determine a soma dos ângulos internos e a medida de cada ângulo interno de um icosaágono.

Um icosaágono possui vinte lados, então $n = 20$.

A soma dos ângulos internos será:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = (20 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S_i = 18 \cdot 180^\circ = 3240^\circ$$

Para encontrar a medida de cada ângulo, basta dividir o valor encontrado por 20:

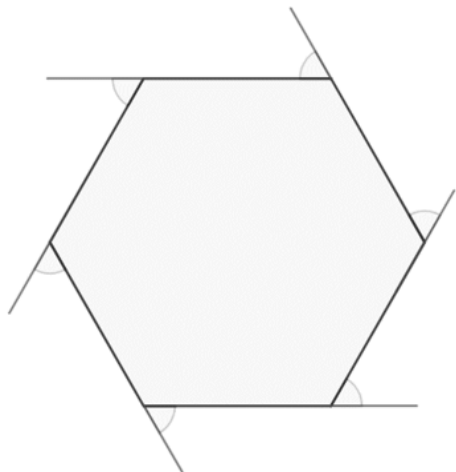
$$a_i = \frac{3240^\circ}{20} = 162^\circ$$

Exercício Proposto

01. Determine a soma dos ângulos internos de um octógono regular e o valor de um de seus ângulos internos.

Soma dos ângulos externos

Considere a figura abaixo:



A soma dos ângulos externos (S_e) de um polígono sempre será igual a 360° .

$$S_e = 360^\circ$$

Para calcular o valor de cada ângulo interno, basta dividir o valor da soma S_n pelo número de lados:

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360^\circ}{n}$$

Número de diagonais

O número de diagonais de um polígono também está relacionado com o número de lados.

Para um polígono de n lados, o número de diagonais é dado por:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Exemplo 03. Qual o número de diagonais de um pentágono? Represente-as graficamente.

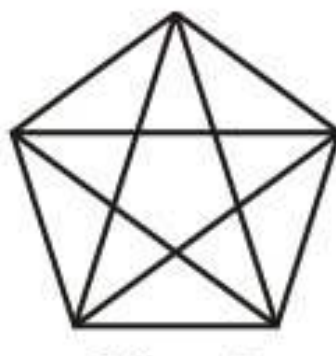
Um pentágono possui cinco lados, então $n = 5$. Assim:

$$d = \frac{5 \cdot (5-3)}{2}$$

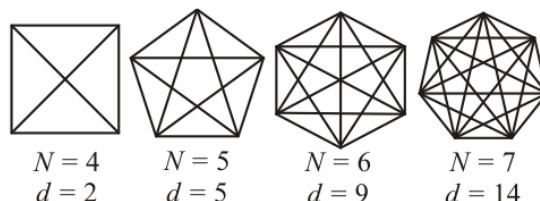
$$d = \frac{5 \cdot 2}{2}$$

$$d = 5 \text{ diagonais}$$

Graficamente, as diagonais são representadas como:



A figura a seguir mostra a representação gráfica das diagonais para alguns polígonos.



A equação da diagonal nos dá como resultado o número total de diagonais. Entretanto, podemos encontrar o número de diagonais que passam pelo centro: basta dividir o número de lados por 2. Note que polígonos com número de lados ímpar, não possuem diagonais que passam pelo centro.

Existem alguns problemas em que se pede o número de diagonais que **NÃO** passam pelo centro. A solução é bem simples, basta pegar o total e tirar as que passam.

Considere “A” o número de diagonais que não passam pelo centro. Então:

$$A = \frac{N(N-3)}{2} - \frac{N}{2}.$$

Exercícios Propostos

02. Qual polígono possui o número de lados igual ao número de diagonais?

03. Qual polígono possui 35 diagonais?

04. Os ângulos externos de um polígono valem 20° , qual é o número de diagonais que não passam pelo centro?

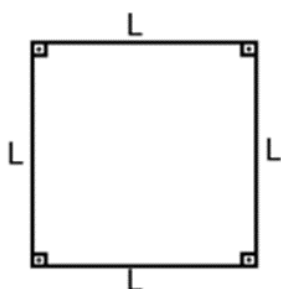
Áreas e perímetro

O perímetro de polígonos é definido como a soma de todos os seus lados. Enquanto a área é utilizada para dimensionar as superfícies planas.

Para obter o perímetro basta somarmos a medida de todos os seus lados.

Exemplo 04. O perímetro para um quadrado, de lado L é:

$$P = L + L + L + L = 4L$$



Em relação à área, cada polígono possui uma expressão específica, e existem diversas formas para calculá-la.

Geralmente, para o cálculo da área de um polígono dividimos o polígono em figuras, cujo cálculo da área é mais fácil, como o triângulo e o quadrado.

A área do triângulo é calculada a partir da equação:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

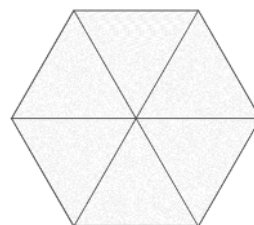
E área do quadrado é dada por:

$$A_{\text{quadrado}} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$A_{\text{quadrado}} = L \times L = L^2$$

Exemplo 05. Encontre uma expressão que represente a área de um hexágono regular.

Para resolver, vamos considerar um hexágono regular em que temos segmentos de reta que liguem o centro do polígono a cada vértice:



Note que, por ser um polígono regular, ao dividirmos o hexágono encontramos seis triângulos equiláteros.

Então, a área do hexágono será seis vezes a área do triângulo equilátero:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\text{triângulo}}$$

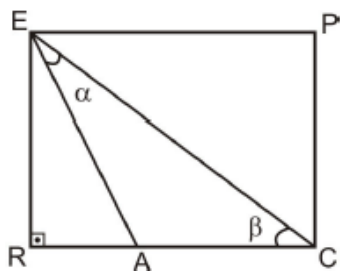
A área do triângulo equilátero é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Portanto, } A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Exercícios

01. (EPCAR - 2020) No retângulo EPCR da figura a seguir, $\overline{PC} = 6\text{cm}$, $\overline{RA} = 3\text{cm}$ e $\overline{AC} = 5\text{cm}$.



O valor de $\sin \alpha + \cos \alpha$ é:

- a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
- b) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
- c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

02. (CMRJ - 2017) A figura ilustra uma chapa metálica retangular bem fina cuja superfície vale 204 cm^2 .



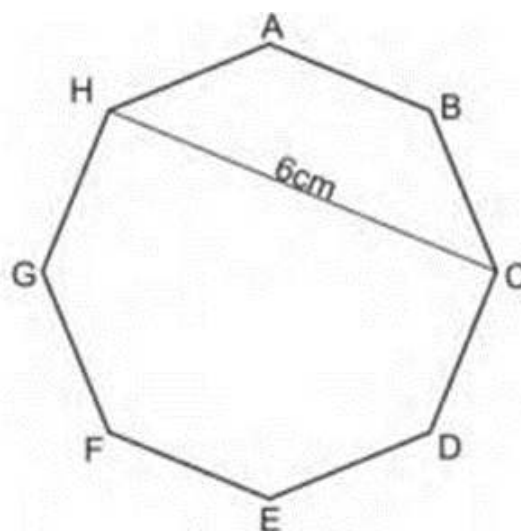
Devido à dilatação térmica, a maior das dimensões (comprimento) foi aumentada de 3 cm e a largura, de 2 cm, fazendo com que essa superfície seja aumentada de 76 cm^2 .

“Observe que a área de um retângulo corresponde ao produto do comprimento pela largura.”

Nessas condições, o comprimento pode ter dois valores, ambos contidos no intervalo:

- a) $[11, 0; 12, 5]$
- b) $[13, 5; 15, 5]$
- c) $[14, 5; 16, 5]$
- d) $[16, 0; 18, 5]$
- e) $[17, 0; 19, 5]$

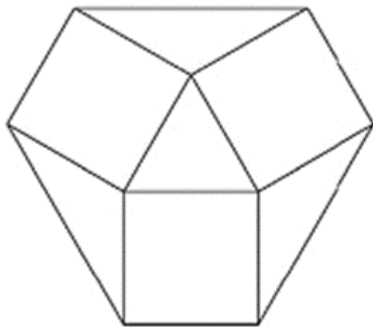
03. (EPCAR - 2011) A figura abaixo representa um octógono regular tal que $CH = 6\text{ cm}$:



A área desse polígono, em cm^2 , é igual a

- a) $56(\sqrt{2} - 1)$
- b) $64(\sqrt{2} - 1)$
- c) $72(\sqrt{2} - 1)$
- d) $80(\sqrt{2} - 1)$

04. (EPCAR - 2009) A figura plana abaixo representa o logotipo de uma empresa. Ele foi projetado a partir de um triângulo equilátero central, cujo perímetro mede 0,30 m. Expandiu-se o desenho, acoplando em cada lado desse triângulo um quadrado. Para fechar a figura, foram traçados 3 segmentos retilíneos, completando assim o logotipo.



Nos preparativos para Copa do Mundo de 2010, esse logotipo será pintado com tintas de mesma qualidade e textura, a saber:

- o triângulo central, na cor branca;
- os demais triângulos, na cor verde;
- os quadrados, na cor amarela.

Sabe-se que cada figura será pintada apenas uma vez e que cada mililitro de tinta cobre 1 cm^2 de área.

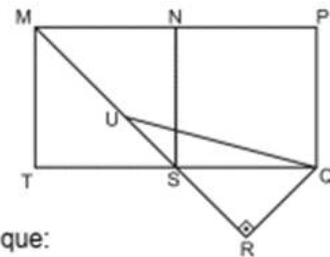
Considere $\sqrt{3} = 1,74$ e marque a alternativa correta.

- a)** O consumo total de tinta será de mais de meio litro.
- b)** As áreas branca e verde juntas equivalem a 58% da área amarela.
- c)** O consumo de tinta amarela será o dobro do consumo de tinta verde.
- d)** A área branca corresponde a 30% da área verde.

05. (OBMEP - 2005) Para cercar um terreno retangular de 60 metros quadrados com uma cerca formada por dois fios de arame foram usados 64 metros de arame. Qual é a diferença entre o comprimento e a largura do terreno?

- a)** 4 m
- b)** 7 m
- c)** 11 m
- d)** 17 m
- e)** 28 m

06. (EPCAR - 2018) Considere a figura a seguir:



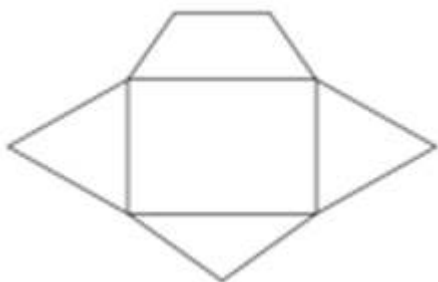
Sabe-se que:

- MNST e NPQS são quadrados
- $\overline{MS} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$
- $\text{med}(\widehat{UQS}) = 15^\circ$
- os pontos M, U, S e R estão alinhados.

Sejam A_1 a área do triângulo SRQ e A_2 a área do triângulo URQ, ambas em cm^2 .

O valor de $\frac{A_1}{A_2}$ é:

- a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- c)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- d)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

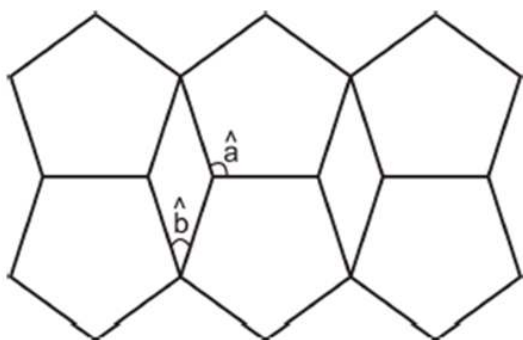


Considere $\sqrt{3} = 1,7$.

Se o pacote de papel A4 é vendido com 500 folhas e se for confeccionado apenas um envelope com cada uma das folhas de um pacote, então, a quantidade gasta, em gramas, de papel é maior que:

- a) 800
- b) 750 e menor que 800
- c) 700 e menor que 750
- d) 650 e menor que 750

10. (EPCAR - 2020) Para participar de um concurso no qual serão escolhidos mosaicos para a calçada de uma igreja, um artista construiu seu mosaico usando pentágonos regulares e losangos dispostos conforme a figura a seguir



Sabe-se que $\hat{a}$ e b são ângulos do pentágono regular e do losango, respectivamente. Se a soma $\hat{a} + b$ equivale a x graus, então, quanto ao valor de x pode-se afirmar que é um número:

- a) primo
- b) quadrado perfeito
- c) divisível por 7
- d) múltiplo de 10

GABARITO

- 1) A
- 2) D
- 3) C
- 4) B
- 5) A
- 6) B
- 7) D
- 8) E
- 9) A
- 10) B

Circunferência

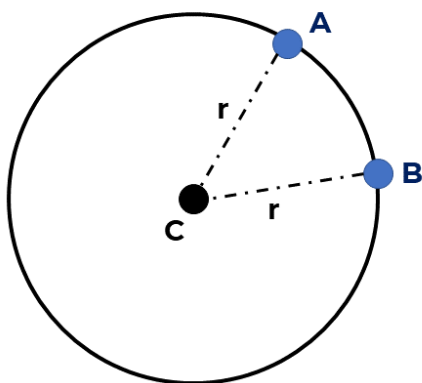
Neste capítulo iremos estudar sobre uma figura geométrica bem conhecida, a circunferência. Ela está presente na matemática de diversas maneiras, tanto na geometria plana quanto na geometria analítica. O estudo da circunferência é de extrema importância para resolver diferentes tipos de problema.

Definição

A circunferência é uma figura geométrica plana, constituída por um conjunto de pontos igualmente distantes de um ponto fixo.

O ponto fixo é chamado de centro e a distância entre o centro e cada ponto é chamada de raio da circunferência.

Observe a figura a seguir:



O ponto **C** representa o centro e **r** representa o raio da circunferência.

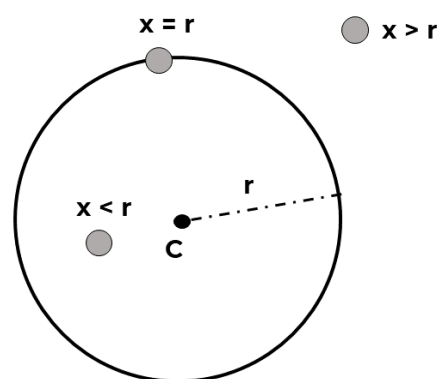
Observação: as circunferências são representadas por figuras “perfeitamente redondas”.

A partir dessas definições, é possível definir a posição x de um ponto qualquer em relação ao raio da circunferência. Existem três possibilidades:

a) Quando $x > r$, o ponto é externo à circunferência.

b) Quando $x = r$, o ponto está na circunferência.

c) Quando $x < r$, o ponto está no interior da circunferência.



Corda, diâmetro e raio

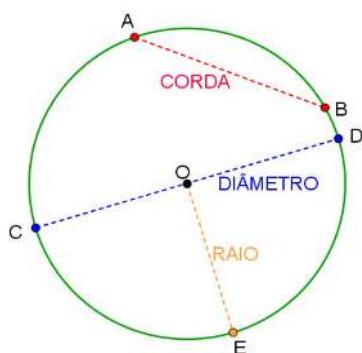
A circunferência possui alguns conceitos que são muito utilizados ao longo de seu estudo, sendo eles:

a) **Corda:** é todo o segmento que une dois pontos distintos de uma circunferência, isso significa que o segmento possui as duas extremidades pertencentes à circunferência.

b) **Diâmetro:** quando a corda passa pelo centro da circunferência, ela é chamada de diâmetro. O diâmetro é a maior corda da circunferência.

c) Raio: é o segmento que possui uma extremidade no centro e outra extremidade pertence à circunferência.

Veja a representação desses três conceitos na figura:



Note que, o raio sempre será a metade do diâmetro. Assim:

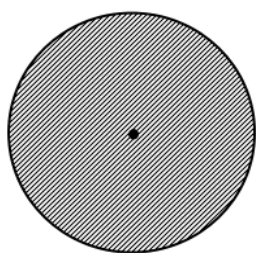
$$d = 2 * r$$

Observação: Raios e diâmetros são nomes de segmentos de reta, mas podem ser utilizados como a medida desses segmentos.

Círculo

O círculo é definido como o conjunto de todos os pontos presentes no interior de uma circunferência, ou seja, é todo o espaço ocupado dentro da circunferência.

Dessa forma, é como se a circunferência fosse a “linha” exterior e o círculo é a circunferência mais a parte interna.



Na figura acima a circunferência é representada pela linha preta e o círculo é a junção da linha preta com todo o interior hachurado.

Exemplo 01. Sobre a circunferência, julgue as afirmativas a seguir:

- I. A circunferência de centro O e raio r é um conjunto de todos os pontos cuja distância até O é igual a r .
- II. O comprimento do diâmetro é sempre igual à metade do comprimento do raio.
- III. A circunferência é uma área plana limitada por um círculo.

Marque a alternativa correta:

- a) Somente a afirmativa I é verdadeira.
- b) Somente a afirmativa II é verdadeira.
- c) Somente a afirmativa III é verdadeira.
- d) Todas as afirmativas são falsas.

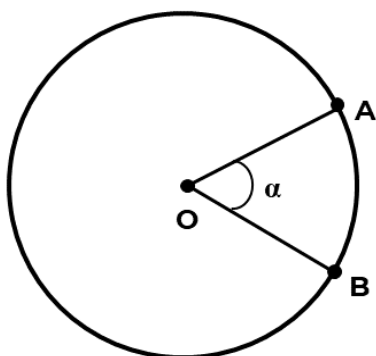
Solução:

- I. Verdadeira, por definição.
- II. Falsa, pois o diâmetro é igual ao dobro do raio.
- III. Falsa, pois o círculo que é a área plana limitada pela circunferência.

Portanto, a resposta correta é a **alternativa A**.

Setor Circular

O setor circular é uma região do círculo que é delimitada por 2 de seus raios, formando um arco entre os pontos A e B. Veja:



E a abertura formada pelas dois segmentos de reta (raios), que se encontram em um ponto comum (vértice) é chamado de ângulo (α). Quando o vértice coincide com o centro da circunferência é chamado de ângulo central.

Neste caso, dizemos que AB é o arco correspondente ao ângulo α .

Nós vimos nos capítulos anteriores que os ângulos são medidos em graus ($^\circ$). Agora iremos definir uma nova medida de ângulo: o radiano (rad).

Vamos utilizar como exemplo a Figura acima, o ângulo central α tem por medida 1 rad, se o comprimento do arco AB for igual ao raio do círculo.

Para o círculo completo, a medida do ângulo é 2π rad, o que corresponde a 360° .

Observação: para realizar a conversão do ângulo em graus para radianos ou vice versa, basta fazermos uma regra de três. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 02. Quantos radianos mede um ângulo reto?

Sabemos que um ângulo reto é igual a 90° , então:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$x \text{ rad} = 90^\circ$$

$$360x = 2\pi \cdot 90$$

$$x = \frac{2\pi \cdot 90}{360}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Perímetro e área

De uma forma geral, o perímetro é definido como a soma de todos os lados de uma figura. Contudo, sabe-se que uma circunferência não apresenta “lados”.

No caso de circunferências, podemos utilizar a definição de que o perímetro é a linha que forma o contorno de uma figura feita num plano ou em uma superfície. Portanto, para a circunferência, o perímetro é dado por:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Em que r é o raio e π é o número é um número irracional ($\pi \sim 3,14$).

A área do círculo corresponde ao valor da superfície dessa figura e é dada pela equação:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Em que r é o raio da circunferência. Podemos calcular a área utilizando o diâmetro ao invés do raio. Nesse caso, a equação é dada por:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Perímetro e área do setor circular

Nós definimos na seção anterior o conceito de setor circular, agora veremos como calcular o

comprimento e a área para essa seção.

Sabendo que para um círculo $2R = 360^\circ$. Então, para obter o perímetro ou comprimento do arco (L), podemos utilizar a seguinte relação:

$$2R = 360^\circ$$

$$L = \theta$$

$$L = \frac{2R \cdot \theta}{360} = \frac{R \cdot \theta}{180}$$

Em que θ é o ângulo formado pelo arco, dado em graus ($^\circ$). Quando o ângulo dado for em radianos, a expressão fica:

$$L = \frac{R \cdot \theta}{\pi}$$

Para o cálculo da área, vamos seguir o mesmo raciocínio:

Sabendo que $A_{\text{círculo}} = \pi R^2$, então:

$$\pi R^2 = 360^\circ$$

$$A = \theta$$

$$A = \frac{\pi R^2 \cdot \theta}{360}$$

Caso o ângulo esteja em radianos, o que é mais comum, a área é dada por:

$$A = \frac{R^2 \cdot \theta}{2}$$

Exemplo 03. Na fazenda do Seu Sebastião, o cultivo de milho é feito em uma área delimitada por uma circunferência. Para evitar invasões de animais na plantação, ele decidiu cercá-la com arame farpado, dando 4 voltas completas. Sabendo que o diâmetro da circunferência é de 1 km, a quantidade mínima de arame necessária para cercar essa área é igual a:

(Use $\pi = 3$)

a) 3 km

b) 6 km

c) 12 km

d) 20 km

Solução:

Quando se fala em dar voltas, automaticamente deve-se pensar em perímetro. Desse modo, o perímetro da circunferência é dado por:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Nesse caso, o diâmetro $d = 1$ km. Então, tem-se que $r = 0,5$ km.

Substituindo na equação:

$$C = 2 \cdot 3 \cdot 0,5$$

$$C = 3 \text{ km}$$

Portanto, o perímetro é de 3 km.

Como foram dadas 4 voltas, faz-se a seguinte regra de 3:

$$3 \text{ km} \text{ — } 1 \text{ volta}$$

$$x \text{ — } 4 \text{ voltas}$$

Logo, $x = 12$ km.

Então, a resposta correta é a **alternativa A**.

Exercícios

01. (Enem 2014 – PPL) Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio. Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária? (Use $\pi = 3,0$)

- a) 0,30 km
- b) 0,75 km
- c) 1,50 km
- d) 2,25 km
- e) 4,50 km

02. (IFG - 2019) Se o raio R de uma circunferência for reduzido pela metade, é correto afirmar que:

- a) O valor da área do círculo ficará reduzida pela metade do valor da área do círculo inicial de raio R .
- b) O valor da área do círculo ficará a $\frac{3}{4}$ do valor da área do círculo inicial de raio R .
- c) O comprimento da circunferência se reduzirá a $\frac{1}{4}$ do valor do comprimento da circunferência inicial de raio R .
- d) O comprimento da circunferência se reduzirá à metade do valor do comprimento da circunferência inicial de raio R .

03. Um parque possui formato circular e será cercado para a realização de um evento. Sabendo que para cercar essa região será gasto um total de R\$ 9,00 por metro e que o raio desse parque é de 14 metros, o valor gasto para cercá-lo será igual a:

(Use $\pi = 3$)

- a) R\$ 756,00
- b) R\$ 695,00
- c) R\$ 640,00
- d) R\$ 525,00

04. (IFG - 2015) Dois círculos, C_1 e C_2 , possuem raios com medidas $3x$ e $x + 5$, em cm, respectivamente. Sabe-se que a razão entre o comprimento de C_1 e o comprimento de C_2 é igual a 2. Dessa forma, é correto afirmar que as áreas de C_1 e C_2 valem em cm^2 , respectivamente:

(Use $\pi = 3,14$)

- a) 900π e 225π .
- b) 920π e 240π .
- c) 905π e 255π .
- d) 910π e 235π .

05. (UERJ - 2020) Um valor aproximado da área do círculo pode ser obtido elevando-se ao quadrado $\frac{8}{9}$ do seu diâmetro. Fazer esse cálculo corresponde a substituir, na fórmula da área do círculo, o valor de π por um número racional. Esse número é igual a:

- a) $\frac{128}{9}$
- b) $\frac{256}{9}$
- c) $\frac{128}{81}$
- d) $\frac{256}{81}$

06. (Santa Casa/SP) Um lago circular de 20 m de diâmetro é circundado por um passeio, a partir das margens do lago, de 2 m de largura.

A área do passeio representa a seguinte porcentagem da área do lago:

- a) 10%
- b) 20%
- c) 32%
- d) 44%

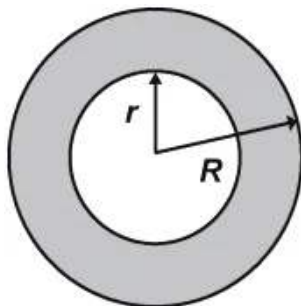
07. (IFRN - 2018) As medidas das bolas - circunferência, peso e pressão - que serão utilizadas durante os jogos da Copa do Mundo na Rússia serão conferidas 30 minutos antes de cada partida.

A bola "TELSTAR 18" possui circunferência central com o comprimento de 69,08 cm.

Usando 3,14 como aproximação para π , o valor do diâmetro dessa circunferência será:

- a) 20 cm
- b) 22 cm
- c) 14 cm
- d) 18 cm

08. (ENEM - 2016) No projeto de arborização de uma praça está prevista a construção de um canteiro circular. Esse canteiro será constituído de uma área central e de uma faixa circular ao seu redor, conforme ilustra a figura.

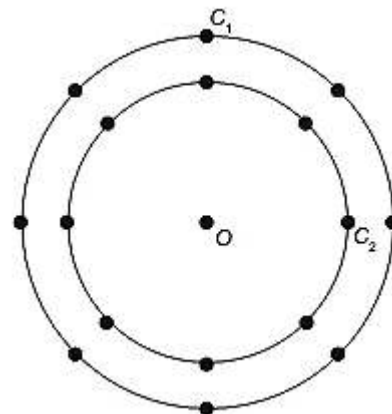


Deseja-se que a área central seja igual à área da faixa circular sombreada.

A relação entre os raios do canteiro (R) e da área central $\textcircled{R}$ deverá ser:

- a) $R = 2r$
- b) $R = r\sqrt{2}$
- c) $R = \frac{r^2+2r}{2}$
- d) $R = r^2 + 2r$
- e) $R = \frac{3}{2}r$

09. (ENEM - 2015) A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto por cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O.



Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.

Quantos metros uma criança sentada no cavalo C1 percorrerá a mais do que a criança no cavalo C2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π .

- a) 55,5

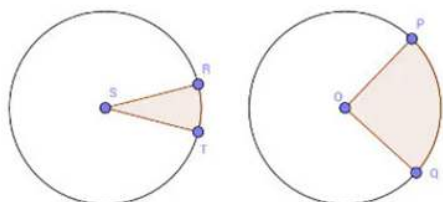
b) 60,0

c) 175,5

d) 235,5

e) 240,0

10. (FATEC - 2008/Adaptada) Na figura, o raio do círculo de centro S é três vezes o raio do círculo de centro O, e os ângulos centrais sombreados, RST e POQ, são tais que a medida de RST é a metade da medida de POQ.



Se, no círculo de centro O, a área do setor circular sombreado POQ é igual a 4, então, no círculo de centro S, a área do setor circular sombreado RST é:

a) 6

b) 12

c) 18

d) 28

GABARITO

1) E

2) D

3) A

4) A

5) D

6) D

7) B

8) B

9) B

10) C

Propriedades da Circunferência

A circunferência é uma figura muito importante para diversas áreas do conhecimento. Neste capítulo, iremos aprender alguns conceitos cruciais para resolver os problemas geométricos e explorar as propriedades fundamentais da circunferência.

Posições relativas

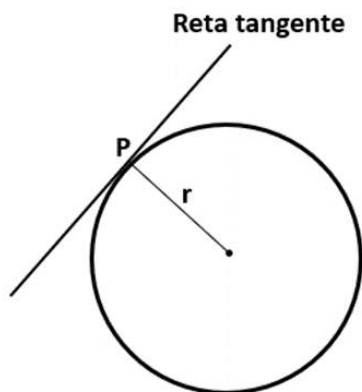
Como vimos no capítulo de Geometria Plana, estudar a posição relativa entre duas ou mais figuras geométricas consiste em analisar a posição de uma em relação à outra. No caso das circunferências, analisamos a posição relativa da circunferência em relação a uma reta e a posição entre circunferências.

Entre uma reta e uma circunferência

Temos dois casos:

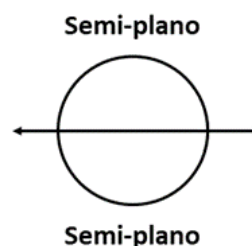
a) Reta tangente: uma reta tangente intercepta a circunferência em um único ponto P . O ponto P é chamado de ponto de tangência ou ponto de contato.

Nesse ponto a reta é perpendicular ao segmento que une o ponto de contato ao centro da circunferência.

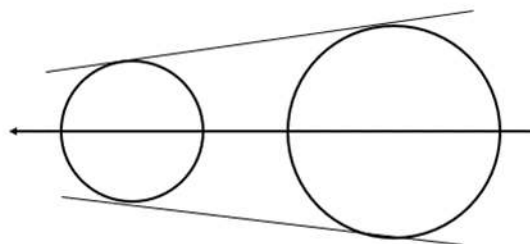


Duas circunferências podem ter uma reta tangente em comum, ou seja, a reta tangencia duas circunferências ao mesmo tempo. Nesse caso, existem duas possibilidades: retas tangentes comuns internas e externas.

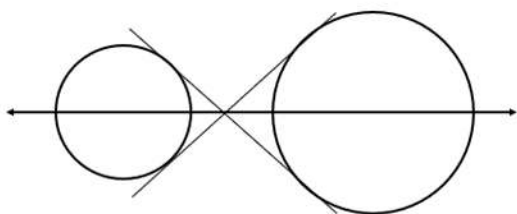
Quando traçamos uma reta ligando os centros das duas circunferências no plano, esta reta separa o plano em dois semi-planos:



Se os pontos de tangência estão no mesmo semi-plano, temos a reta tangente comum externa:



Se os pontos de tangência estão em semi-planos diferentes, a reta tangente comum é interna:



b) Reta secante: uma reta secante intercepta a circunferência em dois pontos quaisquer.



Observação: Tangentes e secantes são os nomes das retas, mas podem ser utilizadas para denotar segmentos de retas ou semirretas. Por exemplo, a tangente PQ pode representar o segmento de reta tangente à circunferência que une os pontos P e Q.

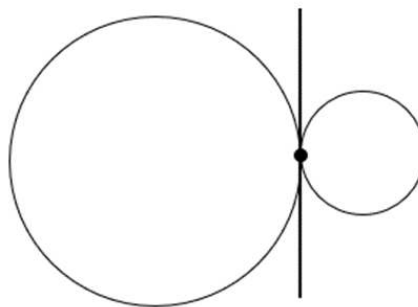
Entre duas circunferências

Duas circunferências podem ser:

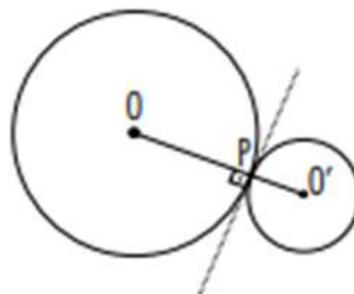
a) Disjuntas: quando não possuem pontos em comum.

b) Tangentes: quando possuem um único ponto em comum, ou seja, elas são tangentes à mesma reta no mesmo ponto de tangência.

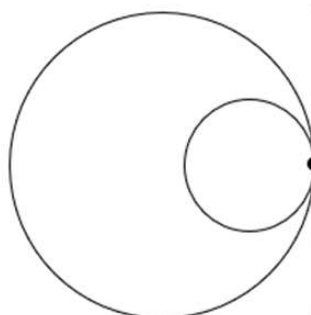
As circunferências podem ser tangentes externas uma à outra se os seus centros estão em lados opostos ao da reta tangente comum:



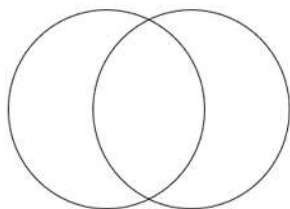
Note que, se as duas circunferências são tangentes externas, então os centros e pontos estão em uma mesma reta e esta reta é perpendicular à reta tangente e comum às duas circunferências. Assim, a distância entre os centros é a soma dos raios das duas circunferências



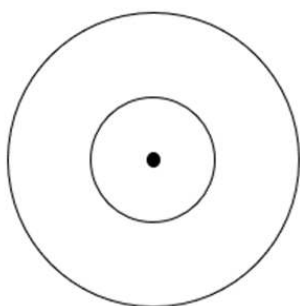
Ou as circunferências podem ser tangentes internas, se os seus centros estão do mesmo lado da reta tangente comum:



c) Secantes: quando possuem dois pontos em comum.



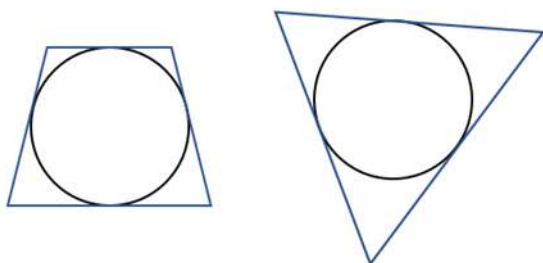
d) Concêntricas: quando possuem o mesmo centro.



Polígonos circunscritos

Um polígono é circunscrito a uma circunferência quando possui seus lados são tangentes à circunferência. Neste caso, dizemos que a circunferência está inscrita no polígono.

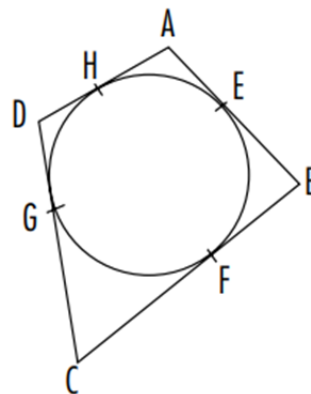
Veja as figuras a seguir:



Uma propriedade importante em relação aos quadriláteros circunscritos é que a soma de dois

lados opostos é igual a soma dos outros dois lados.

Considere um quadrilátero ABCD circunscrito em uma circunferência:

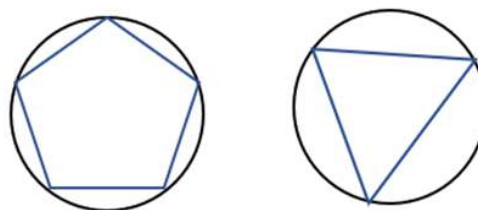


Nestas condições:

$$AB + CD = AD + BC$$

Polígonos inscritos

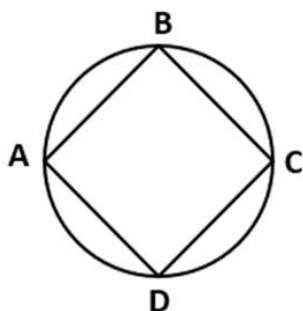
Um polígono é inscrito em uma circunferência se cada vértice do polígono é um ponto da circunferência. Nesse caso, dizemos que a circunferência é circunscrita ao polígono.



Nas figuras temos um pentágono e um triângulo inscritos na circunferência, respectivamente.

Se temos um quadrilátero inscrito em uma circunferência, então os ângulos opostos são suplementares, isso significa que a soma dos ângulos opostos é 180° e a soma de todos os quatros ângulos é 360° .

Considere a figura a seguir:



Nestas condições:

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180$$

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360$$

Ângulos inscritos

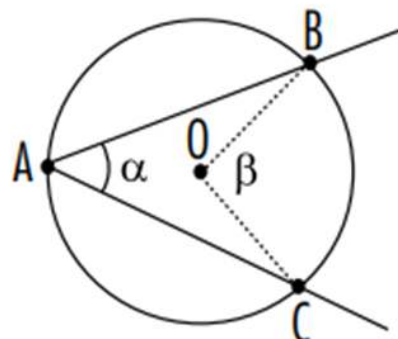
Nós vimos no capítulo anterior que em uma circunferência o ângulo pode ser formado pela abertura de dois segmentos de retas que se encontram em um ponto comum.

Além disso, os ângulos também podem ser formados entre uma reta tangente à circunferência e uma secante que a intercepta. Esses ângulos são chamados de ângulos inscrito e circunscrito, respectivamente.

Ângulo inscrito

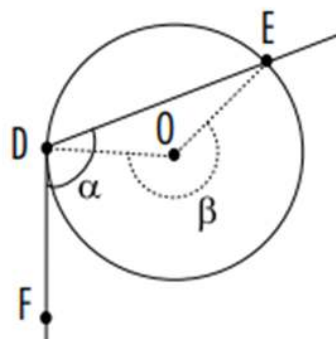
Para um ângulo inscrito em circunferências temos duas posições gerais, que dependem dos lados dos ângulos:

a) Os lados dos ângulos são duas cordas da circunferência:



Neste caso, A é o vértice do ângulo inscrito, α é o ângulo inscrito e β o ângulo central correspondente.

b) Os lados do ângulo são uma corda da circunferência e uma semi-reta tangente:



Em que D é o vértice do ângulo, α é o ângulo inscrito e β o ângulo central correspondente.

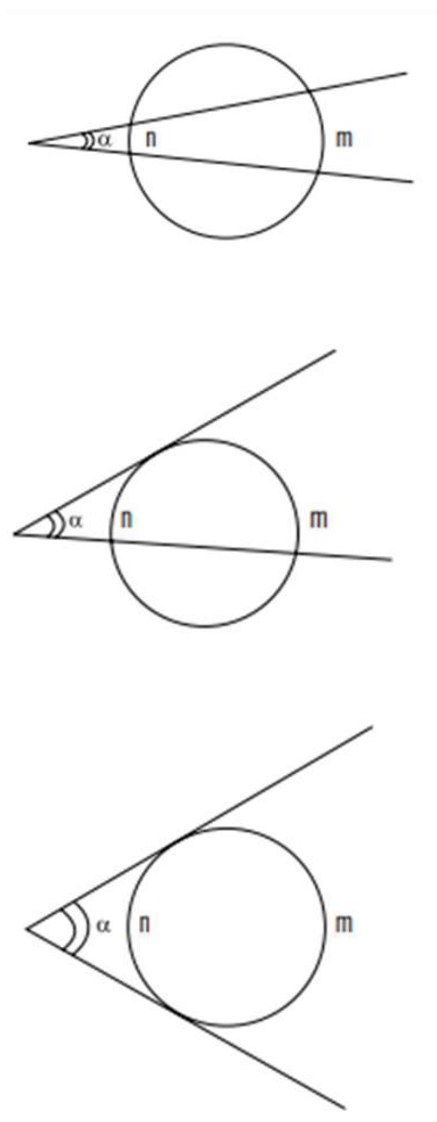
Note que para os dois casos, o vértice do ângulo é um ponto da circunferência.

Um resultado importante é que a medida do ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da respectiva medida do ângulo central. Assim:

$$\beta = 2\alpha$$

Ângulo circunscrito

Para os ângulos cujo vértice são exterior à circunferência e os lados encontram a circunferência, temos as seguintes possibilidades:



Nas figuras acima, m e n representam as medidas dos arcos da circunferência. E em qualquer um dos casos:

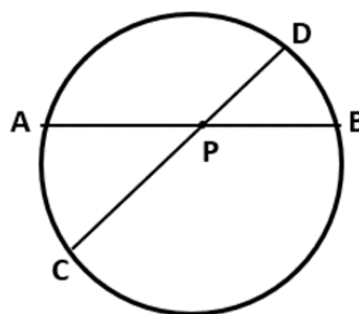
$$\alpha = \frac{m-n}{2}$$

Potência de ponto

Agora vamos ver o que chamamos de potência de ponto, que são resultados obtidos a partir da junção dos conceitos de cordas e segmentos, que podem não ser evidentes em um primeiro momento. Entretanto, são bastante úteis quando temos exercícios que envolvem descobrir o comprimento no interior da circunferência.

Potência de ponto (1): Cordas interceptando dentro da circunferência

Considere uma circunferência com duas cordas que se interceptam em um ponto P , no seu interior:



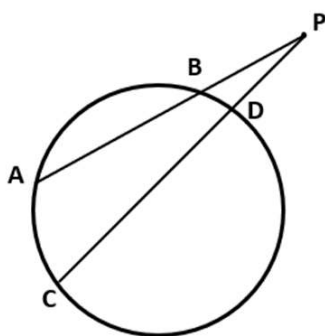
O produto das medidas das duas partes de uma corda é igual ao produto das medidas das duas partes da outra corda. Assim:

$$(PA) \cdot (PB) = (PC) \cdot (PD)$$

Portanto, a partir de um ponto fixo P no interior de uma circunferência, o produto $(PA) \cdot (PB)$ é constante para qualquer que seja a corda AB passando por este ponto P . Esse produto é denominado a potência do ponto P em relação à essa circunferência.

Potência de ponto (2): Secantes interceptando fora da circunferência

Considere duas retas secantes a uma mesma circunferência e que se interceptam em um ponto P localizado fora da circunferência:



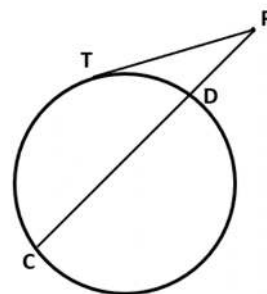
Se uma dessas retas passa pelos pontos A e B e outra reta passa pelos pontos C e D da circunferência, então:

$$(PA) \cdot (PB) = (PC) \cdot (PD)$$

Portanto, a partir de um ponto fixo P no exterior de uma circunferência, o produto $(PA) \cdot (PB)$ é constante para qualquer que seja a reta secante à circunferência passando por este ponto P. Esse produto é denominado a potência do ponto P em relação à essa circunferência.

Potência de ponto (3): Secante e tangente interceptando fora da circunferência

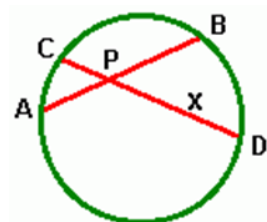
Considere que uma reta secante e uma reta tangente a uma mesma circunferência se interceptam em um ponto P fora da circunferência, e a reta secante passa pelos pontos C e D e a reta tangente passa pelo ponto T de tangência:



Neste caso:

$$(PT)^2 = (PC) \cdot (PD)$$

Exemplo. Considere a figura com as cordas AB e CD tendo intersecção no ponto P, com $(AP) = 5\text{cm}$, $(PB) = 8\text{cm}$ e $(CD) = 14\text{cm}$. Qual o valor do segmento PD, representado por x?



Solução:

Pela potência de ponto:

$$(PA) \cdot (PB) = (PC) \cdot (PD)$$

Temos que $CP = 14$, então:

$$PC = 14 - x.$$

Substituindo, temos:

$$5 \cdot 8 = (14-x) \cdot x$$

Multiplicando os termos chegamos a equação do 2º grau:

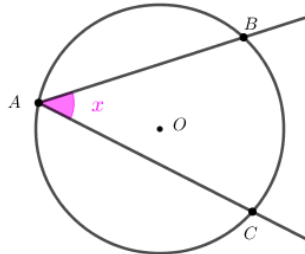
$$x^2 - 14x + 40 = 0.$$

Encontrando as raízes da equação, temos que $x = 4$ ou $x = 10$.

Isso significa que se uma das partes do segmento medir 4 a outra medirá 10. Como, $PD > PC$, $PD = 10$ e $PC = 4$.

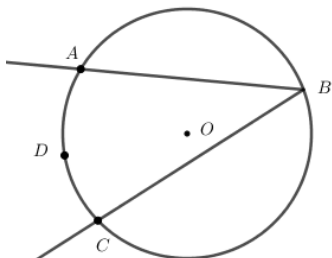
Exercícios

01. Na figura, o arco BC mede 120° . Calcule o valor de x .



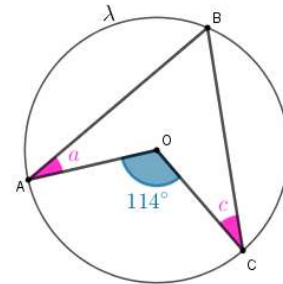
- a) 60°
- b) 30°
- c) 15°
- d) 90°

02. Na figura, o ângulo ABC mede 76° . Calcule a medida angular do arco ABC.



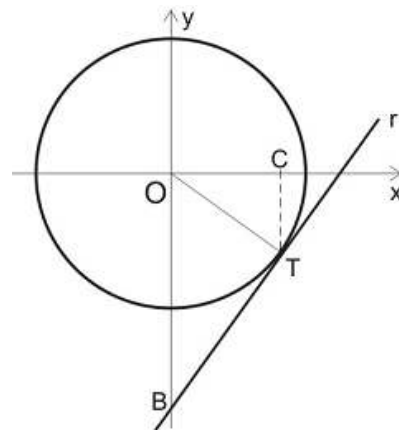
- a) 104°
- b) 208°
- c) 312°
- d) 152°

03. Na figura, A, B e C são pontos da circunferência λ de centro O e a e c são as medidas dos ângulos com vértices em A e C, respectivamente. Determine, em graus, a soma $a+c$.



- a) 77°
- b) 104°
- c) $27,5^\circ$
- d) 57°

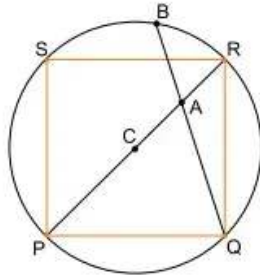
04. (EPCAR - 2017) Na figura a seguir, os eixos x e y formam o sistema cartesiano ortogonal e a circunferência tem centro em O e raio igual a 1 cm. A reta r é tangente a circunferência em T, intercepta o eixo y em B, e C é a projeção ortogonal de T sobre o eixo x .



O produto $OB \cdot CT$, em cm^2 , é igual a:

- a) 2,5
- b) 2
- c) 1,5
- d) 1

05. (FGV) O quadrado PQRS está inscrito em um círculo de centro C. A corda intercepta a diagonal do quadrado em A, sendo que QA = 6cm e AB = 4 cm.



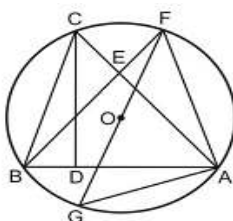
Nas condições descritas, a medida do lado do quadrado PQRS, em cm, é igual a :

- a) $2\sqrt{10}$
- b) $5\sqrt{2}$
- c) $2\sqrt{15}$
- d) $6\sqrt{2}$
- e) $7\sqrt{2}$

06. Qual é o arco correspondente a um ângulo reto inscrito em uma circunferência ?

- a) $\frac{1}{4}$ da circunferência
- b) $\frac{1}{2}$ da circunferência
- c) $\frac{1}{3}$ da circunferência
- d) $\frac{1}{6}$ da circunferência

07. (EPCAR - 2017) Considere a figura e os dados a seguir:



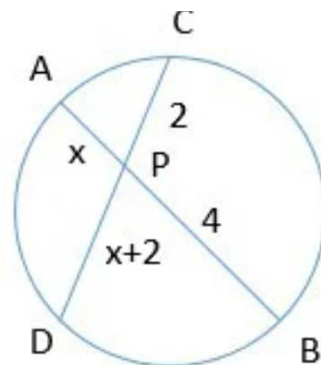
DADOS:

- O é o circuncentro do triângulo ABC
- $\text{med}(\angle ACD) = 50^\circ$
- $\angle BEC$ e $\angle BDC$ são retos
- $\overline{FG}$ é o diâmetro da circunferência de centro O

A medida do ângulo $\widehat{AFG}$, em graus, é igual a:

- a) 40
- b) 50
- c) 60
- d) 70

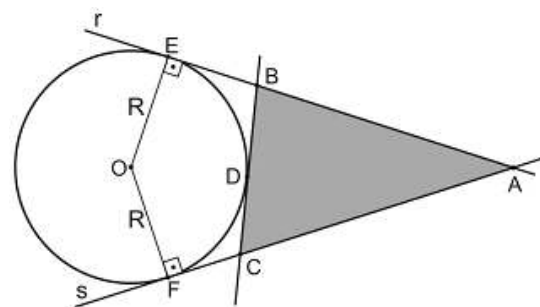
08. Calcule o valor de X na figura abaixo.



- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8

09. (EPCAR - 2016) Na figura, E e F são, respectivamente, pontos de tangência das retas r e s com a circunferência de centro O e raio R.

D é ponto de tangência de BC com a mesma circunferência e $AE = 20$ cm,



O perímetro do triângulo ABC (hachurado), em centímetros, é igual a:

a) 20

b) 10

c) 40

d) 15

10. Uma roda gigante possui um diâmetro de 40 metros e está girando a uma velocidade constante de 2 voltas por minuto. Um aluno da EPCAR observava a roda a partir de um ponto a 15 metros de distância do centro da roda. O ângulo excêntrico formado pelo aluno e as extremidades da roda é de 45° . Considere o centro da roda como o ponto O. Determine:

a) A área do segmento circular compreendido entre o ponto onde o aluno está e a roda.

b) O tamanho do arco da circunferência descrito pela roda ao percorrer 5 minutos.

c) A potência de ponto do aluno em relação à roda.

GABARITO

1) A

2) B

3) D

4) D

5) C

6) B

7) A

8) A

9) C

10) A) 314,16 m² B) 628,32 m C) 175 m

Volumes 1

Nos capítulos anteriores nós vimos figuras com apenas 2 dimensões, as figuras planas. Neste capítulo, passamos a considerar as 3 dimensões, ou seja, as figuras possuem altura, comprimento e largura. Essas figuras são chamadas de sólidos geométricos ou figuras espaciais. Um conceito muito importante no estudo dos sólidos geométricos é o volume. O volume é uma grandeza que indica a porção do espaço ocupada por um objeto qualquer. Para cada sólido geométrico temos uma fórmula específica para calcular o seu volume, como veremos no decorrer deste capítulo.

Definições

Antes de determinar as expressões para calcular o volume dos sólidos geométricos, iremos definir alguns conceitos.

Volume e capacidade

O volume de um sólido é um número real positivo associado à região do espaço limitada por ele, indicando o espaço ocupado.

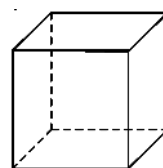
Já a capacidade de um sólido é um número real positivo associado ao que cabe dentro deste sólido.

Dessa forma, medir o volume de um objeto é determinar a quantidade de espaço que ele ocupa, enquanto medir a capacidade de um objeto é determinar a quantidade de espaço de que ele dispõe para armazenar.

De modo geral, escolhendo-se as unidades de medida adequadas, estes valores coincidem numericamente.

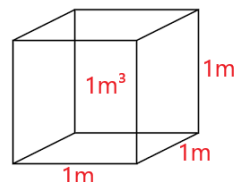
Unidades de medida de volume

Tradicionalmente, a unidade utilizada para medir volumes é um cubo de aresta unitária (u), conforme figura a seguir:



Neste cenário, u^3 é a unidade de medida equivalente à medida do volume de um cubo de aresta u .

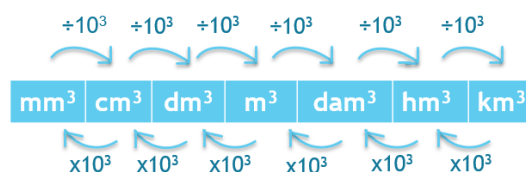
Por exemplo, define-se que um metro cúbico (1 m^3) corresponde ao volume de um sólido cúbico cuja aresta mede 1 m .



O metro cúbico (m^3) é a unidade fundamental de medida de volume.

De maneira análoga, podemos definir 1 mm^3 , 1 cm^3 , 1 dm^3 , 1 dam^3 , 1 ham^3 e 1 km^3 que são os submúltiplos e os múltiplos do metro cúbico.

A conversão entre essas unidades de medida pode ser realizada conforme ilustração a seguir:

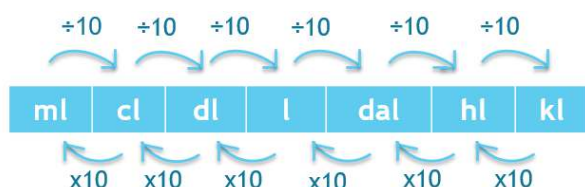


Unidades de medida de capacidade

A unidade base utilizada para medir a capacidade é o litro (L), que corresponde ao que cabe dentro de um recipiente cúbico cuja aresta mede 1 dm.

Portanto, um recipiente cujo volume é 1 dm^3 possuirá capacidade para armazenar 1 L. Isto é, 1 L equivale a 1 dm^3 .

Também existem múltiplos e submúltiplos para o litro, cuja conversão pode ser realizada conforme ilustração a seguir:



Atenção:

Além do fato de que 1 L é o equivalente a 1 dm^3 , existem outras relações importantes entre as unidades de volume e de capacidade. Entre elas, destacam-se:

- $1 \text{ dm}^3 \equiv 1 \text{ L}$.
- $1 \text{ m}^3 \equiv 1000 \text{ L}$.
- $1 \text{ cm}^3 \equiv 1 \text{ mL}$.

Observação: O litro não consta como representação padrão no Sistema Internacional de Unidades. Todavia, conforme prevê o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO), deve ser dada preferência a representação com o L maiúsculo. O símbolo ℓ não é aprovado por órgãos internacionais e a letra “l” minúscula pode ser confundida com o algarismo 1 ou com a letra “i” maiúscula.

Volume do Paralelepípedo

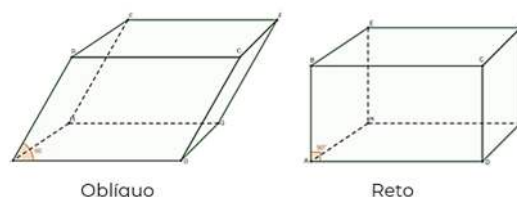
Paralelepípedo é um sólido espacial que possui 6 faces, opostas, duas a duas, na forma de paralelogramos.

Segundo a perpendicularidade de suas arestas em relação à base, os paralelepípedos são classificados em:

a) Paralelepípedos oblíquos: as arestas laterais são oblíquas em relação à base.

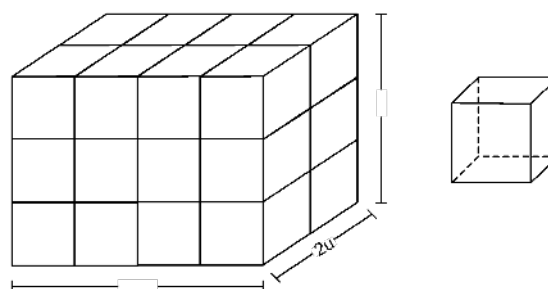
b) Paralelepípedo reto retângulo: as arestas laterais são perpendiculares à base, ou seja, apresentam ângulos retos entre cada uma das faces.

Veja:



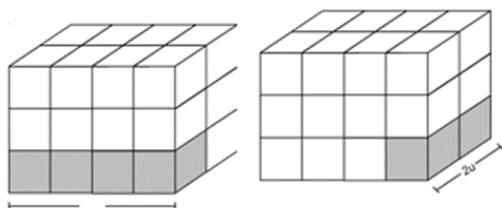
Os paralelepípedos reto retângulos podem ser decompostos em vários cubos idênticos entre si, o que permite que se calcule seus volumes.

Por exemplo, adotando u^3 como unidade para medir o paralelogramo reto da figura abaixo, pode-se decompor ele em cubos com 1 u de aresta.



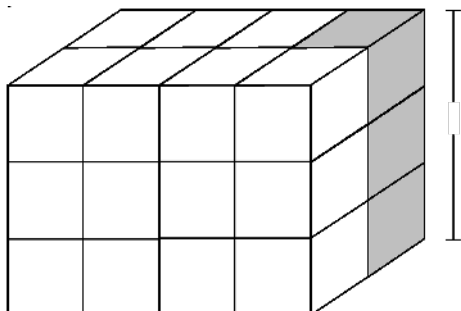
O volume ocupado por este paralelepípedo é igual à soma dos volumes de todos os cubos. Assim, para obter seu volume basta verificar quantos cubos formam esse paralelepípedo.

Inicialmente, pode-se verificar quantos cubos há na camada inferior do paralelepípedo, onde existem duas fileiras de 4 cubos:



Assim, o total de cubos na camada inferior é $4 \cdot 2 = 8$ cubos.

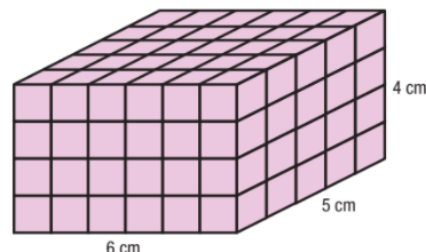
A seguir, para encontrar o total de cubos, basta multiplicar esse resultado por 3, que é o número de camadas iguais à camada inferior:



Logo, o paralelepípedo é formado por $8 \cdot 3 = 24$ cubos com volume de 1 u^3 , ou seja, o volume do paralelepípedo é 24 u^3 .

Portanto, para obter a quantidade de cubos que formam um paralelepípedo reto retângulo, basta multiplicar o número de cubos de cada camada pelo número de camadas.

Exemplo 01. Qual é o volume do paralelepípedo reto da figura a seguir?



Resolução:

Veja que o paralelepípedo em questão está decomposto em vários cubos menores, com 1 cm de aresta cada. Assim sendo, seu volume (V), que é o total de cubos, será dado por:

$$V = 6 \cdot 5 \cdot 4 \rightarrow \begin{array}{l} \text{Número de} \\ \text{camada.} \end{array}$$

Número de cubos em cada camada.

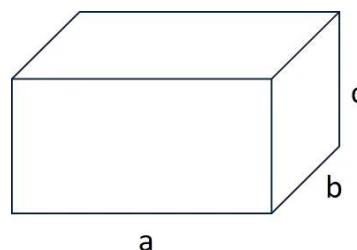
$$V = 120 \text{ cubos}$$

Portanto, o paralelepípedo é formado por 120 cubos, cada um com o volume de 1 cm^3 . Logo, o volume do paralelepípedo é:

$$V = 120 \text{ cm}^3.$$

De um modo geral, para calcular o volume de um paralelepípedo reto, basta multiplicar suas três dimensões: comprimento, largura e altura.

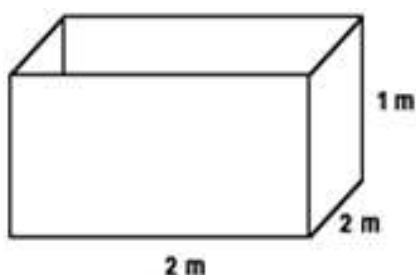
Considere a figura abaixo:



Sendo V o volume de um paralelepípedo e denotando o comprimento por a , a largura por b e a altura por c , tem-se que:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Exemplo 02. Qual é o volume e a capacidade de uma caixa d'água no formato de um paralelepípedo reto retângulo com 2 m de comprimento, 2 m de largura e 1 m de profundidade?



Resolução:

Primeiro vamos calcular o volume da caixa d'água:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 2m \cdot 2m \cdot 1m$$

$$V = 4m^3$$

Agora, vamos determinar a capacidade da caixa d'água:

Sabendo que $1m^3$ é o equivalente a 1 000 L, então $4m^3$ será equivalente a 4 000 L.

Logo, o volume da caixa d'água é $4m^3$ e sua capacidade é 4 000 L.

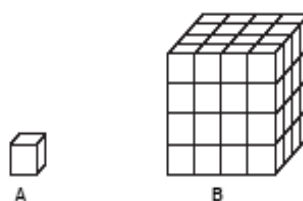
Considerando, ainda, a área da base de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a , b e c como sendo $A_b = a \cdot b$, tem-se que o volume do mesmo pode ser expresso por:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = A_b \cdot c$$

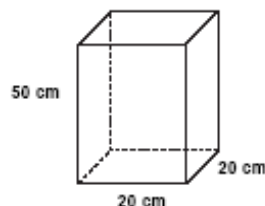
Isto é, o volume de um paralelepípedo reto retângulo é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

Exercícios Propostos

01. De quantos cubinhos iguais a A precisamos para montar um cubo igual a B?

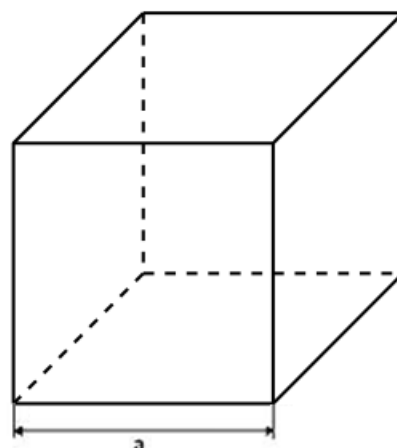


02. Quantos litros de óleo cabem no galão abaixo?



Volume do Cubo

Um cubo é um paralelepípedo reto retângulo em que as três dimensões possuem o mesmo tamanho, ou seja, $a = b = c$. Veja:



Desse modo, o volume de um cubo cujas arestas têm medida **a** é dado por

$$A_{cubo} = a \cdot a \cdot a$$

$$A_{cubo} = a^3$$

Exemplo 03. Qual é o volume e a capacidade de um cubo cuja aresta mede 5 cm?

Resolução:

O volume do cubo é:

$$V_{cubo} = 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}$$

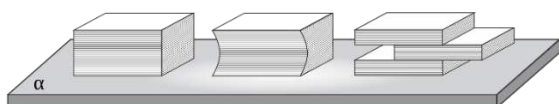
$$V_{cubo} = 125 \text{ cm}^3$$

Sabendo que 1 cm³ é o equivalente a 1 mL, 125 cm³ será equivalente a 125 mL.

Logo, o volume do cubo é 125 cm³ e a sua capacidade é 125 mL.

O Princípio de Cavalieri

Considere três pilhas com o mesmo número de folhas de papel, de mesmas dimensões, empilhadas de formas diferentes sobre uma mesa, conforme figura a seguir:



Note que:

I. Qualquer plano paralelo ao tampo da mesa (plano α) que secciona as três pilhas determina superfícies de áreas iguais (uma folha).

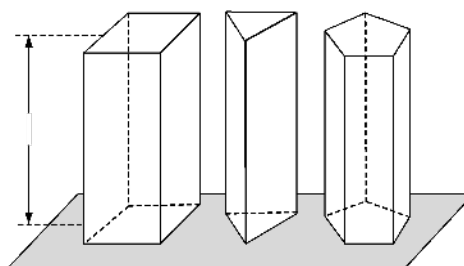
II. As três pilhas de papel possuem volumes iguais, pois são formadas pela mesma quantidade de folhas.

Esse exemplo prático caracteriza, intuitivamente, o que formalmente se define como Princípio de Cavalieri.

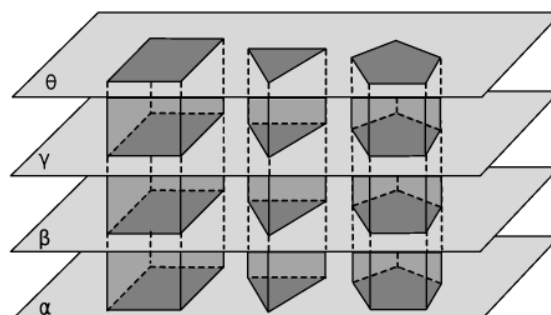
O princípio de Cavalieri diz:

“Se dois ou mais sólidos de alturas iguais estão apoiados sobre um plano α , de forma que todo plano paralelo a α determine nesses sólidos superfícies de áreas iguais, então, esses sólidos têm o mesmo volume.”

Por exemplo, os sólidos da figura a seguir possuem volumes iguais:



Isso ocorre devido ao Princípio de Cavalieri, conforme pode-se observar na figura a seguir:

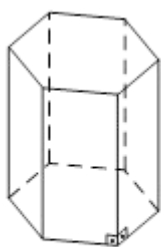


Volume do Prisma

Na Matemática, define-se Prisma como o sólido formado por duas faces opostas entre si na forma de polígonos congruentes, chamadas de bases do prisma, que são conectadas por faces laterais na forma de paralelogramos.

Um exemplo de prisma é o paralelepípedo, que são prismas de bases quadrangulares, conhecidos como prismas quadrangulares.

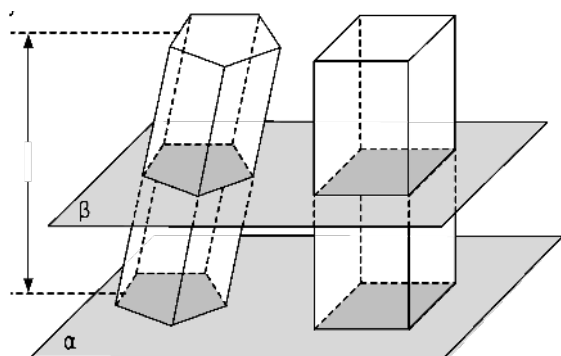
De um modo geral, os prismas são classificados de acordo com o número de lados dos polígonos das bases. Por exemplo, na figura a seguir tem-se um prisma hexagonal:



Prisma hexagonal

O Princípio de Cavalieri permite calcular o volume do prisma a partir do volume do paralelepípedo reto retângulo.

Considere um prisma pentagonal e um paralelepípedo reto retângulo com mesma altura (h) e mesma área da base (A_b), conforme figura a seguir:



Existe um plano horizontal α que contém as bases desses dois sólidos, e qualquer plano paralelo a α que secciona os dois sólidos determina superfícies de áreas iguais.

Então, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos possuem volumes iguais, o que permite concluir que o volume

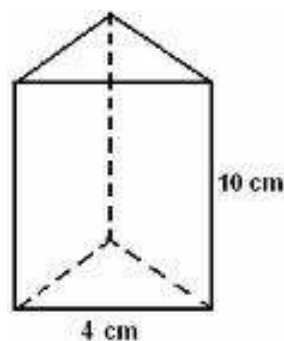
de um prisma qualquer (V_{prisma}) pode ser determinado pela mesma fórmula do volume do paralelepípedo reto retângulo. Assim:

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h$$

Exercícios Propostos

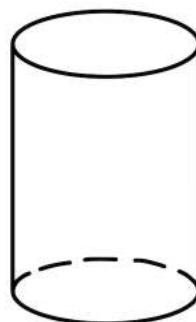
03. Qual é o volume de um objeto com duas bases paralelas de mesma área medindo 20 cm^2 , cuja altura mede 15 cm ?

04. Calcule o volume do prisma abaixo, sabendo que a sua altura mede 10 cm e que sua base é um triângulo equilátero de lado 4 cm .

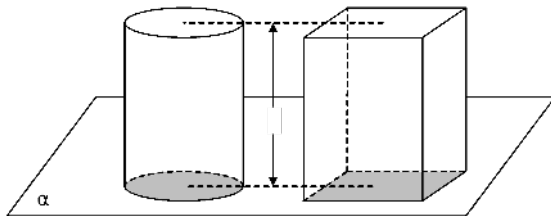


Volume do Cilindro

O cilindro é uma das figuras mais utilizadas no dia-a-dia, por exemplo, o copo, a panela, lata de tinta etc. O cilindro é o sólido formado por duas faces opostas no formato de círculos idênticos.



Para determinar o volume deste tipo de figura, pode-se considerar um cilindro e um prisma com mesma altura (h) e bases de mesma área (A_b) contidas num plano α , conforme figura a seguir:



Pelo Princípio de Cavalieri, tem-se que o volume do cilindro (V_{cilindro}) será determinado pela mesma fórmula do volume do prisma qualquer. Isto é:

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h.$$

Como o cilindro sempre possui círculos em suas bases, pode-se utilizar a fórmula da área do círculo:

$$A_{\text{base}} = \pi \cdot r^2$$

Sendo r o raio da base do cilindro. Assim:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Exercícios Propostos

05. Qual é o volume de um bolo com formato de um cilindro cuja altura mede 5 cm e cujo diâmetro da base vale 60 cm?

06. Quantos litros cabem em um galão cilindro com 20 cm de diâmetro e 60 cm de altura?

Exercícios

01. (ETEC - 2007) Considere o formato do ENIAC um bloco retangular de volume igual a

396 m^3 . Sabendo que o ENIAC tinha 5,5 metros de altura e 30 metros de comprimento, a medida de sua largura, em metros, é igual a

- a) 2,4.
- b) 2,8.
- c) 3,0.
- d) 3,3.
- e) 4,0.

02. (EMBRAER - 2008) Flávia possui um jogo com 216 cubos iguais, com as dimensões mostradas na Figura I, que ficam guardados em uma caixa (Figura II), também cúbica, preenchendo-a totalmente.



Figura I

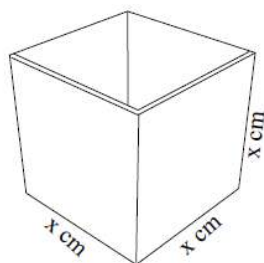


Figura II

A medida **x** da caixa é igual a:

- a) 0,65 m.
- b) 0,50 m.
- c) 0,45 m.
- d) 0,40 m.
- e) 0,30 m.

03. (EPCAR - 2011) Um reservatório d'água na forma de um paralelepípedo reto de base quadrada e cuja altura é metade do lado da base, está com 80% de sua capacidade máxima ocupada. Se fosse preciso acabar de encher esse reservatório seriam necessários 500 baldes iguais cheios d'água com capacidade de 12800 ml cada.

Com base nesses dados, é correto afirmar que a altura da água que há neste reservatório:

- a) é exatamente 15 dm.
- b) é exatamente 1600 mm.
- c) não passa de 145 cm.
- d) está a 0,5 m de atingir o seu máximo.

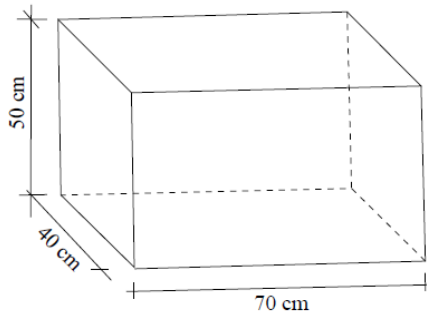
04. Um baú em forma de paralelepípedo reto retângulo pesa 20 kg e tem como medidas externas 50 cm de altura e 3 dm por 400 mm de base.

O baú contém uma substância homogênea que pesa 1,5 kg por litro e que ocupa o espaço correspondente a 90% do volume de um paralelepípedo reto retângulo de espessura desprezível e que possui as dimensões externas do baú.

Se o peso total do baú e da substância, em kg, é igual a **x**, então, pode-se dizer que **x** é um número natural

- a) par menor que 100.
- b) ímpar menor que 100.
- c) primo.
- d) divisível por 7 e maior que 100.

06. (EMBRAER - 2008) Um recipiente, com a forma de um prisma reto retângulo, cujas dimensões estão mostradas na figura, contém 60 litros de água.



Para que esse recipiente fique totalmente cheio, será necessário colocar, de água, mais:

Dado: $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litro}$

- a) 220 litros.
- b) 180 litros.
- c) 140 litros.
- d) 100 litros.
- e) 80 litros.

07. (EMBRAER - 2007) Para fazer refresco a merendeira de uma escola utilizou um recipiente com a forma de um paralelepípedo reto retângulo, com medidas internas iguais a 30 cm, 40 cm e 60 cm, que estava completamente vazio. Ela colocou nesse recipiente uma quantidade de água igual à metade da sua capacidade total, e em seguida colocou 5 litros de suco concentrado. A quantidade total de refresco preparado pela merendeira foi:

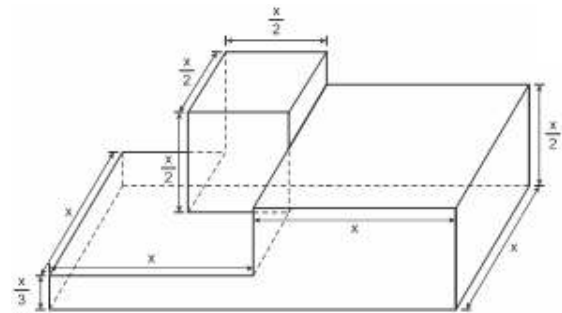
- a) 36 litros.
- b) 41 litros.
- c) 48 litros.

d) 49 litros.

e) 51 litros.

08. (EPCAR - 2021) Na EPCAR, durante o ano letivo, os alunos das três séries se enfrentam em uma competição esportiva denominada “Troféu Tenente Lima Mendes”.

Para o ano de 2021, o comandante ordenou que fosse construído um novo pódio no qual a posição mais alta tenha forma de um cubo e as posições inferiores tenham forma de paralelepípedos retos retângulos conforme figura abaixo, com dimensões indicadas numa mesma unidade de medida.

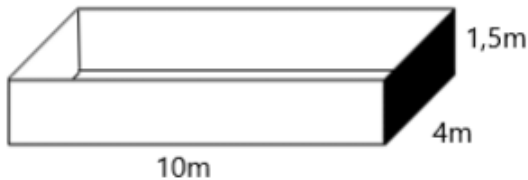


Depois de construído em sua totalidade, o pódio deverá ser pintado, com exceção da parte inferior que estará apoiada no solo.

A expressão que melhor representa a área a ser pintada, em função de x , em unidade de área, é:

- a) $\frac{35x^2}{6}$
- b) $\frac{67x^2}{12}$
- c) $\frac{11x^2}{2}$
- d) $\frac{23x^2}{2}$

09. (CMRJ - 2018) Uma piscina na forma de um bloco retangular tem suas dimensões representadas na figura abaixo. Após uma limpeza, a piscina encontra-se totalmente vazia.

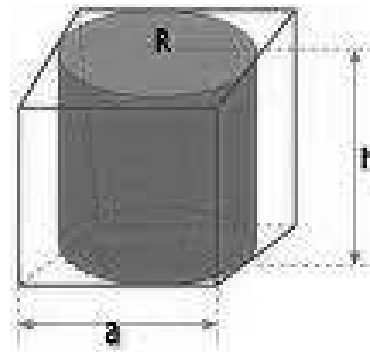


Considere que uma bomba jogue água dentro da piscina a uma vazão constante, isto é, o volume de água bombeado por minuto dentro da piscina é sempre o mesmo. Se em 10 minutos forem bombeados 250 litros d'água para dentro da piscina, determine o tempo necessário, em horas, para que a piscina atinja 25% de sua capacidade total.

- a) 8 horas
- b) 9 horas
- c) 10 horas
- d) 12 horas
- e) 15 horas

10. Seja um cilindro de raio

$R = 2$ cm e altura $h = 6$ cm inscrito num paralelepípedo de base quadrada de mesma altura e aresta da base a . Observando que a circunferência e o quadrado possuem o mesmo centro, calcule o volume interno ao paralelepípedo e externo ao cilindro.



GABARITO

1) A

2) E

3) B

4) C

5) C

6) E

7) B

8) C

9) C

10) $(96 - 24\pi) \text{ cm}^3$

Volumes 11

No último capítulo, foram abordados os primeiros conceitos associados ao cálculo de volumes e capacidades. Além disso, foram apresentadas as fórmulas para calcular o volume de alguns dos principais sólidos geométricos. Todavia, existem outros sólidos geométricos importantes, os quais veremos neste capítulo.

Volume da Pirâmide

Desde a antiguidade até os tempos modernos, as pirâmides são figuras geométricas frequentemente encontradas em projetos arquitetônicos, conforme pode-se observar nas imagens a seguir:

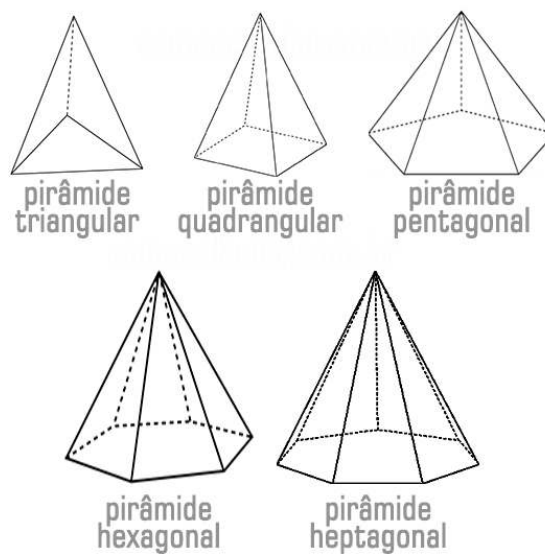


Pirâmide de Quéops (Egito)



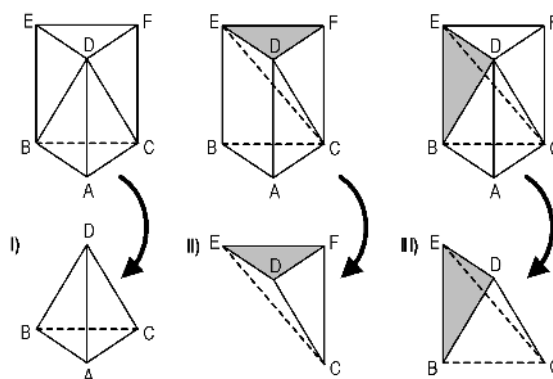
Pirâmide do Louvre (França)

A pirâmide é um poliedro com base poligonal e faces laterais triangulares. O número de faces depende do número de lados do polígono da base, como pode ser visto na figura a seguir:



O procedimento para determinar a fórmula do volume de uma pirâmide consiste em decompor um prisma em pirâmides de mesmo volume.

A figura a seguir ilustra esse processo para um prisma triangular, decomposto em três pirâmides, veja:



As três pirâmides triangulares que surgiram possuem a mesma área da base e a mesma altura do prisma

triangular original, sendo idênticas entre si.

Assim, sendo V_I , V_{II} e V_{III} os volumes das três pirâmides e V_{prisma} o volume do prisma, tem-se:

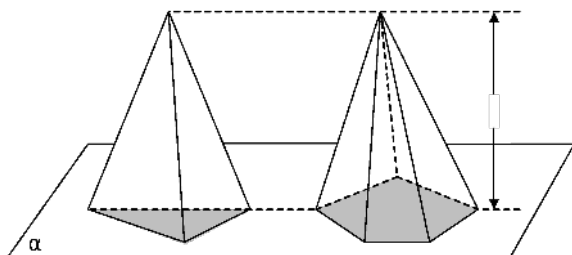
$$V_I = V_{II} = V_{III} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$$

Portanto, o volume de uma pirâmide triangular é sempre um terço do volume de um prisma com mesma área da base (A_b) e mesma altura (h).

No capítulo anterior, deduzimos a equação do volume, então:

$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Assim, podemos deduzir o volume para uma pirâmide qualquer, basta tomar uma pirâmide triangular e uma pirâmide qualquer que possuem mesma altura (h) e áreas das bases de medidas iguais (A_b), apoiadas em um plano α conforme a figura a seguir;

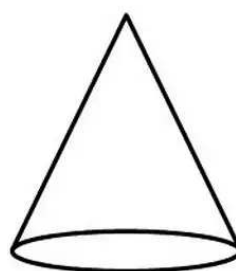


Pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm volumes iguais, então o volume de uma pirâmide qualquer ($V_{\text{pirâmide}}$) é dado pela mesma fórmula encontrada para o volume da pirâmide triangular. Logo:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

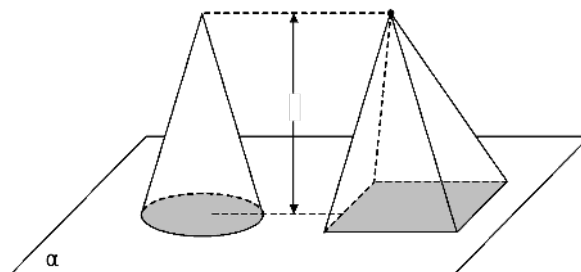
Volume do Cone Circular

Outro sólido geométrico muito importante é o cone circular, que é formado por uma base circular e um ponto externo, chamado de vértice, que se conecta a todos os pontos desta base. O cone pode ser considerado uma pirâmide de base circular.



Algumas figuras do dia a dia transmitem a ideia de cones circulares, como chapéus de aniversário e casquinhas de sorvete.

Para a determinação do volume de um cone circular reto, considera-se um cone circular e uma pirâmide de mesma altura (h) e bases de mesma área (A_b) contidas num plano α , de acordo com a figura a seguir.



Pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm o mesmo volume. Assim sendo, o volume do cone circular (V_{cone}) pode ser determinado pela mesma fórmula anteriormente

deduzida para o volume da pirâmide. Isto é:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

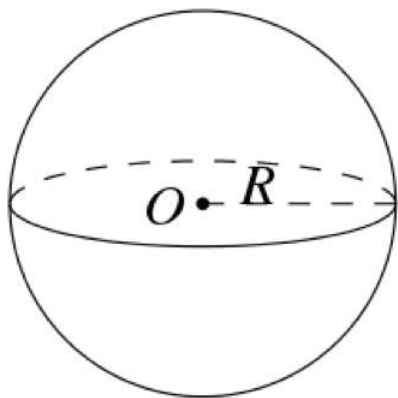
Como o cone circular sempre possui um círculo na sua base, pode-se utilizar a fórmula da área do círculo para determinar que $A_b = \pi \cdot r^2$, sendo r o raio da base do cone. Assim:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Volume da Esfera

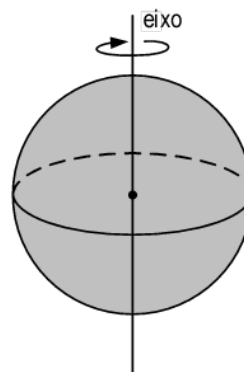
A esfera é definida como sendo o sólido geométrico formado pelos pontos do espaço cujas distâncias a um ponto fixo **O** são iguais a um valor fixo **R**.

O ponto **O** é chamado de centro da esfera, enquanto **R** é o raio da mesma.



Diversas figuras, do dia a dia, transmitem a ideia de esferas, é o caso da bola de futebol e do globo terrestre.

Observação: Podemos dizer que a esfera é o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o seu diâmetro.



O volume de uma esfera (V_{esfera}) pode ser determinado de acordo com o seu raio **r** através da fórmula a seguir:

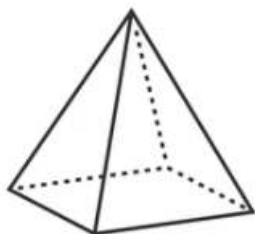
$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Observação: Em algumas situações, pode ser necessário determinar também a medida da área superficial de uma esfera. Este valor pode ser encontrado por meio da equação:

$$A_{esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Exercícios

01. A figura a seguir mostra uma pirâmide de base quadrada.

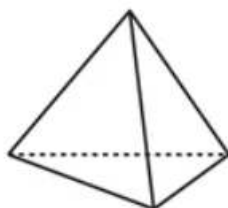


Se o lado da base dessa pirâmide mede 5 cm e a mesma possui 9 cm de altura, quanto vale seu volume?

02. Um chapéu de aniversário possui o formato de um cone circular, cujo raio da base mede 5 cm e a altura é 6 cm. Quanto vale o volume deste chapéu?

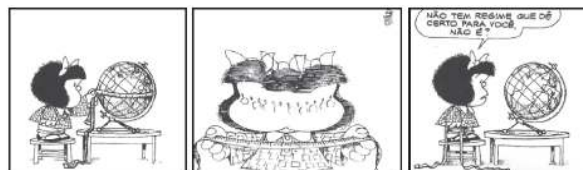
03. O raio de uma bola de futebol oficial é aproximadamente 12 cm. Considerando $\pi \approx 3$ quanto vale, aproximadamente, o volume de uma bola de futebol oficial?

04. O tetraedro regular é uma pirâmide triangular em que todas as arestas possuem mesma medida, conforme figura a seguir.



Se a aresta do tetraedro da figura medir 12 dm, quanto valerá o seu volume?

05. (UNIFOR-CE) Leia com atenção a tirinha em quadrinhos abaixo:



(QUINO, Toda Mafalda.

São Paulo: Martins Fontes, 2008, p. 194)

Suponha que Mafalda esteja estudando o Globo Terrestre a partir de um protótipo. O comprimento do equador desse globo terrestre tem medida igual a 60cm. O volume do Globo Terrestre que Mafalda está estudando é:

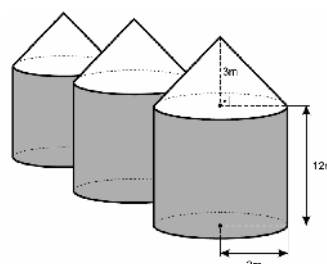
a) $\frac{1800}{\pi}$

b) $\frac{1800}{\pi^2}$

c) $\frac{3600}{\pi}$

d) $\frac{36000}{\pi^2}$

06. (ENEM - 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposta por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6.

b) 16.

c) 17.

d) 18.

e) 21.

07. (ETEC - 2006) Marcelo estava lendo um texto sobre a vida e obra de Santos Dumont e questionou: Será que é possível o número que expressa o volume do balão ser igual ao número que expressa a área de sua superfície?

Para tirar a dúvida, ele foi pesquisar e descobriu que numa esfera de raio R , o volume é dado por $V = (4\pi R^3)/3$ e a área da superfície é dada por $A = 4\pi R^2$.

Logo, concluiu que estes números:

a) nunca poderiam ser iguais.

b) seriam iguais para um único valor do raio.

c) seriam iguais para dois valores distintos do raio.

d) seriam iguais para três valores distintos do raio.

e) seriam iguais para mais de três valores distintos do raio.

08. (UNICHRISTUS-CE) A base de uma pirâmide é um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm. Se a altura da pirâmide é igual à altura da base, o volume, em cm^3 , é:

a) 60

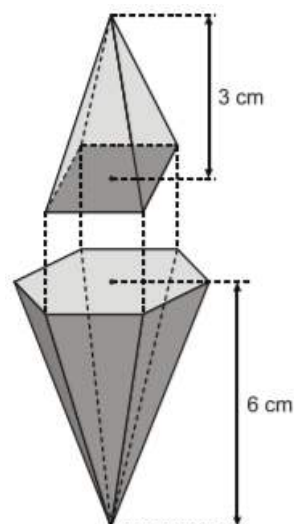
b) 56

c) 70

d) 64

e) 74

09. (AFA - 2012) Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura 6 cm foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura 3 cm, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura.



Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}$ cm, então, o volume do sólido obtido, em cm^3 , é igual a:

a) $15\sqrt{3}$.

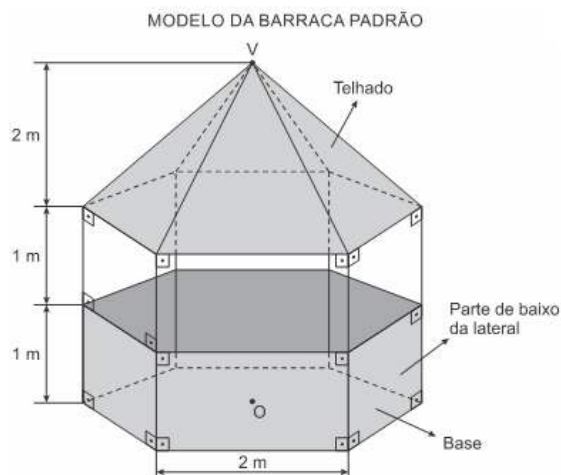
b) $20\sqrt{3}$.

c) $25\sqrt{3}$.

d) $30\sqrt{3}$.

10. (EPCAR - 2018) Com a intenção de padronizar as barracas dos vendedores ambulantes, a prefeitura da cidade de Eulerópolis solicitou a uma empresa especializada no ramo que fizesse um orçamento do material a ser empregado e do custo para finalização das barracas.

Segue um esboço do que foi apresentado pela empresa:



O ponto O é a projeção ortogonal do ponto V sobre a base hexagonal regular da barraca. Considere:

$$\sqrt{7} = 2,6 \text{ e } \sqrt{2} = 1,4.$$

No modelo apresentado, a parte hachurada indica onde existe tecido, ou seja, no telhado e na parte de baixo da lateral, ao custo de R\$ 2,00 o metro quadrado.

Além disso, em cada aresta está uma barra de alumínio ao custo de R\$ 4,00 o metro linear.

Se a empresa cobra uma taxa de mão de obra equivalente a 30% do custo de todo o material gasto, então é correto afirmar que o custo total de uma barraca padrão, em reais, é um número compreendido entre:

- a) 390 e 400
- b) 401 e 410
- c) 411 e 420
- d) 421 e 430

GABARITO

- 1) 75 cm^3
- 2) $50\pi \text{ cm}^3$
- 3) $6\,912 \text{ cm}^3$
- 4) $144\sqrt{2} \text{ dm}^3$
- 5) D
- 6) D
- 7) B
- 8) D
- 9) B
- 10) B

Produtos Notáveis e Fatoração

Os produtos notáveis são expressões que possuem uma forma geral, utilizadas para facilitar o desenvolvimento de expressões algébricas, como nas equações de primeiro e de segundo grau, e para simplificar problemas envolvendo multiplicação de polinômios. Já o processo de fatoração envolve a decomposição de uma expressão em diferentes fatores multiplicativos, ou seja, fatorar uma expressão significa escrevê-la como um produto de fatores de grau menor que o original. A fatoração e os produtos notáveis possuem uma relação muito próxima e é o que veremos neste capítulo: as características de cada um e a relação entre eles.

Produtos Notáveis

Os produtos notáveis são polinômios que possuem uma forma geral e são divididos em cinco principais:

- I) Quadrado da soma.
- II) Quadrado da diferença.
- III) Produto da soma pela diferença.
- IV) Cubo da soma.
- V) Cubo da diferença.

E cada um desses produtos notáveis possui um método de resolução.

Então, estudar os produtos notáveis significa encontrar um método para resolver, de forma mais rápida, cada um deles.

Agora, veremos com detalhes cada um desses produtos notáveis.

Quadrado da soma

Como o próprio nome sugere, no quadrado da soma estamos elevando uma soma de dois termos ao quadrado.

Veja os exemplos abaixo:

Exemplo 01. $(x + y)^2$

Exemplo 02. $(2x + 3y)^2$

Exemplo 03. $(x + 2)^2$

Elevar a soma de dois termos ao quadrado, nada mais é do que multiplicá-lo por ele mesmo. Veja:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

Podemos resolver essas expressões, aplicando a propriedade distributiva:

$$(a + b)^2 = a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Entretanto, para que não precisemos repetir esses processos todas as vezes, basta lembrar que ele é um produto notável, ou seja, ele possui uma forma geral e prática de resolver.

Assim, sendo a o primeiro termo e b o segundo termo, para resolver o quadrado da soma, basta lembrar que:

- o quadrado do primeiro termo (a^2);
- mais duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo ($+ 2ab$);
- mais o quadrado do segundo termo (b^2).

Então:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplo 04. Calcule $(x + 3)^2$.

Primeiro vamos identificar os termos:

Primeiro termo: x

Segundo termo: 3

Então, podemos escrever:

- o quadrado do primeiro termo: x^2 ;
- mais duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo: $+ 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$;
- mais o quadrado do segundo termo: $3^2 = 9$.

Portanto,

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Quadrado da diferença

O método para resolver o quadrado da diferença é similar ao quadrado da soma. Porém, ao invés da soma, temos uma diferença entre os dois termos ao quadrado.

Veja os exemplos abaixo:

Exemplo 05. $(x - y)^2$

Exemplo 06. $(5x - 3y)^2$

Assim como no quadrado da soma, temos que multiplicar a diferença dos dois termos por ele mesmo. Veja:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$$

Podemos resolver essas expressões, aplicando a propriedade distributiva:

$$(a - b)^2 = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Assim chegamos ao produto notável do quadrado da diferença. Note que, em relação ao quadrado da soma, o que muda é apenas o sinal do segundo termo.

Sendo a o primeiro termo e b o segundo termo, para resolver o quadrado da diferença, basta lembrar que:

- o quadrado do primeiro termo (a^2);
- menos duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo ($- 2ab$);
- mais o quadrado do segundo termo (b^2).

Então:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplo 07. Calcule $(y - 4)^2$.

Primeiro vamos identificar os termos:

Primeiro termo: y

Segundo termo: 4

Então, podemos escrever:

- o quadrado do primeiro termo: y^2 ;
- menos duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo: $- 2 \cdot y \cdot 4 = - 8y$;
- mais o quadrado do segundo termo: $4^2 = 16$.

Portanto,

$$(y - 4)^2 = y^2 - 8y + 16$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

Outro caso de produto notável bem comum é produto da soma com a diferença de dois termos:

$$(a + b) \cdot (a - b)$$

Para resolver, vamos utilizar a propriedade distributiva:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

Assim, chegamos ao produto notável do produto da soma pela diferença:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Sendo a o primeiro termo e b o segundo termo, para resolver basta lembrar que:

- o quadrado do primeiro termo (a^2);
- menos o quadrado do segundo termo ($- b^2$).

Exemplo 08. Calcule $(x + 5)(x - 5)$.

Primeiro vamos identificar os termos:

Primeiro termo: x

Segundo termo: 5

Então, podemos escrever:

- o quadrado do primeiro termo: x^2 ;
- menos o quadrado do segundo termo: $- 5^2 = - 25$.

Portanto,

$$(x + 5) \cdot (x - 5) = x^2 - 25$$

Cubo da soma

No cubo da soma estamos elevando uma soma de dois termos ao cubo:

$$(a + b)^3$$

Para resolver, basta multiplicar a soma dos dois termos por ela mesma três vezes:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$$

Se fazermos as substituições e manipulações necessárias, chegamos a:

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Sendo a o primeiro termo e b o segundo termo, para resolver basta lembrar que:

- o cubo do primeiro termo (a^3);
- mais três vezes o quadrado do primeiro termo vezes o segundo termo ($+ 3a^2b$);
- mais três vezes o primeiro termo vezes o quadrado do segundo termo ($+ 3ab^2$);
- o cubo do segundo termo (b^3);

Exemplo 09. Calcule $(x + 2)^3$.

Primeiro vamos identificar os termos:

Primeiro termo: x

Segundo termo: 2

Então, podemos escrever:

- o cubo do primeiro termo: x^3 ;
- mais três vezes o quadrado do primeiro termo vezes o segundo termo: $+ 3x^2 \cdot 2 = + 6x^2$;
- mais três vezes o primeiro termo vezes o quadrado do segundo termo ($+ 3x \cdot 2^2 = 3x \cdot 4 = 12x$);
- mais o cubo do segundo termo ($+ 2^3 = + 8$).

Portanto,

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Note que esse caso é um pouco mais complexo do que o quadrado da soma e, quanto maior for o expoente, mais difícil será para resolver.

Cubo da diferença

O cubo da diferença é similar ao cubo da soma, a diferença está no sinal dos termos:

$$(a - b)^3$$

Para resolver utilizamos o mesmo procedimento utilizado no cubo da soma, e chegamos a:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Sendo a o primeiro termo e b o segundo termo, para resolver basta lembrar que:

- o cubo do primeiro termo (a^3);
- menos três vezes o quadrado do primeiro termo vezes o segundo termo ($- 3a^2b$);
- mais três vezes o primeiro termo vezes o quadrado do segundo termo ($+ 3ab^2$);

- menos o cubo do segundo termo ($- b^3$);

Exemplo 10. Calcule $(x - 2)^3$

Primeiro vamos identificar os termos:

Primeiro termo: x

Segundo termo: 2

Então, podemos escrever:

- o cubo do primeiro termo: x^3 ;
- menos três vezes o quadrado do primeiro termo vezes o segundo termo: $- 3x^2 \cdot 2 = - 6x^2$;
- mais três vezes o primeiro termo vezes o quadrado do segundo termo ($+ 3x \cdot 2^2 = 3x \cdot 4 = 12x$);
- menos o cubo do segundo termo ($- 2^3 = - 8$).

Portanto,

$$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Até agora nós vimos os produtos notáveis envolvendo dois termos, mas é possível fazer esses produtos notáveis para três termos ou mais.

Quadrado da soma e da diferença de três termos

O procedimento para encontrar o quadrado da soma ou da diferença de três termos é igual ao quando temos dois termos.

Se fizermos as manipulações necessárias, temos que o quadrado da soma de mais de dois números é igual à soma dos quadrados de cada um dos números mais o dobro da soma dos produtos desses números tomados dois a dois. Veja:

$$(a + b + c)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Para a diferença, basta trocarmos os sinais.

Exemplo 11. Calcule $(a - b - c)^2$

$$(a - b - c)^2 =$$

$$= a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 + 2a(-b)$$

$$+ 2a(-c) + 2(-b)(-c)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

Cubo da soma e da diferença de três termos

O procedimento para encontrar o cubo da soma ou da diferença de três termos é igual ao quando temos dois termos.

A expressão para a obtenção do cubo da soma de três números é dada por:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b$$

$$+ 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b$$

$$+ 6abc$$

Para a diferença, basta trocarmos os sinais dos termos, como fizemos no quadrado da diferença no exemplo anterior.

Note que podemos obter expressões com quantos termos quisermos. Entretanto, quanto maior a quantidade de termos, mais complicadas serão as expressões.

Os cinco produtos notáveis vistos são os mais comuns e os mais utilizados na resolução dos exercícios, porém existem outros que podem auxiliar no desenvolvimento das expressões. A seguir veremos um deles.

Soma e diferença de cubos

A soma dos cubos de dois números é igual à soma desses números multiplicada pelo quadrado do primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo:

Para a diferença dos cubos de dois termos, trocamos o sinal:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exercícios Propostos

01. Resolva: $(2x + 3y)^2$.

02. (EPCAr - 1983/Adaptada)

Utilizando o conceito de produtos notáveis encontre uma expressão equivalente para a expressão abaixo:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 + (x + y)(x - y)$$

Fatoração

A fatoração consiste em transformar um polinômio no produto dos seus termos.

A fatoração e os produtos notáveis possuem uma relação muito próxima. Por exemplo, no caso de fatoração de um polinômio que é um produto notável, seria como realizar a operação contrária de desenvolver esse produto notável.

Exemplo 12. Fatore a expressão $x^2 - 25$.

Analisando esse polinômio, podemos reescrevê-lo como:

$$x^2 - 5^2.$$

Aqui temos o quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo, que corresponde ao desenvolvimento do produto da soma pela diferença de dois termos.

Então, podemos fatorar a expressão reescrevendo da seguinte forma:

$$x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5).$$

Quando não temos um produto notável, a fatoração de uma expressão algébrica é realizada agrupando os termos que possuem um múltiplo comum. Para isso, podemos utilizar dois métodos: fator comum em evidência e agrupamento de termos semelhantes.

Fator comum em evidência

Quando dois termos da expressão possuem o mesmo fator, significa que eles apresentam um fator em comum. Assim, os valores multiplicados podem ser agrupados em um parêntese. Veja:

Exemplo 13. $4x + 4y = 4(x + y)$

Exemplo 14.

$$15a + 21b = 3 \cdot 5a + 3 \cdot 7b$$

$$15a + 21b = 3(5a + 7b)$$

Agrupamento de termos semelhantes

Se as expressões não possuem um fator comum a todos os termos, podemos separá-los em diferentes parênteses, agrupando os termos semelhantes, o que resulta em uma multiplicação mais simples. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 15. Fatore a expressão

$$3x + 4x + 3y + 4y.$$

$$3x + 4x + 3y + 4y = x(3 + 4) +$$

$$y(3 + 4)$$

$$3x + 4x + 3y + 4y = (x + y)(3 + 4)$$

Nesse capítulo nós vimos a fatoração de expressões algébricas. Entretanto, podemos realizar a fatoração de um valor em diferentes fatores multiplicativos. Essas operações são realizadas para encontrar uma raiz quadrada de um valor qualquer, por exemplo. Porém, esses conceitos serão vistos em outros capítulos.

Exercícios

01. (EPCAR - 2000) Dadas as expressões $E = \frac{x^2 - mx - nx + mn}{x^2 - m^2}$ e

$\frac{E}{n-x} = D^{-1}$, tem-se que D é igual a:

a) $-x - m$

b) $x - m$

c) $x + m$

d) $-x + m$

02. (EPCAR - 2002) Se $(n + \frac{1}{n})^2 = 3$, então $n^3 + \frac{1}{n^3}$ vale:

a) 0

b) $3\sqrt{3}$

c) $6\sqrt{3}$

d) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

03. (EPCAR - 2003) Se a e b são números reais não nulos, tais que $a \neq \pm b$, então, simplificando a expressão:

$$(a^2b + ab^2) \cdot \frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}},$$

obtem-se:

a) $a + b$

b) $a^2 + ab + b^2$

c) $a^2 + b^2$

d) $b - a$

04. (EPCAR - 2007) Se $a \neq 0$, então

$$\left(\frac{a}{a+y} + \frac{y}{a-y}\right) : \left(\frac{y}{a+y} - \frac{a}{a-y}\right) = -1$$

a) para todos, exceto dois valores de y.

b) só para dois valores de y.

c) para todos os valores de y.

d) para nenhum valor de y.

05. (EPCAR - 2010) Considere os números a, b e x tais que $a + b = x$, $a - b = x^{-1}$ e $a \neq b \neq 0$. O valor da expressão:

$$y = \frac{(a^2 + 2ab + b^2)(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)} \cdot \left(\frac{a^2 - ab}{2a}\right)$$

é:

a) 2

b) $2x^2$

c) x^2

d) $\frac{x^2}{2}$

06. (EPCAR - 2018) Ao fatorar e efetuar as simplificações na fração:

$$\frac{-ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 - a^2c - a^2b}{a^2c + 2abc + b^2c - a^3 - 2a^2b - ab^2},$$

Considerando sua devida existência, obtém-se:

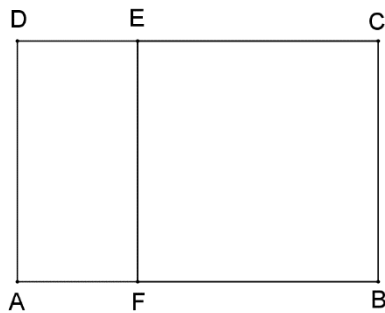
a) $\frac{b+c}{c-a}$

b) $\frac{b+c}{a+b}$

c) $\frac{2a+c}{c-a}$

d) $\frac{b+c-a}{a+b}$

07. (CN - 1986) O retângulo ABCD da figura abaixo tem base igual a $x + y$. O segmento $\overline{AF}$ tem medida z . Sabe-se que $x^2 + y^2 + z^2 = 3,54$ e que $xz + yz - xy = 0,62$. A área do quadrado FBCE é:



- a) 2
- b) 2,1
- c) 2,3
- d) 2,7
- e) 2,5

08. (CN - 1998) A expressão:

$$\frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2 - (x^3 - y^3 - z^3)^2}{y^3 + z^3},$$

com $x, y, z \neq 0$, é equivalente a:

- a) $4x^3$
- b) $4yzx^3$
- c) $4yx^3$
- d) $4xyz$
- e) $4xz^3$

09. (CN - 2022) Para qualquer x real e maior que zero, associe os polinômios da 1ª coluna aos seus correspondentes, na forma fatorada, da 2ª coluna e assinale a opção que corresponde à sequência correta.

1ª coluna:

- (I) $(x + 1)(x - 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
- (II) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
- (III) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
- (IV) $(x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$
- (V) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$
- (VI) $(x + 8)(x + 3)$

2ª coluna:

- () $x^3 + 8$
- () $x^6 + 2x^3 + 1$
- () $x^6 - 1$
- () $x^3 - 64$
- () $x^5 - x^2$

- a) (II) (I) (IV) (III) (VI)
- b) (III) (VI) (I) (V) (-)
- c) (V) (I) (VI) (II) (-)
- d) (III) (IV) (I) (III) (-)
- e) (VI) (III) (-) (V) (I)

10. (CN - 2021) A soma e o produto das raízes x_1 e x_2 de uma equação do 2º grau são iguais. Se s é a soma das raízes da equação, é correto afirmar que a expressão

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{s^2}{x_1^2} + \frac{s^2}{x_2^2} \text{ é igual a:}$$

a) $s^2 - 4s$

b) $s^2 - 8s$

c) $4s^2 - 16s$

d) $2s^2 + 8s$

e) $2s^2 - 4s$

c) $a - c = 4 - b$

d) $c - a = b - 2$

e) $b - c = a + 4$

11. (EPCAR - 2019) Considere o conjunto de todos os valores de m e n para os quais a expressão algébrica A , abaixo, está definida.

$$A = \frac{\frac{m^2}{n^2} - \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{m \cdot n} + \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{(m-n)^{-2}}{(m^2 - n^2)^{-1}}$$

Nesse conjunto, uma expressão algébrica equivalente a A é

a) $m^2 + n^2$

b) $m^2 - n^2$

c) $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$

d) $\frac{m^2 + n^2}{m - n}$

12. (CN - 2021) Sejam a , b e c números reais positivos com $a + b > c$, considere também que $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + a + b - c = 21$ e que simultaneamente $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc - 2ac - 2bc = 9$. Um estudante fatorou os primeiros membros das igualdades e encontrou uma relação sempre verdadeira entre a , b e c . Assinale a opção que apresenta essa relação.

a) $a + b = c + 1$

b) $b - a = c - 6$

GABARITO

1) A

2) A

3) B

4) A

5) B

6) B

7) C

8) A

9) D

10) E

11) A

12) B

Frações Algébricas

Nos capítulos anteriores, nós vimos problemas que envolviam frações numéricas, além de expressões algébricas, que podiam ter uma ou mais variáveis. Neste capítulo, iremos combinar tais assuntos, ou seja, estudaremos frações contendo expressões algébricas. Para simplificar e resolver estas expressões, vamos aplicar conhecimentos de fatoração e produtos notáveis, também já estudados anteriormente.

Conceitos iniciais

Frações algébricas são expressões algébricas na forma de fração, que apresentam pelo menos uma variável no denominador.

Veja alguns exemplos de frações algébricas:

a) $\frac{3}{x}$

b) $\frac{2x+1}{3x+2y}$

c) $\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$

Lembre-se, não é possível dividir algo por zero. Portanto, o denominador das frações algébricas deve ser diferente de zero. Como temos variáveis no denominador da fração, é necessário uma condição de existência: essas variáveis não podem assumir valores que tornem o denominador nulo.

Vejam os exemplos abaixo:

Exemplo 01. Considere a seguinte fração algébrica:

$$\frac{8x^2y}{x-4}$$

A condição de existência é $x - 4 \neq 0$, ou seja, x tem que ser diferente de 4.

Exemplo 02. Agora observe a seguinte fração algébrica:

$$\frac{(3x^2+y^2)}{2(y+2)(x-y)}$$

Para que o denominador seja diferente de zero, os dois fatores variáveis, ou seja, x e y devem ser diferentes de zero. Assim, a condição de existência é:

a) $y + 2 \neq 0 \Rightarrow y \neq -2$

b) $x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y$

Exemplo 03. Considere a seguinte fração algébrica:

$$\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$$

A condição de existência é:

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Note que todos os termos (a^2 , b^2 e c^2) são maiores ou iguais a zero. Então, o denominador $a^2 + b^2 + c^2$ se anula somente quando as três variáveis, simultaneamente, são iguais a zero. Nesse caso, a condição de existência é que a , b e c não sejam todos iguais a zero. Veja, poderíamos ter $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$. Entretanto, mesmo com duas das variáveis iguais a zero, o denominador ainda seria não-nulo:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1.$$

Exercícios propostos

01. Considere a expressão:

$$E = \left[\frac{p^2 + pq}{p^2 - q^2} \cdot \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) \right]^{-1}$$

Para quais valores reais de p e q a expressão E está definida?

02. Considere a expressão:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Determine a condição de existência, para $n \in \mathbb{N}^*$.

Simplificação de frações algébricas

A simplificação de frações algébricas é realizada com o objetivo de eliminar o excesso de incógnitas repetidas no numerador e no denominador, de modo a obter a fração na forma mais fatorada possível. Assim, obtemos uma nova fração equivalente à fração original, mas com uma menor quantidade de símbolos.

Para entendermos como simplificar uma fração algébrica, vamos relembrar os passos de como simplificar uma fração numérica:

Passo 1. Encontrar os fatores primos do numerador e do denominador.

Passo 2. Simplificar os fatores comuns.

Exemplo 04. Vamos simplificar a seguinte fração:

$$\frac{30}{72}$$

Primeiro, vamos decompor o numerador e o denominador em fatores primos:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Então, podemos reescrever a fração como:

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3^2}$$

Observe, que temos os fatores 2 e 3 em comum no numerador e no denominador. Sendo assim, podemos simplificá-los:

$$\frac{30}{72} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3^2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{2^2 \cdot 3} = \frac{5}{12}$$

Dizemos, então, que as frações $\frac{30}{72}$ e $\frac{5}{12}$ são **equivalentes**, pois representam o mesmo valor.

Para simplificar as frações algébricas, vamos utilizar a mesma ideia: fatorar o numerador e o denominador e, então, simplificar os fatores comuns.

Lembre-se que ao simplificar frações algébricas, assumimos que os valores das variáveis obedecem às condições de existência. Caso contrário, ao simplificar, os fatores comuns seriam iguais a zero, e estaríamos dividindo por zero.

A simplificação é feita com base nas propriedades de potências e fatoração de polinômios. Sendo assim, iremos relembrar os principais casos de fatoração:

Fatoração de polinômios

1) Fator comum: quando existe um fator que se repete em todos os termos do polinômio, devemos colocá-lo em evidência:

$$ab + ac = a(b + c)$$

2) Agrupamento: caso não exista um fator que se repita em todos os termos, utilizamos a fatoração por agrupamento. Neste caso, devemos agrupar os termos por fatores comum e colocá-los em evidência:

$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd \\ = a(c + d) + b(c + d) \\ = (a + b)(c + d) \end{aligned}$$

3) Quadrado da soma ou diferença: para fatorar utilizando o quadrado ou diferença da soma, o trinômio deverá formar um quadrado perfeito.

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \end{aligned}$$

4) Diferença de quadrados: quando temos a diferença entre dois quadrados, utilizamos o produto notável da soma pela diferença:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

5) Trinômio do tipo $x^2 + Sx + P$, soma e produto: neste caso, não é necessário que o trinômio seja um quadrado perfeito. Aqui iremos somar o produto dos dois últimos termos:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Observação: o S vem de soma e o P de produto.

6) Cubo da soma ou diferença:

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a + b)^3 \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 &= (a - b)^3 \end{aligned}$$

7) Diferença de dois cubos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

8) Soma de dois cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

9) Quadrado da soma de três termos:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ = (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

Vejamos alguns exemplos para relembrarmos melhor esse conceito.

Exemplo 05. Simplifique as seguintes frações algébricas.

a) $\frac{9x^3y^2}{12x^2yz}$

O numerador e o denominador possuem como fatores comuns o 3, x^2 e y , assim eles podem ser extraídos de ambos. Veja:

$$\frac{9x^3y^2}{12x^2yz} = \frac{3x^2y}{3x^2y} \cdot \frac{3xy}{4z} = \frac{3xy}{4z}$$

b) $\frac{4x}{x-x^3}$

Nesse exemplo, vamos colocar o fator x em evidência no denominador e, então, podemos simplificar com o fator x do numerador:

$$\frac{4x}{x-x^3} = \frac{4x}{x(1-x^2)} = \frac{4}{1-x^2}$$

c) $\frac{4ac+2bc}{4a^2-b^2}$

Aqui, podemos colocar o fator $2c$ do numerador em evidência:

$$4ac + 2bc = 2c(2a + b)$$

Já no denominador, temos uma diferença de quadrados, que pode ser fatorada:

$$4a^2 - b^2 = (2a)^2 - b^2$$

$$= (2a + b)(2a - b)$$

Assim, o numerador e o denominador passam a ter em comum o fator $2a + b$. Portanto, simplificando a fração, temos:

$$\frac{4ac+2bc}{4a^2-b^2} = \frac{2c(2a+b)}{(2a+b)(2a-b)}$$

$$= \frac{2c}{2a-b}$$

d) $\frac{a^2c+ac^2+abc+bc^2}{a^2c+2abc+b^2c}$

No numerador, podemos agrupar os termos com fatores comuns: a^2c com ac^2 e abc com bc^2 :

$$a^2c + ac^2 + abc + bc^2$$

$$= ac(a + c) + bc(a + c)$$

Agora os dois termos possuem $a + c$ como fator comum. Colocando-o em evidência, temos:

$$(ac + bc)(a + c)$$

Ainda, podemos colocar o c em evidência no fator $ac + bc$ e, então, fatoramos o numerador por completo:

$$c(a + b)(a + c)$$

No denominador, colocaremos em evidência o fator c :

$$a^2c + 2abc + b^2c = c(a^2 + 2ab + b^2)$$

Quando fazemos isso, o resultado é o quadrado de uma soma. Fatorando-o, temos:

$$c(a^2 + 2ab + b^2) = c(a + b)^2$$

Portanto, a partir dessas manipulações, o numerador e o denominador passam a ter os fatores

c e $a + b$ em comum, sendo possível simplificá-los:

$$\frac{a^2c+ac^2+abc+bc^2}{a^2c+2abc+b^2c}$$

$$\frac{c(a+b)(a+c)}{c(a+b)^2} = \frac{a+c}{a+b}$$

Exercícios Propostos

03. A fração algébrica

$$\frac{50x^2+100x+50}{5x^2-5}$$

quando simplificada é equivalente a:

a) $\frac{10(x+1)}{x-1}$

b) $10(x + 1)$

c) $\frac{10(x-1)}{x+1}$

d) 10

02. (UNICENTRO - Adaptada)

Determine a forma simplificada da expressão algébrica abaixo:

$$\frac{x^3-x^2-4x+4}{x-1}$$

03. Fatore e simplifique as seguintes expressões algébricas:

a) $\frac{4x^2-9}{4x^2-12x+9} \cdot \frac{2x-3}{8x+12}$

b) $\frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$

c) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right)$

d) $\frac{(x^2-y^2-z^2-2yz)(x+y-z)}{(x+y+z)(x^2+z^2-2xz-y^2)}$

Como já mostrado, as frações são expressões algébricas que apresentam pelo menos uma incógnita no denominador, sendo que estas incógnitas representam números reais desconhecidos.

Portanto, as frações algébricas também representam números reais. Isso implica que as operações como adição, subtração, multiplicação e divisão também são válidas para as expressões algébricas, como veremos a seguir.

Adição e subtração de frações algébricas

As operações de adição e subtração são realizadas da mesma maneira.

Para somar e subtrair frações numéricas, todas as frações envolvidas devem possuir o mesmo denominador.

Podemos ter duas situações: em que os denominadores já são iguais e a outra, em que apresentam denominadores diferentes. Vejamos:

1) Se as frações apresentarem denominadores iguais, devemos manter o denominador e somar ou subtrair os numeradores normalmente. Assim:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$$

2) Se as frações possuem denominadores diferentes, devemos reescrevê-las de modo que apresentem o mesmo denominador, ou seja, temos que encontrar as frações equivalentes. Para isso, devemos calcular o mínimo múltiplo comum (M.M.C.) entre os denominadores iniciais. Veja o exemplo a seguir:

$$\frac{41}{180} - \frac{5}{24}$$

Para resolver, temos que encontrar o MMC entre 180 e 24 e, assim, encontrar um denominador comum. Primeiro, vamos decompor os dois números em fatores primos:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

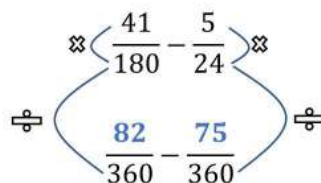
$$24 = 2^3 \cdot 3$$

O M.M.C. entre 180 e 24 é encontrado comparando-se os fatores de mesma base, que apresentem o maior expoente. Assim:

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3 \Rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Encontramos o novo denominador, agora temos que encontrar os novos numeradores para que as frações sejam equivalentes.

Para calcular os novos numeradores, temos que pegar o M.M.C. encontrado e dividirmos pelo denominador inicial de cada fração. O resultado dessa divisão, multiplicamos pelos numeradores iniciais:



$$\frac{41}{180} - \frac{5}{24} = \frac{82}{360} - \frac{75}{360}$$

Agora que encontramos as frações equivalentes com um denominador comum, podemos realizar a subtração dos numeradores:

$$\frac{82}{360} - \frac{75}{360} = \frac{82-75}{360} = \frac{7}{360}$$

Quando as operações de adição ou subtração envolvem frações algébricas, o procedimento realizado é análogo ao que foi mostrado.

Vejamos exemplos a seguir:

Exemplo 06. Efetue as operações entre as frações algébricas:

a) $\frac{2}{x} + \frac{y}{x} - \frac{2y-3}{x}$

Como as frações apresentam o mesmo denominador, ou seja, todas apresentam o termo x , basta somar ou subtrair os numeradores. Apenas, devemos tomar cuidado com a operação de subtração, pois o sinal negativo se aplica a todos os termos no numerador. Para facilitar, podemos colocar o numerador entre parênteses ao escrever a fração. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x} + \frac{y}{x} - \frac{2y-3}{x} &= \frac{2+y-(2y-3)}{x} \\ &= \frac{2+y-2y+3}{x} = \frac{5-y}{x}\end{aligned}$$

b) $\frac{1}{x^2+2xy+y^2} + \frac{1}{x^2-y^2}$

Nesse exemplo, os denominadores são diferentes. Então, antes de realizar a soma dos numeradores temos que remontar as frações, de modo que apresentem denominadores iguais. Para isso, temos que encontrar o M.M.C. entre eles.

Para simplificar e facilitar, antes de obter o M.M.C, vamos fatorar os denominadores:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Agora, vamos tirar o M.M.C. entre essas expressões. Note que o fator $(x + y)$ aparece com expoente 2 em uma delas e expoente 1 na outra. Logo, no MMC, o fator $(x + y)$ deve ter expoente 2. Enquanto, o fator $(x - y)$ aparece em apenas uma delas, logo, ele também deve estar no MMC.

Assim, o MMC entre os denominadores é $(x + y)^2(x - y)$. Reduzindo as frações ao denominador comum:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+2xy+y^2} &= \frac{1}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x-y}{(x+y)^2(x-y)} \\ \frac{1}{x^2-y^2} &= \frac{1}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{x+y}{(x+y)^2(x-y)}\end{aligned}$$

Por fim, somando as frações, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+2xy+y^2} + \frac{1}{x^2-y^2} &= \frac{x-y}{(x+y)^2(x-y)} + \frac{x+y}{(x+y)^2(x-y)} \\ &= \frac{x-y+x+y}{(x+y)^2(x-y)} = \frac{2x}{(x+y)^2(x-y)}\end{aligned}$$

c) $\frac{a^2}{a^2-ab} + \frac{1}{a+b} - \frac{a-b}{a^2+ab}$

Novamente, as frações apresentam denominadores diferentes. Vamos seguir os mesmos passos do exemplo anteriores: primeiro, vamos fatorar os denominadores e, depois, tirar o M.M.C entre as expressões. Veja:

$$a^2 - ab = a(a - b)$$

$$a^2 + ab = a(a + b)$$

Note que, o denominador $a + b$ já é um único fator.

Então, para encontrar um denominador comum, encontramos o MMC entre os denominadores:

$$\begin{aligned}a(a - b) a + b a(a + b) \\ \Rightarrow a(a + b)(a - b)\end{aligned}$$

Reduzindo cada um dos termos da expressão ao mesmo denominador, temos:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a(a-b)} &= \frac{a^2(a+b)}{a(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{a^2(a+b)}{a(a+b)(a-b)} = \frac{a^3+a^2b}{a(a+b)(a-b)}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a(a-b)}{a(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{a^2-ab}{a(a+b)(a-b)}$$

$$\frac{a-b}{a(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{a(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{a(a+b)(a-b)}$$

Agora podemos inserir os termos na expressão original, tomando cuidado com o sinal negativo:

$$\frac{a^3+a^2b+a^2-ab-(a^2-2ab+b^2)}{a(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{a^3+a^2b+a^2-ab-a^2+2ab-b^2}{a(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{a^3+a^2b+ab-b^2}{a(a+b)(a-b)}$$

d) $\frac{7b}{a-1} + \frac{a+8b}{2b+3}$

Nesse exemplo, as frações também apresentam denominadores diferentes. Entretanto, note que os denominadores não possuem fatores em comum. Assim, o denominador comum é encontrado fazendo o produto entre eles:

$$\frac{7b}{a-1} + \frac{a+8b}{2b+3}$$

$$= \frac{7b(2b+3)+(a+8b)(a-1)}{(a-1)(2b+3)}$$

$$= \frac{14b^2+21b+a^2-a+8ab-8b}{(a-1)(2b+3)}$$

$$\frac{14b^2+13b+a^2-a+8ab}{(a-1)(2b+3)}$$

Exercícios Propostos

04. Se x , y e z são números reais distintos dois a dois, simplifique a expressão:

$$\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-x)(y-z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}$$

05. (CMRJ 2012 - Adaptada)

Considere a expressão algébrica, definida no conjunto dos números reais:

$$\frac{\frac{x}{x-a} + \frac{a}{x+a}}{\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a}} + \frac{2a}{a - \frac{x(x+a)}{x-a}}$$

Qual o valor encontrado ao simplificarmos a equação?

Multiplicação e divisão de frações algébricas

Para realizar a multiplicação e divisão de frações algébricas, utilizamos o mesmo procedimento para frações numéricas.

Para a multiplicação de frações algébricas, multiplicamos os numeradores entre si e os denominadores entre si:

$$\frac{4ab^2}{5x^2} \cdot \frac{3ax}{b} = \frac{4ab^2 \cdot 3ax}{5x^2 \cdot b} = \frac{12a^2b}{5x}$$

Lembre-se que quando multiplicamos incógnitas de bases iguais, devemos somar os expoentes.

Na divisão de frações algébricas, mantemos a primeira fração e invertemos a segunda, depois multiplicamos elas entre si:

$$\frac{2y^2}{x} \div \frac{8y^4}{3x^3} = \frac{2y^2}{x} \cdot \frac{3x^3}{8y^4} = \frac{2y^2 \cdot 3x^3}{x \cdot 8y^4} = \frac{3x^2}{4y^2}$$

Também poderíamos representar a divisão na forma de fração:

$$\frac{\frac{2y^2}{x}}{\frac{8y^4}{3x^3}}$$

Lembre-se que quando dividimos incógnitas de bases iguais, devemos subtrair os expoentes.

Vejamos alguns exemplos de como realizar a multiplicação e a divisão de frações algébricas.

Exemplo 07. Efetue a multiplicação entre as frações algébricas e simplifique o resultado:

$$\frac{x^3+y^3}{x^4+2x^2y^2+y^4} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^3+xy^2-x^2y}$$

Antes de começar a realizar as operações, devemos sempre fatorar os numeradores e denominadores quando possível, pois facilita na hora de resolver as operações. Assim, temos:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$= (x^2)^2 + 2x^2y^2 + (y^2)^2$$

$$= (x^2 + y^2)^2$$

$$x^3 + xy^2 - x^2y = x(x^2 + y^2 - xy)$$

Substituindo na expressão inicial e simplificando fatores comuns:

$$\begin{aligned} & \frac{x^3+y^3}{x^4+2x^2y^2+y^4} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^3+xy^2-x^2y} \\ &= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x(x^2+y^2-xy)} \\ &= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2 x(x^2+y^2-xy)} \\ &= \frac{x+y}{x(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

Exemplo 08: Efetue a divisão entre as frações algébricas e simplifique o resultado:

$$\frac{4b^2-4ab+a^2}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} \div \frac{2ab-2b^2-a^2+ab}{a^3+a^2b-ab^2-b^3}$$

Para resolver, vamos manter a primeira fração e inverter a segunda:

$$\frac{4b^2-4ab+a^2}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} \cdot \frac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{2ab-2b^2-a^2+ab}$$

Agora, vamos multiplicá-las, mas antes vamos fatorar cada uma das expressões:

$$\text{I)} 4b^2 - 4ab + a^2$$

$$= (2b)^2 - 2 \cdot 2b \cdot a + a^2$$

$$= (2b - a)^2$$

$$\text{II)} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= (a + b)^3$$

$$= a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^2(a + b) - b^2(a + b)$$

$$= (a^2 - b^2)(a + b)$$

$$= (a - b)(a + b)(a + b)$$

$$= (a - b)(a + b)^2$$

$$\text{III)} 2ab - 2b^2 - a^2 + ab$$

$$= 2b(a - b) - a(a - b)$$

$$= (2b - a)(a - b)$$

Substituindo na expressão e simplificando os fatores comuns, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{4b^2-4ab+a^2}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} \cdot \frac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{2ab-2b^2-a^2+ab} \\ &= \frac{(2b-a)^2}{(a+b)^3} \cdot \frac{(a-b)(a+b)^2}{(2b-a)(a-b)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2b-a)^2(a-b)(a+b)^2}{(a+b)^3(2b-a)(a-b)}$$

$$= \frac{2b-a}{a+b}$$

Exercícios Propostos

06. (EAM 2019) A expressão

$$\frac{2+a^2-3a}{6+a^2-5a} \div \frac{4+a^2-5a}{12-7a+a^2}$$

quando simplificada, considerando a condição de existência dessa simplificação, tem como resultado:

a) $a^2 + 1$

b) $a + 1$

c) 2

d) 1

e) $a - 1$

07. (CN 1994) Determine o resultado da seguinte expressão:

$$\frac{x}{2+y} + \frac{4-4x+x^2}{y^2+4y+4} \div \frac{2-x}{2+y},$$

Potenciação de frações algébricas

Para elevar uma fração algébrica a um dado expoente, prosseguimos de forma análoga às frações numéricas, ou seja, elevamos o numerador e o denominador ao expoente.

Lembre-se de que os expoentes negativos invertem o numerador e o denominador.

Veja os exemplos a seguir:

a) $\left(\frac{3y}{4ax^2}\right)^3 = \frac{(3y)^3}{(4ax^2)^3} = \frac{3^3 \cdot y^3}{4^3 \cdot a^3 \cdot x^{2 \cdot 3}} = \frac{27y^3}{64a^3x^6}$

b) $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}$

c) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{-1} = \frac{cx+d}{ax+b}$

d) $\left(\frac{5ab^2}{xy}\right)^{-2} = \left(\frac{xy}{5ab^2}\right)^2 = \frac{x^2y^2}{25a^2b^4}$

Exemplo 09. Efetue as operações e simplifique a expressão algébrica a seguir:

a) $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}} \cdot \left(\frac{a-b}{ab}\right)^2$

Vamos começar simplificando o fator

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}.$$

Quando temos expoentes negativos, podemos resolver de duas formas:

1ª) Escrever na forma de fração e simplificar as expressões:

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}$$

$$= \frac{b+a}{ab} \cdot \frac{a^2b^2}{b^2-a^2} = \frac{(b+a)a^2b^2}{ab(b^2-a^2)}$$

$$= \frac{(b+a)a^2b^2}{ab(b+a)(b-a)} = \frac{ab}{b-a}$$

2ª) Multiplicar o numerador e o denominador diretamente por a^2b^2 , eliminando os expoentes negativos:

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}} = \frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$= \frac{(a^{-1}+b^{-1})a^2b^2}{(a^{-2}-b^{-2})a^2b^2} = \frac{a^{2-1}b^2+a^2b^{2-1}}{a^{2-2}b^2-a^2b^{2-2}}$$

$$= \frac{ab^2+a^2b}{b^2-a^2} = \frac{ab(b+a)}{(b+a)(b-a)} = \frac{ab}{b-a}$$

Lembre-se que $b - a = -(a - b)$.

Substituindo o resultado na expressão original, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}} \cdot \left(\frac{a-b}{ab}\right)^2 \\ &= \left(\frac{ab}{b-a}\right) \cdot \left(\frac{a-b}{ab}\right)^2 = \frac{ab(a-b)^2}{(b-a)(ab)^2} \\ &= -\frac{ab(a-b)^2}{(a-b)(ab)^2} = -\frac{a-b}{ab} = \frac{b-a}{ab} \end{aligned}$$

Exercícios propostos

08. (EFOMM - Adaptada) Considere a seguinte expressão:

$$\frac{(p+q)^{-1} \cdot (q^{-2} - p^{-2})}{p^{-2} \cdot q^{-2}}$$

Sejam p e q números reais, tais que $p \neq -q$ e $p \cdot q \neq 0$, determine a expressão algébrica equivalente.

09. (CMJF 2015 - Adaptada) Respeitada a condição de existência ($x \neq 3$) e simplificando a expressão

$$\frac{2(x-2)(x-3)^3 - 3(x-2)^2(x-3)^2}{(x-3)^3}$$

qual o resultado obtido?

Exercícios resolvidos

01. (OBM 2002) Se $xy = 2$ e $x^2 + y^2 = 5$, então

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2$$

é igual a:

- a) $5/2$
- b) $25/4$
- c) $5/4$
- d) $1/2$
- e) 1

Resolução:

Para resolver essa questão, precisamos reescrever a expressão dada de modo que apareçam os termos xy e $x^2 + y^2$.

Note que temos os termos y^2 e x^2 nos denominadores da expressão. Então, o denominador comum para a expressão é $x^2 y^2$:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = \frac{x^4 + y^4 + 2x^2 y^2}{x^2 y^2}$$

Podemos escrever $x^2 y^2$ como $(xy)^2$, enquanto, o numerador pode ser fatorado como o quadrado de uma soma:

$$\begin{aligned} & x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 \\ &= (x^2)^2 + (y^2)^2 + 2x^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 \end{aligned}$$

Assim, a expressão inicial pode ser reescrita como:

$$\frac{x^4 + y^4 + 2x^2 y^2}{x^2 y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{(xy)^2}$$

Substituindo $x^2 + y^2 = 5$ e $xy = 2$:

$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{(xy)^2} = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$

Resposta correta: **Alternativa B.**

02. (EPCAR 2019) Considere o conjunto de todos os valores de m e n para os quais a expressão algébrica A , abaixo, está definida.

$$A = \frac{\frac{m^2}{n^2} - \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{m \cdot n} + \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{(m-n)^{-2}}{(m^2 - n^2)^{-1}}$$

Nesse conjunto, uma expressão algébrica equivalente a A é

a) $m^2 + n^2$

b) $m^2 - n^2$

c) $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$

d) $\frac{m^2 + n^2}{m - n}$

Resolução:

Inicialmente, vamos simplificar o primeiro fator da expressão, realizando as operações entre frações algébricas e fatorando:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{m^2}{n^2} - \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{m \cdot n} + \frac{1}{n^2}} &= \frac{\frac{m^4 - n^4}{m^2 n^2}}{\frac{n^2 + 2mn + m^2}{m^2 n^2}} \\ &= \frac{m^4 - n^4}{m^2 + 2mn + n^2} = \frac{(m^2)^2 - (n^2)^2}{(m+n)^2} \\ &= \frac{(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)}{(m+n)^2} \\ &= \frac{(m^2 + n^2)(m+n)(m-n)}{(m+n)^2} \\ &= \frac{(m^2 + n^2)(m-n)}{m+n} \end{aligned}$$

Vamos agora simplificar o outro fator:

$$\begin{aligned} \frac{(m-n)^{-2}}{(m^2 - n^2)^{-1}} &= \frac{\frac{1}{(m-n)^2}}{\frac{1}{m^2 - n^2}} = \frac{m^2 - n^2}{(m-n)^2} \\ &= \frac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2} = \frac{m+n}{m-n} \end{aligned}$$

Substituindo na expressão inicial, temos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(m^2 + n^2)(m-n)}{m+n} \cdot \frac{m+n}{m-n} \\ &= \frac{(m^2 + n^2)(m-n)(m+n)}{(m+n)(m-n)} \\ &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

Resposta correta: **Alternativa A**

04. (EPCAR 2018) Ao fatorar e efetuar as simplificações na fração

$$\frac{-ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 - a^2c - a^2b}{a^2c + 2abc + b^2c - a^3 - 2a^2b - ab^2}$$

considerando sua devida existência, obtém-se:

a) $\frac{b+c}{c-a}$

b) $\frac{b+c}{a+b}$

c) $\frac{2a+c}{c-a}$

d) $\frac{b+c-a}{a+b}$

Resolução:

Em um primeiro momento, poderíamos tentar agrupar os termos na ordem em que eles aparecem, mas ao fazermos isso não apareciam mais fatores comuns. Veja:

$$\begin{aligned} &-ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 - a^2c - a^2b \\ &= b^2(-a + c) + c^2(b + a) - a^2(c + b) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Então, a estratégia mais fácil para resolver essa questão seria fatorar o numerador. Observe que agrupando os dois últimos termos aparece o fator $(c + b)$. Esse fator também aparece agrupando os termos b^2c e bc^2 . Veja:

$$\begin{aligned} &-ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 - a^2c - a^2b \\ &= -ab^2 + bc(c + b) + ac^2 - a^2(c + b) \end{aligned}$$

Agrupando os termos restantes, temos:

$$-ab^2 + ac^2 = a(c^2 - b^2),$$

que pode ser fatorado como:

$$a(c + b)(c - b).$$

Portanto:

$$a(c + b)(c - b) + bc(c + b) - a^2(c + b)$$

Note que todos os termos têm um fator comum $(c + b)$. Então, vamos colocá-lo em evidência e reagrupar os termos restantes:

$$\begin{aligned} & (c + b)[a(c - b) + bc - a^2] \\ &= (c + b)(ac - ab + bc - a^2) \\ &= (c + b)[c(a + b) - a(a + b)] \\ &= (c + b)(c - a)(a + b) \end{aligned}$$

Agora, iremos fatorar o denominador. Note que podemos colocar c em evidência nos três primeiros termos e $-a$ em evidência nos três últimos termos:

$$\begin{aligned} & a^2c + 2abc + b^2c - a^3 - 2a^2b - ab^2 \\ &= c(a^2 + 2ab + b^2) - a(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= (c - a)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= (c - a)(a + b)^2 \end{aligned}$$

Substituindo os termos na fração inicial e simplificando, temos:

$$\frac{(c+b)(c-a)(a+b)}{(c-a)(a+b)^2} = \frac{b+c}{a+b}$$

Portanto, a resposta correta é a **alternativa B**.

Exercícios

01. (EMBRAER - 2018) Na simplificação da expressão

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$$

obtem-se

$$\frac{x+3}{D}$$

A expressão que substitui corretamente D (denominador da fração) é:

a) $x - 9$

b) $x + 3$

c) $x - 3$

d) $x - 6$

02. (EPCAR - 2016) O valor da expressão

$$\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}} \right) \cdot \left(\frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2} \right)$$

em que, x e $y \in R^*$, $x \neq y$ e $x \neq -y$, é:

a) -1

b) -2

c) 1

d) 2

03. (CMRJ - 2008) A forma simplificada da expressão

$$\frac{a^2c - (b^2c + b^2d) + a^2d}{c(a^2 + b^2) + 2(abc + abd) + d(a^2 + b^2)}$$

é:

a) $\frac{a+b}{ab}$

b) $\frac{c-d}{c+d}$

c) $\frac{a-b}{ab}$

d) $\frac{a-b}{a+b}$

e) $\frac{d+c}{dc}$

04. (OBMEP - 2018) Sabendo-se que

$$\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} = \frac{7}{12},$$

qual é o valor de $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$?

a) $2,0$

b) $2,2$

c) $2,4$

d) $2,6$

e) $2,8$

05. (CMRJ - 2021) O conhecimento algébrico contribui, dentre outras coisas, para a simplificação de expressões algébricas. Dessa forma, para $x = 21$ e $y = 20$, o valor da expressão

$$\frac{x^3-y^3}{x^3+2x^2y+2xy^2+y^3}$$

é igual a:

a) $-\frac{1261}{32440}$

b) $-\frac{1}{1261}$

c) $\frac{41}{32440}$

d) $\frac{1}{41}$

e) $\frac{41}{1261}$

06. (EPCAR - 2011) Considere os números reais a , b e x tais que

$$a + b = x$$

$$a - b = x^{-1}$$

$$a \neq b \neq 0$$

O valor da expressão

$$Y = \frac{\frac{(a^2+2ab+b^2)(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)}}{\frac{a^2-ab}{2a}}$$

é:

a) 2

b) $2x^2$

c) x^2

d) $\frac{x^2}{2}$

07. (CMRJ - 2015) Se $x + y = 2$ e

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{1}{4},$$

então $(xy)^{-1}$ é igual a:

a) $11/14$

b) $11/13$

c) $11/12$

d) 1

e) $11/10$

08. (CN - 2007) Simplificando-se a fração

$$\frac{x(x^2+x-y)+y^2(y+1)}{x^2+y^2-xy}$$

onde $x^2 + y^2 - xy \neq 0$, obtém-se:

a) $x - y + 1$

b) $x - y - 1$

c) $x + y - 1$

d) $1 + x + y$

e) $1 - x + y$

09. (EPCAR - 2017) Simplificando as expressões

$$A = \frac{\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \cdot x^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy}}$$

e

$$B = \frac{x^2 - xy}{2x}$$

nas quais $y > x > 0$, é correto afirmar que:

a) $\frac{A}{B} = 2^{-1}$

b) $\frac{B}{A} \in \mathbb{N}$

c) $A \cdot B > 0$

d) $A + B > 0$

10. (CMRJ - 2009) Se

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{8}{6}$$

e $x + y + z = 16$, o produto xyz é:

a) 192

b) 108

c) 48

d) 32

e) 10

11. (EPCAR - 2014) Considere as expressões abaixo em que $a \neq b$:

$$P = \frac{a^3 - b^3}{a^2\sqrt{a} - \sqrt{b}a^2 + ba\sqrt{a} - b\sqrt{ba} + b^2\sqrt{a} - b^2\sqrt{b}}$$

$$Q = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$$

Assim, tem-se $\frac{Q}{P}$ igual a:

a) $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

d) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

12. (EPCAR - 2020) Considere as expressões P e Q , com os números a , b e c reais positivos e distintos entre si:

$$P = \frac{(a^6 + b^6 + c^6)^2 - (a^6 - b^6 - c^6)^2}{b^6 + c^6}$$

$$Q = \frac{(b^{-1} - a^{-1})^{-1} - (b^{-1} + a^{-1})^{-1}}{(a^{-1} + b^{-1})^{-1} - (a^{-1} - b^{-1})^{-1}}$$

A expressão $\sqrt{Q\sqrt{P}}$ é representada por:

a) $b\sqrt{2a}$

b) $a\sqrt{2b}$

c) $a\sqrt{\frac{b}{2}}$

d) $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b}{2}}$

13. (CMRJ - 2011) Dados os números reais a , b , c diferentes de zero e $a + b + c \neq 0$, para que a igualdade

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

sempre se verifique, devemos ter, necessariamente:

a) $a = b = 2c$

b) $a = b = -2c$

c) $a = b$ ou $b = c$ ou $a = c$

d) $\frac{a+c}{2} = b$

e) $a = -b$ ou $b = -c$ ou $a = -c$

14. (CN - 2012) Sejam ' a ', ' b ' e ' c ' números reais não nulos tais que

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = p,$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = q,$$

e

$$ab + ac + bc = r.$$

O valor de $q^2 + 6q$ é sempre igual a:

a) $\frac{p^2 r^2 + 9}{4}$

b) $\frac{p^2 r^2 - 9p}{12}$

c) $p^2 r^2 - 9$

d) $\frac{p^2 r^2 - 10}{4r}$

e) $p^2 r^2 - 12p$

GABARITO

1) C

2) A

3) D

4) E

5) D

6) B

7) A

8) D

9) C

10) A

11) D

12) B

13) E

14) C

Equações do 1º Grau

As equações são fundamentais para a resolução de diversos problemas, tanto da matemática quanto de outras matérias, como a física, a química e a biologia. Neste capítulo veremos os principais pontos sobre equações. Além disso, estudaremos sobre as equações do 1º grau, que são uma das equações mais simples que existem. Apesar de serem simples, é a base para entendermos diversos assuntos da matemática

Equação

Antes de iniciarmos o assunto sobre equações do 1º grau, vamos definir o conceito de equação.

O que são equações? Equações são todo o conjunto de números e símbolos matemáticos que se encontram separados por um sinal de igual.

Curiosidade: O prefixo *equa* da palavra equação vem do latim e significa igual.

As equações são compostas por coeficientes, que são os termos conhecidos (números) e as incógnitas, que são os termos desconhecidos. As incógnitas também podem ser chamadas de variáveis e são representadas por uma letra.

A incógnita pode ser representada por qualquer letra. Entretanto, na maioria das vezes, é representada pelas letras **x** ou **y**.

Vejamos um exemplo de equação:

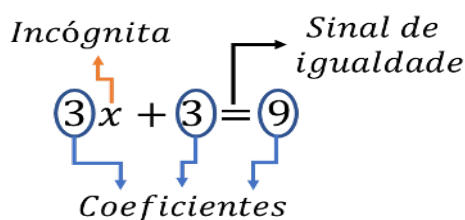


Diagrama de uma equação: $3x + 3 = 9$. As setas indicam: **Incógnita** (x), **Sinal de igualdade** (=), e **Coeficientes** (3).

Nesse exemplo, o **x** é a variável, cujo valor nós não conhecemos, enquanto os números (**3** e **9**) são os coeficientes, ou seja, os valores conhecidos.

Perceba, ainda, que temos duas sentenças que estão relacionadas por um sinal de igualdade.

Veja mais alguns exemplos de equações:

Exemplo 01. $x - 5 = \frac{12}{4}$

Exemplo 02. $4y + 8 = 23 + y$

Exemplo 03. $t^2 + 2t - 4 = 0$

Observação: Quando temos um número “grudado” na incógnita, significa que esse número está multiplicando a variável. Veja no **Exemplo 02**, temos o $4y$, ou seja, o **4** está multiplicando a incógnita **y**. Quando não temos nenhum número na frente da incógnita, significa que a variável está sendo multiplicada por 1.

Exercício proposto

01. Identifique os coeficientes e as incógnitas dos Exemplo 1, 2 e 3.

Agora, vejamos alguns exemplos que não são equações:

Exemplo 04. $x - 5 > 7$

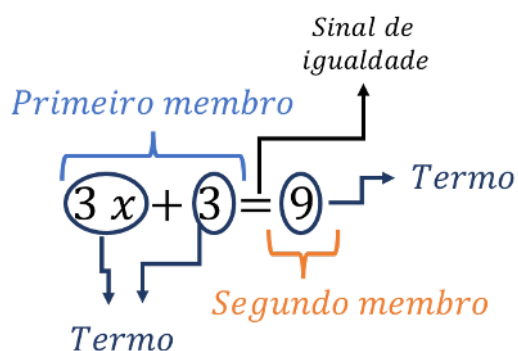
Exemplo 05. $5 + 4 = 9$

Exemplo 06. $6 \neq 2$

Nos **Exemplos 04** e **06** não são equações, pois não apresentam uma relação de igualdade. Já no **Exemplo 05**, apesar de apresentar uma relação de igualdade, não possui uma incógnita. Neste caso, dizemos que a sentença é fechada. Para ser uma equação, precisamos ter uma sentença aberta, ou seja, é necessário que exista um valor desconhecido (incógnita).

Membros e termos de uma equação

Como toda relação de igualdade, uma equação possui dois membros: um à esquerda do sinal de igualdade, chamado de primeiro membro, e o que está à direita do sinal de igualdade, que é chamado de segundo membro. Além disso, cada parcela de uma equação é denominada termo dessa equação. Veja:



Existem vários tipos de equações e cada uma delas possui uma forma específica de resolver. Neste capítulo veremos sobre as **equações do 1º grau**.

Observação: O grau de uma equação está diretamente associado ao maior valor do expoente que aparece nas incógnitas da equação.

Equações do 1º grau

A fórmula geral de uma equação do 1º grau é dada por:

$$ax + b = 0$$

Em que **a** e **b** são números reais, com $a \neq 0$, e **x** é a incógnita.

No caso das equações do 1º grau, a incógnita está elevada a 1. Isso fica implícito. Então, não precisamos escrever x^1 toda vez.

Veja alguns exemplos de equações do 1º grau:

Exemplo 07. $2x + 3 = 0$

Exemplo 08. $-7a + 8 = 0$

Exemplo 09. $9t - 1 = 0$

Quando temos uma equação do 1º grau, o objetivo é encontrar o valor da incógnita. Esse valor encontrado é chamado de raiz da equação.

Raiz da equação do 1º grau

A raiz de uma equação é definida como o valor da incógnita que a transforma em uma sentença matemática verdadeira e fechada. Isso significa que a raiz deve ser um número que, ao substituir a incógnita, comprove a igualdade entre os membros. Então, encontrar a raiz, nada mais é do que resolver a equação.

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 10. Considere a sentença matemática:

$$5 \cdot x = 15$$

Se substituirmos o **x** pelo número 3, temos:

$$5 \cdot 3 = 15$$

$$15 = 15$$

Ou seja, para o valor de x igual a 3, a sentença torna-se verdadeira. Portanto, dizemos que 3 é raiz da equação $5x = 15$.

As equações do 1º grau sempre terão apenas uma única raiz, ou seja, a equação apresenta apenas uma solução.

Agora veremos algumas técnicas de como resolver as equações do 1º grau.

Técnica para resolver as equações do 1º grau

As equações do 1º grau são as equações que apresentam a resolução mais simples e rápida.

Entretanto, para entendermos como solucionar uma equação, precisamos saber sobre o princípio de igualdade.

Princípio da Igualdade

O princípio de igualdade nos diz que uma equação não se altera quando adicionamos, subtraímos, multiplicamos ou dividimos um mesmo número a cada um dos seus membros. Esse princípio é a base para resolvermos as equações.

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 11. Encontre a solução da equação:

$$5x + 3 = 38$$

Solução:

Para solucionar essa equação, ou seja, encontrar o valor da incógnita x , podemos utilizar o princípio da igualdade.

Pelo princípio aditivo das igualdades, podemos adicionar o número $- 3$ a cada um dos membros da equação:

$$5x + 3 - 3 = 38 - 3$$

$$5x = 35$$

E pelo princípio multiplicativo das igualdades, podemos multiplicar por $\frac{1}{5}$ cada um dos membros da equação:

$$\frac{1}{5} \cdot 5x = \frac{1}{5} \cdot 35$$

E assim chegamos ao valor da incógnita na equação:

$$x = 7$$

Portanto, a solução dessa equação é $x = 7$.

Agora que entendemos esse conceito para resolver as equações, não precisamos seguir esses passos todas as vezes. Podemos fazer isso de uma forma mais simplificada.

De uma forma geral, para resolver uma equação do 1º grau, basta isolar a incógnita em um dos lados da igualdade e descobrir o seu valor numérico.

Isolar uma incógnita significa que temos que deixar somente ela de um dos lados do sinal de igual e todos os outros termos devem ser deslocados para o outro lado do sinal de igual. Quando fazemos isso, o princípio de igualdade fica implícito.

É importante lembrar que para mudar um termo qualquer de uma equação de um lado do sinal de igual para o outro é necessário sempre que o termo sofra uma inversão na operação matemática. Isso significa que:

- Se o termo está somando, ele deve passar para o outro lado do sinal de igual subtraindo.

- Se o termo está subtraindo, ele deve passar para o outro lado do sinal de igual somando.

- Se ele está multiplicando, ele deve passar para o outro lado do sinal de igual dividindo.

- Se ele está dividindo, ele deve passar para o outro lado do sinal de igual multiplicando.

Exemplo 12. Encontre a solução para a equação abaixo:

$$x - 5 = 3$$

Solução:

Para resolver a equação, o primeiro passo é isolar o x , ou seja, devemos deixar apenas o x em um dos lados da igualdade. Para isso, vamos deslocar o $- 5$, que está no primeiro membro, para o segundo membro. Não devemos esquecer de inverter o seu sinal! Veja:

$$x = 3 + 5$$

Resolvendo a equação, temos que:

$$x = 8$$

Isso indica que o valor de x é igual a 8, ou seja, o valor da incógnita que satisfaz a igualdade acima é 8.

Para verificar se a solução encontrada é a correta, basta substituir o valor obtido na equação e ver se a igualdade se torna verdadeira. Assim:

$$x - 5 = 3$$

$$8 - 5 = 3$$

$$3 = 3$$

Exemplo 13. Encontre o valor da incógnita x na equação:

$$4x = 15 - x,$$

Solução:

Neste exemplo, a incógnita aparece nos dois membros da equação, precisamos deixá-la apenas de um lado da equação. Para isso, vamos deslocar o termo $- x$, do segundo membro, para o primeiro membro. Não podemos esquecer de trocar o seu sinal. Assim:

$$4x + x = 15$$

Agora, vamos resolver a equação e isolar o x , para descobrir o seu valor numérico. Neste caso, primeiro temos que reduzir os termos semelhantes e depois passar o número que está multiplicando o x para o segundo membro, mas dividindo:

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5}$$

$$x = 3$$

Isso indica que o valor de x é igual a 3, ou seja, o valor da incógnita que satisfaz a igualdade acima é 3.

Para verificar se a solução encontrada é a correta, basta substituir o valor obtido na equação e ver se a igualdade se torna verdadeira. Assim:

$$5 \cdot x = 15$$

$$5 \cdot 3 = 15$$

$$15 = 15$$

Exercícios propostos

02. Encontre a solução das equações abaixo:

a) $x - 1,2 = \frac{8}{5}$

b) $3x - 5 = 5 - 7$

c) $3x - 5 = 6x - 14$

d) $\frac{3}{2}x - 5 = \frac{3}{4}x + 7$

Nos casos em que a equação está na sua forma geral:

$$ax + b = 0,$$

a raiz pode ser encontrada de forma mais simples, utilizando uma expressão que correlaciona os seus coeficientes. Veja:

$$x = \frac{-b}{a}$$

Importante: Essa expressão só pode ser utilizada quando a equação está igualada a zero e apresenta apenas os dois coeficientes (**a** e **b**).

Exemplo 14. Vamos encontrar a raiz da equação do Exemplo 13, utilizando essa técnica.

Solução:

Considere a equação:

$$4x = 15 - x$$

Não podemos aplicar a técnica, pois a equação não está em sua forma geral. Entretanto, podemos manipulá-la para deixar na forma: $ax + b = 0$. Para isso, temos que deslocar todos os termos da equação para apenas um dos lados da igualdade.

Primeiro, vamos deslocar o termo $-x$ do segundo membro para o primeiro membro, lembrando de trocar o seu sinal.

$$4x + x = 15$$

$$5x = 15$$

Pelo princípio aditivo das igualdades, podemos adicionar o número -15 a cada um dos membros da equação:

$$5x - 15 = 15 - 15$$

$$5x - 15 = 0$$

Agora que chegamos na forma geral, vamos identificar os coeficientes **a** e **b** e substituí-los na expressão ($x = \frac{-b}{a}$) para encontrar a raiz da equação.

Pela equação, $a = 5$ e $b = -15$. Então:

$$x = \frac{-(-15)}{5} = \frac{15}{5}$$

$$x = 3$$

Portanto, a raiz da equação é igual a 3. Note que o resultado foi o mesmo obtido no exemplo 13.

Observação: Na hora de resolvermos os exercícios, podemos deslocar todos os termos da equação para um dos lados da igualdade, não esquecendo de inverter o sinal, reduzir os termos semelhantes e igualar a zero.

Problemas envolvendo equações do 1º grau

Nem sempre os exercícios vão apresentar as equações do 1º grau diretamente, para que você as resolva. Em muitos casos, os exercícios apresentam um problema e, antes de começar a resolução, você precisa montar a equação.

Nestes casos é importante saber interpretar e compreender o problema, para que você possa identificar e sublinhar as informações relevantes e o que deve ser encontrado. E, a partir disso, podemos montar a equação, que nada mais é do que traduzir o enunciado do problema em uma linguagem matemática.

Vejamos um exemplo de como isso pode ser feito.

Exemplo 15. Newton tem R\$5,00 a mais que Galileu. Galileu tem R\$5,00 a mais que Tales e Tales tem R\$5,00 a mais que Pitágoras. Os quatro juntos possuem R\$250,00. Quantos reais cada um deles possui?

Solução:

Primeiro, temos que ler com atenção o exercício e associar a variável com o que queremos descobrir, que no caso é a quantia que cada um possui.

Analisando o problema, vamos considerar que a quantia de dinheiro que Pitágoras tem é x . Note que podemos associar o quanto cada um dos outros possui em função da quantia de Pitágoras.

Então, vamos identificar a quantia de cada um em função de x .

- Pitágoras: x
- Tales: $x + 5$
- Galileu: $(x + 5) + 5 = x + 10$
- Newton: $(x + 10) + 5 = x + 15$

Sabendo que todos juntos possuem 250, podemos somar todas as quantias, em função de x , e igualá-las a 250. Assim, chegamos na equação do problema:

$$x + (x + 5) + (x + 10) + (x + 15) = 250$$

Resolvendo a equação, temos:

$$4x + 30 = 250$$

$$4x = 250 - 30$$

$$4x = 220$$

$$x = \frac{220}{4}$$

$$x = 55$$

Então, Pitágoras tem R\$ 55,00 ($x = 55$), Tales tem R\$ 60,00 ($x + 5 = 55 + 5 = 60$), Galileu tem R\$ 65,00 ($x + 10 = 55 + 10 = 65$) e Newton tem R\$ 70,00 ($x + 15 = 55 + 15 = 70$).

Para comprovar se as quantias estão certas, vamos somar todas e verificar se é igual a 250.

$$55 + 60 + 65 + 70 = 250$$

$$250 = 250$$

Observação: Sempre associe o que você deve encontrar ao “**x**” da equação!

Exercício Proposto

03. (PUC RJ - 2003) $\frac{3}{5}$ de um número somados a $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{2}{3}$ desse mesmo número. Indique a opção que apresenta esse número.

a) 0

b) 1

c) $\frac{20}{33}$

d) $\frac{33}{20}$

e) $\frac{15}{2}$

Exercícios

01. (IFSC - 2018) Considere a equação $\frac{3x}{4} = 2x + 5$, e assinale a alternativa CORRETA.

a) É uma função do primeiro grau, sua solução é igual a -1 e seu conjunto solução é $S = \{-1\}$.

b) É uma equação racional, sua solução é igual a -4 e seu conjunto solução é $S = \{-4\}$.

c) É uma equação do primeiro grau, sua solução é igual a +4 e seu conjunto solução é $S = \{0\}$.

d) É uma equação do segundo grau, sua solução é igual a -4 e seu conjunto solução é $S = \{-4\}$.

e) É uma equação do primeiro grau, sua solução é igual a -4 e seu conjunto solução é $S = \{-4\}$.

02. (CEFET/MG - 2018) Numa família com 7 filhos, sou o caçula e 14 anos mais novo que o primogênito de minha mãe. Dentre os filhos, o quarto tem a terça parte da idade do irmão mais velho, acrescidos de 7 anos. Se a soma de nossas três idades é 42, então minha idade é um número

a) divisível por 5.

b) divisível por 3.

c) primo.

d) par.

03. (EPCAR - 2018) Uma revendedora de automóveis usados apresenta um modelo e o anuncia por x reais. Para atrair clientes, a revendedora oferece duas formas de pagamento:

Forma de pagamento	Valor
À vista	10% de desconto sobre o preço anunciado
Cartão de crédito	Com acréscimo de 20% sobre o preço anunciado, sendo o total dividido em 10 parcelas iguais

Um cliente comprou um automóvel e optou pelo pagamento no cartão de crédito em 10 parcelas iguais de R\$3240,00. Considerando as informações anteriores, é correto afirmar que:

a) o valor x anunciado pela revendedora é menor que R\$25000,00.

b) se esse cliente tivesse optado pelo pagamento à vista, então ele gastaria mais de R\$24500,00 com essa compra.

c) a opção que esse comprador fez usando o cartão de crédito representou um acréscimo de 30% sobre o valor que seria pago à vista.

d) se o cliente tivesse pago à vista, ao invés de utilizar o cartão de crédito, então teria economizado mais de R\$8000,00.

04. (UECE - 2009) Uma peça de tecido, após a lavagem, perdeu $\frac{1}{10}$ de seu comprimento e este ficou medindo 36 metros. Nestas condições, o comprimento, em m, da peça antes da lavagem, era igual a:

a) 44

b) 42

c) 40

d) 38

05. (IFS - 2015) Um professor gasta $\frac{1}{3}$ do seu salário com alimentação, $\frac{1}{2}$ com moradia e ainda lhe sobram R\$1200,00. Qual o salário desse professor?

- a) R\$2200,00
- b) R\$7200,00
- c) R\$7000,00
- d) R\$6200,00
- e) R\$5400,00

06. (IFRS - 2017) Pedro tinha x reais das suas economias. Gastou um terço no parque de diversões com os amigos. No outro dia, gastou 10 reais com figurinhas para seu álbum de jogadores de futebol. Depois saiu para lanche com seus colegas na escola gastando mais $\frac{4}{5}$ do que ainda tinha e ficou ainda com um troco de 12 reais. Qual o valor de x em reais?

- a) 75
- b) 80
- c) 90
- d) 100
- e) 105

07. (IFSC - 2017) Considerando a equação $-5(3x - 8) = -45$, é CORRETO afirmar que ela é equivalente a:

- a) $-8x - 58 = 0$
- b) $-8x - 32 = 0$
- c) $-15x - 53 = 0$
- d) $-15x + 85 = 0$
- e) $-15x + 5 = 0$

08. (EPCAR - 2012) Para que a equação $\frac{2x-3}{5} - \frac{x+6}{10} = \frac{1}{2} - kx$ seja impossível, o valor k deverá ser:

- a) -3
- b) $-\frac{3}{10}$
- c) 3
- d) $\frac{3}{10}$

09. (PUCCampinas SP - 2017) Na equação $7x - 5 = 5(x + 9) - 28$, o equilíbrio (a igualdade) se estabelece entre os dois membros na presença de um valor determinado de x , usualmente chamado de solução da equação. Atribuindo a x , não o valor que corresponde à solução da equação, mas um valor 6 unidades menor que a solução dessa equação, obtém-se uma diferença numérica entre os dois membros da equação original, que, em valor absoluto, é igual a:

- a) 5
- b) 17
- c) 0
- d) 12
- e) 23

10. (Fuvest - 1994) Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual o total de filhos e filhas do casal?

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

GABARITO

- | | | | | | |
|-----|-----|-----|------|-----|-----|
| 1)E | 2)C | 3)D | 4)C | 5)B | 6)E |
| 7)D | 8)B | 9)D | 10)E | | |

Equações do 2º Grau

As equações do 2º grau são bastante conhecidas na matemática, além de serem de extrema importância para resolver diversos problemas. Neste capítulo iremos aprender os métodos que podem ser utilizados para solucionar esse tipo de equação, especialmente o método conhecido como fórmula de Bháskara. Para isso, muitos exercícios precisam ser feitos para praticar esse assunto.

Definição

Denomina-se equação do segundo grau, na incógnita x , toda equação da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

em que os coeficientes **a**, **b** e **c** são números reais, com **a** ≠ 0.

Vejamos alguns exemplos de equações de 2º grau:

Exemplo 01. $x^2 - 4x + 4 = 0$

Exemplo 02. $12x^2 - 4x = 0$

Exemplo 03. $-x^2 + 49 = 0$

Exemplo 04. $12x^2 = 0$

Observe que nos exemplos acima, os coeficientes **b** e **c** podem ser iguais a zero. Entretanto, para que tenhamos uma equação do 2º grau, o coeficiente **a** não pode ser igual a zero ($a \neq 0$).

Exercícios Propostos

01. Identifique, nos exemplos acima, os coeficientes **a**, **b** e **c** das equações do 2º grau.

a) $a = \underline{1}$, $b = \underline{-4}$ e $c = \underline{4}$.

b) $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$ e $c = \underline{\quad}$.

c) $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$ e $c = \underline{\quad}$.

d) $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$ e $c = \underline{\quad}$.

É importante notar que nem todas as equações do 2º grau possuem todos os termos, o que acontece quando **b** e/ou **c** são iguais a zero. Nesse sentido, temos duas definições:

1) A equação do 2º grau é chamada de completa quando **b** e **c** são, ambos, diferentes de zero.

2) Caso tenhamos **b** e/ou **c** iguais a zero, a equação é chamada de incompleta.

Resolução de equações do 2º Grau Incompletas

As equações do 2º grau incompletas podem ser separadas em 3 formatos diferentes:

1) Equação do tipo $ax^2 + c = 0$

Nesse caso, passamos o coeficiente **c** para o outro lado da equação e, depois, dividimos por **a**. Por fim, tiramos a raiz quadrada do número obtido. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 05. Encontre a solução das equações abaixo.

a) $3x^2 - 27 = 0$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = \frac{27}{3} = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

b) $x^2 - 7 = 0$

$$x^2 = 7$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

No geral, se a equação é do tipo $ax^2 + c = 0$, as soluções serão da forma:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Observação: é necessário que a razão $-\frac{c}{a}$ seja um número positivo, visto que está dentro de uma raiz quadrada. Caso contrário, não teremos raízes reais.

II) Equação do tipo $ax^2 + bx = 0$

Nesse caso, devemos colocar em evidência os fatores comuns, sabemos que pelo menos " x " é fator comum. Com isso, teremos um produto de dois termos sendo igual a zero. Sendo assim, um desses dois fatores é, obrigatoriamente, igual a zero. Veja:

Exemplo 06. Encontre a solução das equações abaixo.

a) $4x^2 - 64x = 0$

$$4x(x - 16) = 0$$

$$4x = 0 \text{ ou } (x - 16) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 16$$

b) $5x^2 - 4x = 0$

$$x(5x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } (5x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{5}$$

Em geral, as equações que são do tipo $ax^2 + bx = 0$ podem ser fatoradas em $x(ax + b) = 0$, resultando em raízes na forma:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}.$$

III) Equação do tipo $ax^2 = 0$

Nesse caso, teremos um número diferente de zero multiplicando x^2 igualado à zero. Logo, x só pode ser igual a zero.

Exemplo 07. Encontre a solução da equação:

$$(5 - \sqrt{75})x^2 = 0$$

Como $(5 - \sqrt{75}) \neq 0$, então $x^2 = 0$, ou seja, $x = 0$.

Resolução de equação do 2º grau completa

Agora veremos dois métodos que podem ser utilizados para resolver qualquer equação do 2º grau completa. Caso a equação seja incompleta, esses métodos também poderão ser aplicados, contudo podem levar mais tempo para resolvê-las.

Fórmula de Bháskara

Seja a equação do 2º grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vamos dividir a equação por a , assim:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

Perceba que isso só pode ser feito se a for diferente de zero!

Agora, vamos simplificá-la:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Recordando do trinômio quadrado perfeito, temos que:

$$(x + m)x^2 = x^2 + 2mx + m^2$$

Note que o termo que multiplica “ x ” deve ser o dobro de um número m e o quadrado desse número m será o termo independente de x , ou seja, que não tem nenhum fator x multiplicando ele. Adotando essa estratégia:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Assim, temos que:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

O próximo passo é retirar a raiz quadrada dos dois lados:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Isso nos permite achar uma expressão geral, que nos dá como resultado as raízes de uma equação de 2º grau. Essa expressão geral é conhecida como fórmula de Bháskara:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veja que temos, em geral, duas raízes, uma quando pegamos o sinal positivo, ou seja, $x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, e a outra quando pegamos o sinal negativo, $x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Observações:

1) Para fins didáticos, chama-se a expressão $b^2 - 4ac = 0$ de discriminante da equação do segundo grau e é representado pela letra grega Δ (delta). Assim:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

2) De acordo com o valor do discriminante da equação do 2º grau, podemos fazer algumas considerações a respeito das raízes da equação:

a) Se $\Delta > 0$, teremos **duas** raízes reais.

b) Se $\Delta = 0$, teremos apenas **uma** raiz real e elas serão iguais, ou seja, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

c) Se $\Delta < 0$, **não** teremos raízes reais.

Exemplo 08. Resolva a seguinte equação do 2º grau:

$$x^2 - 14x + 45 = 0$$

Primeiro, vamos calcular o valor do discriminante Δ , utilizando a expressão:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Logo,

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (45) = 196 - 180$$

$$\Delta = 16$$

Substituindo o valor encontrado na fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 4}{2}$$

Resolvendo para os dois sinais, positivo e negativo, encontramos as duas raízes da equação. Sendo elas:

$$x_1 = 9 \text{ e } x_2 = 5$$

Exemplo 09. (PUC RJ/2001 - Adaptada) Encontre os valores de **k** para que a equação $x^2 - kx + 1 = 0$ tenha exatamente uma solução.

Solução:

É preciso saber a condição necessária para que a equação tenha exatamente uma solução. Desse modo, para que isso seja atendido, é necessário que o valor de delta seja igual a 0 ($\Delta = 0$).

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Temos que **a** = 1, **b** = -k e **c** = 1. Substituindo na expressão acima:

$$\Delta = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$(-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$k^2 = 4$$

$$k = \pm 2$$

Portanto, para que a equação tenha apenas uma solução **k** deve ser ± 2 .

Exercícios Propostos

02. (PUC RJ - 2002) Assinale a afirmativa correta. O polinômio $x^2 - ax + 1$:

- a)** tem sempre duas raízes reais.
- b)** tem sempre uma raiz real.
- c)** tem exatamente uma raiz real para $a = 2$
- d)** tem exatamente uma raiz real para infinitos valores de a .
- e)** tem exatamente uma raiz real para $a = 0$.

03. Encontre as raízes das equações do 2º grau:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $8x^2 - 28x + 20 = 0$

c) $2x^2 - 4x - 6 = 0$

Completando o trinômio quadrado perfeito

Outro método que pode ser utilizado para solucionar as equações do 2º grau é completando o trinômio quadrado perfeito.

O procedimento é análogo ao utilizado para a demonstração da fórmula de Bháskara. Para isso, deve-se ter em mente a fatoração do trinômio quadrado perfeito, ou seja, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Veja um exemplo de como encontrar a solução da equação, utilizando o método de completar o trinômio quadrado perfeito.

Exemplo 10. Encontre as raízes da seguinte equação:

$$9x^2 + 24x - 65 = 0$$

Solução:

Primeiro, iremos reescrever a equação, para que fique mais próxima ao de um trinômio quadrado perfeito:

$$(3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 4 - 65 = 0$$

Para que $(3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 4$ faça parte de um trinômio quadrado perfeito, o terceiro termo deveria ser 4^2 . Portanto, iremos somar e subtrair $4^2 (= 16)$ na equação, de forma que não altere a igualdade:

$$(3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 4 - 65 + 16 - 16 = 0$$

$$(3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 4 + 16 - 81 = 0$$

Agora, temos um trinômio quadrado perfeito:

$$(3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 4 + 16 = (3x + 4)^2$$

Então:

$$(3x + 4)^2 - 81 = 0$$

$$(3x + 4)^2 = 81$$

$$\sqrt{(3x + 4)^2} = \sqrt{81}$$

$$3x + 4 = \pm 9$$

$$x = \frac{-4 \pm 9}{3}$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ ou } x = -\frac{13}{3}$$

Relação entre os coeficientes da equação e suas raízes

Pela fórmula de Bháskara, temos que as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Assim, podemos chegar nas seguintes relações:

a) Soma das raízes:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Então:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

b) Produto das raízes:

$$x_1 \cdot x_2 =$$

$$\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Então:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Por exemplo, se temos uma equação $x^2 - 6x - 2 = 0$, então **a** = 1, **b** = -6 e **c** = -2. Desse modo, sabemos que a soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-6}{1} = 6$$

e o produto das raízes é:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-2}{1} = -2$$

Exemplo 11. (ESPM/SP - 2014) Se as raízes da equação $2x^2 - 5x - 4 = 0$ são **m** e **n**, o valor de $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ é igual a:

a) $-\frac{5}{4}$

b) $-\frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{7}{4}$

e) $\frac{5}{2}$

Solução:

Para resolver essa questão iremos utilizar o método da soma e produto das raízes.

Desenvolvendo a expressão da questão:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{n+m}{m*n}$$

Pela soma e multiplicação das raízes, temos:

$$m + n = -\frac{b}{a}$$

$$m * n = \frac{c}{a},$$

Sendo **a** = 2, **b** = - 5 e **c** = - 4, vamos substituir esses valores nas equações acima:

$$m + n = \frac{5}{2}$$

$$m * n = - 2.$$

Por fim,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{n+m}{m*n} = -\frac{5}{4}$$

Portanto, a resposta correta é a **alternativa A**.

Exercícios Propostos

04. (UFV MG/2008 - Adaptada) Qual a soma das raízes das equações $3x^2 - 5x - 2 = 0$ e $5x - 2 = 2x - 1$?

05. (PUC MG/2005 - Adaptada) Sabendo que os números reais **p** e **q** são as raízes da equação $15x^2 - 11x + 2 = 0$, qual o valor de $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$?

Forma fatorada da equação do 2º grau

A equação do 2º grau também pode ser escrita na forma fatorada. Nós vimos, no início desse capítulo, que podemos utilizar a fórmula de Bháskara para calcular as raízes da equação do 2º grau:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right)$$

E, pelas relações de soma e produto das raízes, temos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Substituindo na expressão anterior:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) \\ &= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Assim, chegamos na forma fatorada da equação do 2º grau:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Perceba que, se substituirmos **x**₁ e **x**₂ na equação, teremos que **x**₁ e **x**₂ satisfazem a igualdade, ou seja, são solução da equação.

Equações Biquadradas

As equações biquadradas são equações polinomiais do quarto grau, do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Mesmo não sendo uma equação do 2º grau, elas podem ser resolvidas por meio dos métodos de resolução para as equações de 2º grau. Para isso, é utilizado um artifício matemático que “transforma” a equação em uma

equação do 2º grau, que consiste em utilizar uma variável auxiliar (**k**). Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 12. Encontre as soluções da equação:

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0.$$

Primeiro, vamos adotar $k = x^2$, assim:

$$4k^2 - 17k + 4 = 0$$

Agora, temos uma equação do segundo grau em função da variável **k**. Portanto, podemos utilizar o método de Bháskara para resolvê-la. Primeiro, vamos encontrar o valor do discriminante (Δ) e, depois, substituí-lo na fórmula de Bháskara:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Sendo, **a** = 4, **b** = -17 e **c** = 4, temos que:

$$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 289 - 64$$

$$\Delta = 225 = (15)^2$$

Logo,

$$k = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(15)^2}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$$k = 4 \text{ ou } k = \frac{1}{4}$$

Entretanto, como $k = x^2$, então:

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

Portanto, as soluções são:

$$x = -2, x = 2, x = \frac{1}{2} \text{ e } x = -\frac{1}{2}.$$

Exercícios

01. (PUCCampinas/SP - 2011) Sobre o número de alunos arrebanhados pelo coronel para a ARA, sabe-se que, em certo ano, foi igual à maior das raízes da equação algébrica $x^2 + 2x - 15 = 0$ e que, no ano seguinte, foi igual à soma das raízes da equação algébrica $x^2 - 7x + 9 = 0$. Nessas condições, o total de alunos arrebanhados nesses dois anos é igual à raiz quadrada de:

- a) 169
- b) 144
- c) 121
- d) 100
- e) 81

02. (UEPB - 2011) A equação $2x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha = 0$, com $0 \leq \alpha \leq \pi$, não admite soluções reais, se:

- a) $0 < \alpha < \frac{2}{3}\pi$
- b) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \pi$
- c) $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$
- d) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
- e) $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

03. (UNIFOR/CE - 1998) Um aluno resolveu corretamente a equação do 2º grau $ax + b = 0$ e encontrou as raízes 1 e -3. Nessas condições, as soluções da equação $bx + a = 0$ são:

- a) -3 e -1
- b) -2 e 1

c) -1 e 3

d) 1 e 2

e) 1 e -3

04. (UFAM - 2007) As raízes da equação $x^2 + 7x + m = 0$, onde **m** é uma constante real e as raízes da equação são os números **x**₁ e **x**₂. Se **x**₁ = -2 e **x**₂ = 5, o valor da constante **m** é:

- a) 7
- b) 10
- c) -1
- d) -7
- e) 12

05. (EPCAR - 2007) As raízes da equação:

$$(2m + 1)x^2 - (3m - 1)x + m = 0$$

são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa 1. O valor de **m** é um número:

- a) par.
- b) ímpar.
- c) racional não inteiro.
- d) irracional.

06. (EPCAR - 2015) Uma professora de Matemática pediu que seus alunos resolvessem uma equação do segundo grau da forma $x^2 + bx + c = 0$, em que **b** e **c** ∈ ℝ. Mariana copiou o coeficiente “**c**” errado, obtendo $-\frac{1}{2}$ e 4 como raízes. Maria Clara copiou errado o coeficiente “**b**” e encontrou as raízes 1 e $-\frac{3}{2}$. Sobre a equação proposta pela professora, é correto afirmar que:

- a) uma das raízes é menor que 1.
- b) possui duas raízes inteiras e distintas.
- c) uma das raízes é maior que 3.
- d) não possui raízes reais.

07. (UECE - 2000) Para certos valores de k o produto das raízes da equação:

$$x^2 + 5kx + 3k^2 + 4 = 0,$$

é igual a 16. Para cada um destes valores, as raízes da equação são:

- a) reais e iguais
- b) números complexos, não reais
- c) números irracionais, diferentes
- d) ambas positivas ou ambas negativas

08. (FUVEST SP - 2008) A soma dos valores de m para os quais $x = 1$ é raiz da equação:

$$x^2 + (1 + 5m - 3m^2)x + (m^2 + 1) = 0$$

é igual a:

- a) $\frac{5}{2}$
- b) $\frac{3}{2}$
- c) 0
- d) $-\frac{3}{2}$
- e) $-\frac{5}{2}$

09. (UECE - 2013) Se k é um número inteiro qualquer, sobre as raízes da equação $x^2 + kx + k - 1 = 0$, pode-se afirmar corretamente que:

- a) são sempre números positivos.
- b) são sempre números negativos.

c) podem ser números inteiros e consecutivos.

d) podem ser números inteiros e pares.

10. (UNIFAP/AP - 2015) Dois alunos estudando sobre equações do segundo grau tentam resolver o seguinte problema. O produto de dois números é igual a -128 e a soma destes números dividido por 4 é igual a 7, quais são esses números. Qual é a alternativa que eles devem marcar como correta?

- a) 4 e -32
- b) 8 e -16
- c) -2 e 64
- d) 1 e -128

11. (PUC/RJ - 2006) A diferença entre as raízes do polinômio $x^2 + ax + (a - 1)$ é 1. Os possíveis valores de a são:

- a) 0 e 2
- b) 1 e 2
- c) 0 e 3
- d) 1 e 0
- e) 1 e 3

GABARITO

- | | |
|------|-------|
| 1) D | 8) A |
| 2) C | 9) C |
| 3) D | 10) E |
| 4) E | 11) E |
| 5) A | |
| 6) C | |
| 7) D | |

Sistemas de Equações

As equações matemáticas são utilizadas para resolver diversos problemas do nosso cotidiano, como vimos nos capítulos anteriores. Entretanto, nem sempre teremos equações com apenas uma variável, em muitos casos veremos mais de uma incógnita envolvida nas equações. Para resolver essas equações utilizamos uma ferramenta útil e importante, que são os Sistemas de Equações ou Sistemas Lineares. A finalidade do Sistema de Equações é encontrar possíveis soluções que os problemas oferecem. Neste Capítulo, veremos como montar um sistema de equações e abordaremos alguns métodos de como resolvê-lo.

Sistemas de Equações

Antes de falarmos sobre um sistema de equações, vamos definir o que são equações de 1º grau com duas variáveis.

Nós vimos no capítulo sobre equações de 1º grau que uma equação do 1º grau é representada pela expressão:

$$ax + b = 0$$

Em que **a** e **b** são números reais constantes e **x** representa a incógnita.

Agora, considere a seguinte equação:

$$2x + 3y = 11$$

Neste caso, a equação é denominada equação do 1º grau com duas variáveis, **x** e **y**.

Toda equação do 1º grau com duas variáveis pode ser reproduzida da seguinte forma:

$$ax + by = c$$

Em que **x** e **y** são denominadas incógnitas ou variáveis, **a** é o coeficiente de **x**, **b** é o coeficiente de **y** e **c** é o termo independente, com **a** e **b** diferentes de zero.

Sistemas de Equações

O sistema de equações é utilizado para resolver problemas em que há equações com mais de uma variável.

Um sistema de equações é formado por um conjunto de equações que apresentam mais de uma incógnita, sendo que tais equações estão relacionadas entre si.

Veja um exemplo de um sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

Note que cada equação possui as mesmas duas incógnitas (**x** e **y**).

Observação: Devemos escrever o sistema de equações abrigado por uma chave, isso indica que não podemos resolvê-las de forma isolada.

Exemplo 01. Monte um sistema de equações para o seguinte problema:

Um pai tem o dobro da idade de seu filho. A soma das idades deles é 54 anos. Quantos anos cada um tem?

Solução:

Para montar o sistema de equações, temos que determinar as variáveis presentes e a equação associada a cada uma delas.

Para o exemplo dado, temos duas variáveis que são: a idade do pai, que vamos chamar de **x**, e a idade de filho, que vamos chamar de **y**.

Pelo enunciado, o pai tem o dobro da idade do filho, ou seja:

$$x = 2y$$

E a soma das idades deles é igual a 54 anos:

$$x + y = 54$$

Logo, o sistema de equações é dada por:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 54 \end{cases}$$

Exercício proposto

01. Newton sacou R\$ 110,00 em um caixa eletrônico. No caixa havia disponível apenas cédulas de 10 e 20 reais. Considere **x** o número de cédulas de 10 reais e **y** o número de cédulas de 20 reais. Sabendo que Newton recebeu no total 8 cédulas, monte o sistema que permite determinar o número de cédulas de cada valor que Newton sacou?

Como vimos até agora, as equações apresentam mais de uma variável, sendo que os valores dessas variáveis (**x** e **y**) estão relacionados por meio de uma ligação de dependência, ou seja, os valores de **x** dependem dos valores de **y** e vice-versa. Vejamos o exemplo a seguir para entendermos

como funciona essa relação de dependência entre as incógnitas.

Exemplo 02. Considere a seguinte equação:

$$3x + 7y = 5$$

Vamos fazer **y** igual a 2 e substituí-lo na equação:

$$3x + 7 \cdot 2 = 5$$

$$3x + 14 = 5$$

$$3x = 5 - 14$$

$$3x = -9$$

$$x = -\frac{9}{3}$$

$$x = -3$$

Isso significa que quando **y** é igual a 2, obrigatoriamente, **x** deve ser igual a -3.

Quando temos mais de uma equação, ou seja, um sistema de equações precisamos encontrar os valores que satisfaçam, simultaneamente, todas as equações envolvidas. Esses valores são chamados de **solução do sistema** e é representado pela letra $S = \{(x; y)\}$.

Para encontrarmos a solução do sistema, utilizamos alguns métodos. Os dois mais utilizados são: o método da substituição e o método da adição.

Método da Substituição

O método da substituição consiste em escolher uma das equações e isolar uma das incógnitas, para determinar o seu valor em função da outra incógnita. Isso nos dá uma nova equação, ao mesmo tempo em que elimina uma das variáveis.

Vejamos um passo a passo de como resolver um sistema de equações aplicando o método da substituição.

Passo 1: Escolher uma equação e isolar uma das variáveis nessa equação.

Passo 2: Substituir a expressão obtida no passo 1 na outra equação. Esse procedimento resultará em uma única equação, com uma variável.

Passo 3: Resolver a equação obtida no passo 2 e encontrar o valor da incógnita.

Passo 4: Substituir o valor encontrado no passo 3 em qualquer uma das equações e encontrar o valor da outra incógnita.

Esse método é indicado para qualquer situação. Entretanto, precisamos ficar atentos! A expressão formada pela substituição pode gerar uma equação de segundo grau ou uma expressão mais complexa.

Exemplo 03. Encontre a solução do sistema de equações abaixo, aplicando o método da substituição.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Solução:

Para facilitar e não nos confundirmos, vamos enumerar as equações como (1) e (2):

$$\begin{cases} x + y = 7 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Agora, vamos aplicar os passos apresentados para a resolução do sistema.

Passo 1: Vamos escolher a equação (1) e isolar a variável x nesta equação:

$$\begin{aligned} x + y &= 7 & (1) \\ x &= 7 - y \end{aligned}$$

Note que não importa a equação ou variável que vamos isolar, os procedimentos e os resultados serão os mesmos.

Passo 2: Depois que isolamos a variável x na equação (1), vamos substituí-la na equação (2):

$$\begin{aligned} x - y &= 1 & (2) \\ (7 - y) - y &= 1 \end{aligned}$$

Agora, temos apenas uma equação com uma variável, sendo mais simples de resolvê-la.

Resolvendo a equação acima, encontraremos o valor da variável y :

$$7 - y - y = 1$$

$$7 - 2y = 1$$

$$- 2y = 1 - 7$$

$$- 2y = - 6$$

$$y = \frac{-6}{-2}$$

$$y = 3$$

Passo 3: Depois que encontramos o valor de **y**, temos que encontrar o valor de **x**. Para isso, vamos escolher uma das equações e substituir o valor de **x**.

Escolhendo a equação (1) e substituindo o valor de **y**, temos:

$$x + y = 7$$

$$x + 3 = 7$$

$$x = 7 - 3$$

$$x = 4$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é: $S = \{(4, 3)\}$.

Esse resultado indica que os valores de **x** e **y** que satisfazem, simultaneamente, as duas equações são 4 e 3.

Exercício Proposto

02. Encontre a solução para sistema obtido no **Exemplo 1**, utilizando o método da substituição.

Método da Adição

No método da adição, também conhecido como método da eliminação, temos que somar uma equação com a outra, a fim de eliminar uma das variáveis. Para isso, precisamos que as incógnitas somadas tenham o mesmo valor, mas com sinal contrário.

De uma forma geral, podemos seguir os seguintes passos para resolver o sistema utilizando esse método.

Passo 1: Primeiro temos que verificar se alguma das incógnitas possuem valores iguais e sinais contrários, uma vez que o objetivo é encontrar uma só equação com apenas uma incógnita. Caso não possua, temos

que multiplicar uma ou as duas equações por algum número, para obter coeficientes opostos para **x** ou **y**. Lembre-se, temos que multiplicar toda a equação, assim os números mudam de forma proporcional e garante que o resultado será o mesmo.

Passo 2: Realizar a operação de adição com as equações do sistema. Quando realizamos a adição, eliminamos uma variável e obtemos uma nova equação com apenas uma incógnita.

Passo 3: Resolver a equação obtida no passo 2.

Passo 4: Substituir o valor da variável obtido no passo 3 em qualquer uma das equações e encontrar o valor da segunda variável.

Esse método é indicado para os casos em que uma das incógnitas aparece na primeira equação com valor positivo e na segunda com o mesmo valor, mas negativo. Se as equações não estiverem dispostas dessa forma e, mesmo assim, você quiser utilizar esse método, basta realizar a multiplicação das equações para que fique na forma necessária.

Veja o exemplo a seguir para entender melhor como utilizar esse método.

Exemplo 04. Vamos encontrar a solução do mesmo sistema de equações do exemplo anterior, mas aplicando o método da adição.

Solução:

Considerando o sistema com as duas equações:

$$\begin{cases} x + y = 7 & (1) \\ x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

Vamos aplicar os passos apresentados para encontrarmos a sua solução:

Passo 1: No método da adição, temos que eliminar uma das variáveis ao realizar a adição de uma equação com a outra, ou seja, o coeficiente (que acompanha uma das variáveis) tem ser o mesmo, mas com sinais opostos.

No caso do exemplo, observe que a equação (1) tem o termo **+y**, e a equação (2) possui o termo **-y**. Então, não precisamos realizar nenhuma modificação nas equações.

Passo 2: Vamos realizar a operação de adição entre as equações (1) e (2):

$$\begin{array}{r} +x + y = 7 \quad (1) \\ +x - y = 1 \quad (2) \\ \hline 2x + 0 = 8 \end{array}$$

Ao somarmos as duas equações membro a membro, eliminamos a variável **y** e obtemos uma nova equação, com apenas uma incógnita (**x**).

Passo 3: Resolvendo a equação obtida no passo 2, encontramos o valor de **x**:

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Passo 4: Agora que temos o valor de **x**, é só substituímos em uma das equações para encontrar o valor de **y**. Escolhendo a equação (1), temos:

$$x + y = 7$$

$$4 + y = 7$$

$$y = 7 - 4$$

$$y = 3$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é: $S = \{(4, 3)\}$.

Esse resultado indica que os valores de **x** e **y** que satisfazem, simultaneamente, as duas equações são 4 e 3.

Note que os resultados utilizando o método da adição foram os mesmos obtidos quando utilizamos o método da substituição. Como o sistema não mudou, a solução é a mesma independente do método escolhido.

No exemplo anterior foi simples resolver pelo método da adição, pois os coeficientes de **y** já tinham valores iguais com sinais opostos. Agora veremos um exemplo em que isso não ocorre.

Exemplo 05. Encontre a solução do sistema de equações abaixo, utilizando o método da adição.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

Solução:

Primeiramente, vamos enumerar as equações para facilitar a resolução do problema:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \quad (1) \\ 3x + 2y = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Vamos aplicar os passos para encontrarmos a solução do sistema.

Passo 1: Diferente do exemplo anterior, nenhuma das variáveis possuem valores iguais com sinais opostos. Sendo assim, seria inútil somar imediatamente as equações. Entretanto, podemos manipular as equações, de modo a obter termos opostos.

Se observamos as duas equações, vemos que o MMC entre 5 e 2 (coeficientes de **y** nas duas equações) é 10. Então, podemos multiplicar a equação (1) por 2 e a equação (2) por -5:

$$\begin{cases} (2x + 5y = 16) \cdot (2) \\ (3x + 2y = 2) \cdot (-5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 10y = 32 \\ -15x - 10y = -10 \end{cases}$$

Veja que com essas manipulações, conseguimos obter termos opostos nas duas equações: **10y** (na equação 1) e **-10y** (na equação 2).

Agora é só seguir o mesmo procedimento do exemplo 4 para encontrar os valores de **x** e **y**.

Passo 2: Vamos realizar a operação de adição entre as equações (1) e (2) modificadas:

$$\begin{array}{r} + \quad 4x + 10y = 32 \\ -15x - 10y = -10 \\ \hline -11x + 0 = 22 \end{array}$$

Passo 3: Resolvendo a equação obtida no passo 2, encontramos o valor de **x**:

$$-11x = 22$$

$$x = \frac{22}{-11}$$

$$x = -2$$

Passo 4: Agora que temos o valor de **x**, é só substituímos em uma das equações para encontrar o valor de **y**. Escolhendo a equação (2), temos:

$$3x + 2y = 2$$

$$3 \cdot (-2) + 2y = 2$$

$$-6 + 2y = 2$$

$$2y = 2 + 6$$

$$2y = 8$$

$$y = \frac{8}{2}$$

$$y = 4$$

Portanto, o conjunto solução para esse sistema é $S = \{-2, 4\}$.

Exercício proposto

03. Determine a solução para o sistema de equações encontrado no **Exercício proposto 01**.

Tanto o método da substituição quanto o método da adição podem ser utilizados para resolver qualquer tipo de sistema de equações. Entretanto, fique atento porque cada um pode ser melhor para uma determinada situação. Então, na hora de resolver, escolha o que for mais conveniente e que resulte em uma solução mais simples.

Observação: Para ambos os métodos, podemos simplificar as equações antes de iniciar a resolução, como combinar termos semelhantes,

remover parênteses ou frações. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 06. Considere a seguinte equação:

$$2x - 6 = 5 - 3y$$

Podemos escrevê-la como uma equação equivalente mais simples:

$$2x + 3y = 5 + 6$$

$$2x + 3y = 11$$

Exemplo 07. Considere a seguinte equação:

$$\frac{5}{4}x + 2y = 5$$

Podemos escrevê-la como uma equação equivalente mais simples, multiplicando toda a equação por 4, para eliminarmos a fração:

$$4 \cdot \frac{5}{4}x + 4 \cdot 2y = 4 \cdot 5$$

$$5x + 8y = 20$$

Exercício proposto

04. Resolva os sistemas de equações utilizando os dois métodos (substituição e adição) Depois indique qual o melhor método para cada sistema. Dica: Algumas equações podem ser simplificadas antes de iniciar a solução do sistema.

a)

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = 1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$$

Classificação dos sistemas de equações

Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Os sistemas de equações do primeiro grau podem ser classificados, de acordo a possibilidade e quantidade de soluções, em:

1. Possível e determinado
2. Possível e indeterminado
3. Impossível

Agora veremos com detalhes as condições de cada um dos sistemas.

Possível e determinado

Um sistema de equações é classificado como possível e determinado quando possui somente **uma única solução**.

O sistema de equações será possível e determinado quando:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Em que **a** e **b** são os coeficientes das equações.

Possível e indeterminado

Um sistema de equações é classificado como possível e indeterminado quando possui **infinitas soluções**.

A condição para que se tenha um sistema possível e indeterminado é:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Em que **a**, **b** e **c** são os coeficientes das equações.

Impossível

Um sistema de equações é classificado como impossível quando **não possui nenhuma solução**.

O sistema será impossível quando:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Em que **a**, **b** e **c** são os coeficientes das equações.

Exemplo 08. Considere o sistema abaixo e classifique-o em: possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$$

Solução:

Primeiro, vamos identificar os coeficientes e depois calcular as razões entre eles:

$$a_1 = 4, a_2 = 6, b_1 = 1, b_2 = -2, \\ c_1 = 2 \text{ e } c_2 = 3$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3}$$

Como $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, o sistema é classificado como possível e determinado.

Exercícios propostos

05. Analise os sistemas de equações abaixo e classifique-os em possível determinado, possível e indeterminado ou impossível.

a)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x + 6y = 26 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x + 6y = 17 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

Exercícios

01. (Colégio Militar/RJ - 2014) Um trem viaja de uma cidade a outra sempre com velocidade constante. Quando a viagem é feita com 16 km/h a mais na velocidade, o tempo gasto diminui em duas horas e meia, e quando é feita com 5 km/h a menos na velocidade, o tempo gasto aumenta em uma hora. Qual é a distância entre estas cidades?

- a) 1200 km
- b) 1000 km
- c) 800 km
- d) 1400 km
- e) 600 km

02. (EPCAR - 2012) Pitágoras e Tales possuem hoje, cada um, certa quantia em reais. Se Pitágoras desse para Tales 50 reais, eles ficariam com a mesma quantia em reais cada um. Porém se Tales desse para Pitágoras 100 reais, Tales passaria a ter $\frac{1}{4}$ da quantia de Pitágoras.

Dessa forma, é correto afirmar que:

- a) a quantia que os dois possuem hoje, juntos, é menor que 600 reais.
- b) Pitágoras possui hoje, $\frac{2}{3}$ do que Tales possui.
- c) Tales possui hoje, mais que 220 reais.
- d) a diferença entre os valores que eles possuem hoje é menor que 100 reais.

03. (CEFET - RJ - 2016) Uma garrafa PET (politeftalato de etileno) com sua tampa custa sessenta centavos. Sabendo que a garrafa custa cinquenta centavos a mais que a

tampa, quanto custa apenas a tampa?

- a) R\$ 0,05
- b) R\$ 0,15
- c) R\$ 0,25
- d) R\$ 0,35

04. (EPCAR - 2009) Se as 156 camas de um dormitório forem distribuídas em x fileiras horizontais iguais, contendo y camas cada, sobrarão 6 camas. Se as mesmas 156 camas forem distribuídas em $(x + 5)$ fileiras horizontais iguais, contendo $(y - 1)$ camas cada, ainda continuarão sobrando 6 camas. Então, $(x + y)$ é igual a:

- a) 31
- b) 30
- c) 29
- d) 28

05. (EPCAR - 2010) Considere três números naturais **a**, **b** e **c**, nessa ordem. A soma desses números é 888, a diferença entre o primeiro e o segundo é igual ao terceiro.

O terceiro deles excede o segundo em 198, O valor da diferença entre o primeiro e o terceiro é tal que excede 90 em:

- a) 23
- b) 33
- c) 43
- d) 53

06. (ENEM - 2015) Uma barraca de tiro ao alvo de um parque de diversões dará um prêmio de R\$ 20,00 ao participante, cada vez que ele acertar o alvo. Por outro lado, cada vez que ele errar o alvo, deverá pagar R\$ 10,00. Não há cobrança inicial para participar do jogo. Um participante deu 80 tiros, e, ao final, recebeu R\$ 100,00. Qual foi o número de vezes que esse participante acertou o alvo?

- a) 30
- b) 36
- c) 50
- d) 60
- e) 64

07. (UERJ - 2015) Observe a imagem:



Adaptado de mundinho infantil.blogspot.com.br.

De acordo com os dados do quadrinho, a personagem gastou R\$ 67,00 na compra de x lotes de maçã, y melões e quatro dúzias de bananas, em um total de 89 unidades de frutas. Desse total, o número de unidades de maçãs comprado foi igual a:

- a) 24
- b) 30
- c) 36
- d) 42

08. (ENEM - 2000) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é:

- a) 20
- b) 30
- c) 40
- d) 50
- e) 60

09. (EsPCEx - 2010) Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ ax + 2y = b \end{cases}$$

Para que esse sistema seja possível e determinado, o valor de $a + b$ é:

- a) - 1
- b) 4
- c) 9
- d) 14
- e) 19

10. (EPCAR - 2018) Gabriel, depois de uma longa temporada de dedicação aos estudos, foi descansar na casa de seus avós, no interior. Lá chegando, percebeu que muitas coisas de sua infância ainda permaneciam intocáveis. Exemplo disso foi a “venda” de seu avô... uma verdadeira bagunça!

Para ajudar na organização da “venda”, Gabriel aplicou conhecimentos de matemática básica. Assim, ele pegou os quatro sacos de café que ficavam à frente do balcão, pesou-os (em kg) e etiquetou-os conforme ilustra a Figura 1.

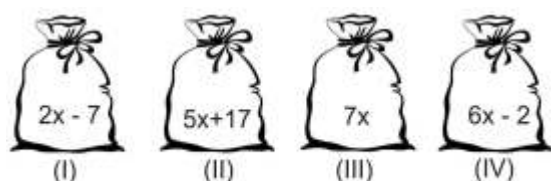


Figura (1) – Peso, em kg, dos sacos de café.

Em seguida, com o total de peso que obteve, retirou ou colocou, em kg, café em cada saco, e anotou numa folha de papel como mostra a Figura 2.

No saco (I): (+) m
No saco (II): (-) $2y - 3$
No saco (III): (-) n
No saco (IV): (-) $y + 2$

Figura (2) – Anotação de troca de peso, em kg, entre os sacos de café.

Na Figura 2, o símbolo de (+) indica que aquele saco recebeu alguns quilogramas de café, descrito logo à frente do símbolo, bem como o de (-)

indica que dele foram retirados alguns quilogramas de café, também descrito logo à frente do símbolo.

Para não perder as contas, Gabriel anotou, também, que:

- o produto da quantidade retirada do saco II pela quantidade retirada do saco IV é igual a 165.

- depois de acrescentar ou retirar café nos sacos, todos passaram a ter a mesma quantidade em kg.

Dessa forma, sendo $\{x, y, m, n\} \subset \mathbb{R}^*$, é correto afirmar que:

a) a maior quantidade que foi retirada de um dos sacos de café foi superior a 30 kg.

b) na Figura (1), a diferença de peso entre os sacos III e I era de 82 kg.

c) $x + y = m$

d) $\frac{m}{n} > 2$

GABARITO

- 1) A
- 2) A
- 3) A
- 4) A
- 5) B
- 6) A
- 7) C
- 8) B
- 9) D
- 10) B

Equações Irracionais

As expressões e equações matemáticas são divididas segundo alguns critérios, como o conjunto de números que abrangem, o grau do expoente, dentre outros. Nos capítulos anteriores, aprendemos sobre as equações racionais, que são aquelas em que a incógnita está no denominador de uma fração. Agora, veremos sobre as equações irracionais, que são aquelas em que a variável está no radicando de uma raiz. Neste capítulo, iremos aprender como resolver as equações irracionais e todos os parâmetros que devem ser levados em consideração na hora de solucionar os problemas.

Definição

Antes de definir o que é uma equação irracional, vamos relembrar a definição de potenciação e radiciação.

A potenciação é definida como a operação matemática que representa a multiplicação de diversos fatores iguais. Enquanto, a radiciação é a operação inversa da potenciação, ou seja, a radiciação busca um número que satisfaça determinada potência.

A radiciação pode ser escrita, de um modo geral, como:

$$^n\sqrt{a} = b$$

Em que n é o índice ($n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$), a é o radicando, b é a raiz e $\sqrt{}$ é chamado de radical.

Uma equação irracional é aquela em que a incógnita aparece no radicando, ou seja, o “ x ” está dentro de uma raiz. Veja alguns exemplos de equações irracionais:

Exemplo 01. $\sqrt{x} = y$

Exemplo 02. $\sqrt{x} + x = 180$

Exemplo 03. $\sqrt[3]{3x - 1} + 5 = 10$

Exemplo 04. $\frac{\sqrt[4]{x+192} + x}{4} = 17$

Exemplo 05. $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x - 1} = 6$

Note que a equação irracional pode ter qualquer índice no radical, como raiz cúbica ($n = 3$), raiz quarta ($n = 4$) e assim sucessivamente. Entretanto, a mais comum é a raiz quadrada ($n = 2$).

Além disso, é válido ressaltar que outras operações matemáticas podem ocorrer dentro da raiz, como mostra os **Exemplos 3 e 4**.

Métodos de resolução

Como temos visto nos outros capítulos, resolver uma equação significa encontrar o valor da incógnita de modo que satisfaça a condição de igualdade.

Então, para desenvolver uma equação irracional, precisamos eliminar o radical dos cálculos, caso contrário, não conseguiremos encontrar uma solução.

Para isso, de uma forma geral, isolamos o radical e utilizamos a potenciação, uma vez que são operações inversas. Quando fazemos isso, transformamos uma equação irracional em racional, sendo possível resolvê-las.

Note que é importante que você tenha em mente as propriedades da potenciação e da radiciação, vistas no Capítulo Potenciação e Radiciação, pra um melhor entendimento desse conteúdo.

Agora, veremos alguns passos que podem ser seguidos para resolver uma equação irracional.

Passo 1. Isolar o radical em um dos membros da equação.

Passo 2. Aplicar a propriedade do inverso da raiz, que é elevar os dois membros da equação a um expoente adequado, de modo que elimine o radical. Observe que devemos elevar ambos os membros da equação para manter a igualdade válida (Princípio de Equivalência).

Passo 3. Se ainda restar um ou mais radicais, repete-se os passos anteriores até não restar mais nenhum radical.

Passo 4. Resolver a expressão resultante e encontrar o valor da incógnita.

Passo 5. Verificar se as soluções encontradas são verdadeiras. Para isso, substituímos o valor encontrado na equação original e comprovamos se os valores são iguais. Esse passo é muito importante e não devemos esquecer de realizá-lo, pois ele é quem define as soluções da equação.

Condição de existência de radicais

Para que um número negativo esteja no radicando de uma raiz enésima, o valor do índice n tem que ser um número ímpar; assim, a raiz pertence ao conjunto dos números reais.

Se o valor do índice n é um número par, os valores do radicando devem ser, obrigatoriamente, positivos. Caso contrário, não teríamos raízes reais para este caso.

Veja:

a) Índice ímpar:

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \Leftrightarrow (-2)^5 = -32$$

b) Índice par:

$$\sqrt[4]{-81} \notin \mathbb{R}$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow (3)^4 = 81$$

Vejamos alguns exemplos de como resolver as equações irracionais para um melhor entendimento do conteúdo.

Exemplo 06. (UTFPR/Adaptada - 2012) Qual o valor de x para a seguinte equação irracional:

$$\sqrt{9x - 14} = 2$$

Solução:

Como trata-se de uma equação irracional, o primeiro passo para resolvê-la seria transformá-la em uma equação racional. Para isso, temos que eliminar o radical da expressão.

O radical já está isolado em um dos lados da igualdade. Então, o próximo passo seria elevar os dois membros

da equação a um expoente adequado.

Para que se consiga eliminar a raiz, o expoente utilizado tem que ter o mesmo valor que o índice da raiz; pois, pela propriedade de radiciação:

$$(\sqrt[a]{x})^a = x.$$

Assim:

$$(\sqrt{9x - 14})^2 = 2^2$$

Não podemos esquecer de elevar ao expoente os dois lados da igualdade, senão não manteríamos a equivalência da equação.

Agora, podemos eliminar o radical, transformando-a em uma equação racional e, portanto, sendo mais simples de resolver:

$$9x - 14 = 4$$

$$9x = 4 + 14$$

$$9x = 18$$

$$x = \frac{18}{9} = 2$$

Depois que encontramos o valor da incógnita, temos que substituí-la na expressão original para verificar se é verdadeira:

$$\sqrt{9x - 14} = 2$$

$$\sqrt{9 \cdot 2 - 14} = 2$$

$$\sqrt{18 - 14} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2$$

Portanto, $x = 2$ é solução da equação.

Exemplo 07. Encontre o valor de x para na equação irracional:

$$\sqrt[3]{3x - 1} = 3$$

Solução:

Novamente, temos que eliminar o radical da expressão. Como o índice do radical é 3, vamos elevar os dois membros da equação a a 3.

$$(\sqrt[3]{3x - 1})^3 = 3^3$$

Agora, podemos eliminar o radical, transformando-a em uma equação racional e, portanto, sendo mais simples de resolver:

$$3x - 1 = 27$$

$$3x = 27 + 1$$

$$3x = 28$$

$$x = \frac{28}{3}$$

Depois que encontramos o valor da incógnita, temos que substituí-la na expressão original para verificar se é verdadeira:

$$\sqrt[3]{3x - 1} = 3$$

$$\sqrt[3]{3 \cdot \frac{28}{3} - 1} = 3$$

$$\sqrt[3]{28 - 1} = 3$$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

$$3 = 3$$

Portanto, $x = 3$ é solução da equação.

Exemplo 08. Determine os valores reais de x para os quais se tem:

$$\sqrt{x^2 - 12x + 36} - 7 = 0$$

Solução:

Novamente, temos uma equação irracional. Neste caso, antes de elevar os membros a um expoente, vamos isolar o radical de um lado da igualdade, para simplificar os cálculos:

$$\sqrt{x^2 - 12x + 36} = 7$$

Elevando os dois lados ao quadrado, conseguimos eliminar o radical:

$$\left(\sqrt{x^2 - 12x + 36}\right)^2 = 7^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = 49$$

$$x^2 - 12x + 36 - 49 = 0$$

$$x^2 - 12x - 13 = 0$$

Note que temos uma equação do 2º grau, então teremos dois valores possíveis de x . Vamos resolvê-la, pelo método de Bháskara, para encontrar esses valores:

Sendo $a = 1$, $b = -12$ e $c = -13$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4(1)(-13)$$

$$\Delta = 144 + 52 = 196$$

Assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{196}}{2(1)}$$

$$x_1 = \frac{12 + 14}{2} = 13$$

$$x_2 = \frac{12 - 14}{2} = -1$$

Substituindo os valores de x_1 e x_2 na expressão original:

Para $x_1 = 13$:

$$\sqrt{13^2 - 12 \cdot 13 + 36} - 7 = 0$$

$$\sqrt{169 - 156 + 36} - 7 = 0$$

$$\sqrt{49} - 7 = 0$$

$$7 - 7 = 0$$

$$0 = 0$$

Para $x_2 = -1$:

$$\sqrt{(-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 36} - 7 = 0$$

$$\sqrt{1 + 12 + 36} - 7 = 0$$

$$\sqrt{49} - 7 = 0$$

$$7 - 7 = 0$$

$$0 = 0$$

Portanto, $x = 13$ e $x = -1$ são soluções da equação irracional.

Exemplo 09. Calcule o valor de x , pertencente aos reais, sabendo que:

$$\sqrt{13 + \sqrt{12 - x}} - 4 = 0$$

Solução:

Novamente, temos uma equação irracional. Neste caso, antes de elevar os membros a um expoente, vamos isolar o radical de um lado da igualdade, para simplificar os cálculos:

$$\sqrt{13 + \sqrt{12 - x}} = 4$$

Elevando os dois lados ao quadrado, conseguimos eliminar o radical:

$$(\sqrt{13 + \sqrt{12 - x}})^2 = 4^2$$

$$13 + \sqrt{12 - x} = 16$$

$$\sqrt{12 - x} = 16 - 13$$

$$\sqrt{12 - x} = 3$$

Mesmo elevando os membros ao quadrado, ainda temos um radical presente na expressão. Portanto, vamos repetir o procedimento, ou seja, vamos elevar os dois lados da igualdade mais uma vez ao quadrado, de modo a extrair esse radical:

$$(\sqrt{12 - x})^2 = 3^2$$

$$12 - x = 9$$

$$-x = 9 - 12$$

$$x = 3$$

Substituindo os valores encontrado na expressão original:

$$\sqrt{13 + \sqrt{12 - 3}} - 4 = 0$$

$$\sqrt{13 + \sqrt{9}} - 4 = 0$$

$$\sqrt{13 + 3} - 4 = 0$$

$$\sqrt{16} - 4 = 0$$

$$4 - 4 = 0$$

$$0 = 0$$

Portanto, $x = 3$ é solução da equação.

Exemplo 10. Determine a solução da equação irracional a seguir, com x pertencente aos reais:

$$2 + \sqrt{2x - 1} = x$$

Solução:

Novamente, temos uma equação irracional. O primeiro passo é isolar o radical em um dos lados da igualdade:

$$\sqrt{2x - 1} = x - 2$$

Elevando os dois lados ao quadrado, conseguimos eliminar o radical:

$$(\sqrt{2x - 1})^2 = (x - 2)^2$$

$$2x - 1 = (x)^2 - 4x + 4$$

Note que temos uma equação do 2º grau. Vamos agrupar os termos e resolvê-la:

$$x^2 - 4x + 4 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Sendo $a = 1$, $b = -6$ e $c = 5$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5)$$

$$\Delta = 36 + 20 = 16$$

Assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$

$$x_1 = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

Substituindo os valores de x_1 e x_2 na expressão original:

Para $x_1 = 5$:

$$2 + \sqrt{2 \cdot 5 - 1} = 5$$

$$2 + \sqrt{10 - 1} = 5$$

$$2 + \sqrt{9} = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

$$5 = 5$$

Para $x_2 = 1$:

$$2 + \sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 1$$

$$2 + \sqrt{2 - 1} = 1$$

$$2 + 1 = 1$$

$$3 \neq 1 \text{ (não válida)}$$

Portanto, apenas $x = 5$ é solução da equação irracional.

Exercícios Propostos

01. Analise as equações a seguir:

I. $\sqrt{3} + x = 5$

II. $\sqrt{3 - 2} = x^2 + 4$

III. $\sqrt{3x - 2} + x = 0$

A equação que pode ser classificada como irracional é:

- a)** Somente a equação I.
- b)** Somente a equação II.
- c)** Somente a equação III.
- d)** Nenhuma das equações.

02. Resolva a equação irracional no conjunto dos números reais:

$$\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x - 11} = 0$$

03. Encontre as possíveis soluções da equação abaixo, com $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{x^2 + 3x - 1} + 5 = 8$$

04. Dado $m > 0$, a equação $\sqrt{x + m} = x - \sqrt{m}$ admite:

- a)** unicamente a raiz nula.
- b)** uma raiz real e positiva.
- c)** uma única real e negativa.
- d)** duas raízes reais, sendo uma nula.
- e)** duas raízes e simétricas.

Exercícios

01. (EPCAR - 2024) Se p é a raiz da equação irracional $\sqrt{x^2 + 5x} = 14 - 2x$, então p pode ser o lado de um triângulo cujos outros lados medem:

- a) 3, 5 e 4.
- b) 5 e 9.
- c) 7 e 2,5.
- d) 13 e 8,5.

02. (Colégio Naval - 2014) A solução real da equação $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$ é:

- a) múltiplo de 3.
- b) par e maior do que 17.
- c) ímpar e não primo.
- d) um divisor de 130.
- e) uma potência de 2.

03. (PUC/RJ - 2008) O número de soluções da equação $x = \sqrt{6-x}$, com $x > 0$, é igual a:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

04. (EPCAR - 2013) A equação $x = \sqrt{3x + a^2 + 3a}$, em que x é a

incógnita e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < -3$, possui conjunto solução S , $S \subset \mathbb{R}$.

Sobre S tem-se as seguintes proposições:

- I) Possui exatamente dois elementos.
- II) Não possui elemento menor que 2.
- III) Possui elemento maior que 3.

Sobre as proposições acima, são verdadeiras:

- a) apenas I e II.
- b) apenas I e III.
- c) apenas II e III.
- d) I, II e III.

05. (UFV - 2000) Sobre a equação irracional $\sqrt{x^2 + 1} = x - 1$, é CORRETO afirmar que:

- a) Não possui raízes reais.
- b) Possui apenas uma raiz real.
- c) Possui duas raízes reais distintas.
- d) É equivalente a uma equação do 2º grau.
- e) É equivalente a uma equação do 1º grau.

06. (UTFPR - 2007) Adriana e Gustavo estão participando de uma gincana na cidade de Curitiba e receberam a seguinte tarefa:

Trazer a fotografia da construção localizada na rua XV de Novembro, número N , tal que:

a e b são as raízes da equação irracional: $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} = x + 3$;

$$N = (a^2 + b^2 + 13)^2 + (a + b)^2 - 10$$

- a) 1515
- b) 1296

c) 971

d) 775

e) 535

07. (Colégio Naval - 2011) Qual a solução, no conjunto dos números reais, da equação:

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = x$$

a) $x = \frac{1}{2}$

b) $x = -1$

c) $x = 1$

d) $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$

e) $x = -\frac{1}{2}$

08. (Colégio Naval - 2016) O conjunto solução da equação

$x + 1 = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$ em $\mathbb{R}$.
conjunto dos números reais, é:

a) $\mathbb{R}$

b) $[-1, \infty[$

c) $\mathbb{R} - [-1, \infty[$

d) $[0, \infty[$

e) $[-\frac{1}{2}, \infty[$

09. (OBMEP - 2012) Quantas vezes 17^2 deve aparecer dentro do radicando na igualdade:

$$\sqrt{17^2 + 17^2 + \dots + 17^2} = 17^2 + 17^2 + 17^2$$

para que ela seja verdadeira:

a) 9

b) 51

c) 289

d) 861

e) 2601

10. (EPCAR - 2015) Considere $p \in \mathbb{R}_+^*$ e a equação $\sqrt{x-p} - \sqrt{p} + \sqrt{2x-p} = 0$ na variável x .

Sobre o conjunto solução dessa equação, pode-se afirmar que:

a) possui um único elemento positivo.

b) não possui elemento.

c) possui dois elementos positivos.

d) possui dois elementos de sinais opostos.

GABARITO

- 1) A
- 2) D
- 3) B
- 4) C
- 5) A
- 6) C
- 7) A
- 8) E
- 9) E
- 10) A

Noções de Conjuntos

O estudo sobre teoria dos conjuntos é atribuído ao russo George Ferdinand Cantor (1845 – 1918). Os conjuntos representam a reunião de diversos objetos com características comuns. É importante compreender a teoria dos conjuntos, pois ela é fundamental para a resolução de diversos problemas da matemática.

Noções primitivas

Antes de iniciarmos os estudos sobre a teoria dos conjuntos, iremos definir alguns conceitos básicos para o completo entendimento do assunto.

Conjunto

Um conjunto pode ser definido como um agrupamento, coleção ou sistema, contendo nenhum, um ou mais elementos. A representação de um conjunto é feita por uma letra maiúscula do alfabeto.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos:

1. Conjunto de números primos;
2. Conjunto de números ímpares positivos;
3. Conjuntos das vogais;
4. Conjunto dos biomas brasileiro.

Elemento

É definido como cada membro ou componente que pertencem ao conjunto.

Veja os exemplos:

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13 são alguns dos elementos do conjunto dos números primos.

2. 1, 3, 5, 7, 9 são alguns dos elementos do conjunto dos números ímpares positivos.

3. a, e, i, o, u são os elementos do conjunto das vogais.

4. Cerrado é um elemento pertencente ao conjunto dos biomas brasileiro.

Relação de Pertinência

A relação de pertinência está associada ao elemento que faz parte de um conjunto, ou seja, indica se o elemento pertence ($\in$) ou não pertence ($\notin$) a um determinado conjunto.

De forma geral, seja A um conjunto e x um elemento. Se x é um membro do conjunto A , escrevemos:

$$x \in A$$

Lê-se: “ x pertence à A ” ou “ x é elemento de A ”.

Entretanto, se x não é um elemento do conjunto A , escrevemos:

$$x \notin A$$

Lê-se “ x não pertence à A ” ou “ x não é elemento de A ”.

Por exemplo, o número 2 pertence ao conjunto dos números primos, enquanto o número 4 não pertence a este conjunto.

Representação de um conjunto

A representação de um conjunto pode ser feita de três maneiras distintas: extensão, graficamente e compreensão.

Extensão

Na representação por extensão é feita a descrição elemento a elemento, ou seja, os elementos de um conjunto são listados um a um entre chaves ($\{ \}$) e separados por vírgulas.

Exemplo 01. Conjunto das vogais:

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

Note que o nome do conjunto é sempre representado por letras maiúsculas.

Exemplo 02. Conjunto dos números primos:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

As reticências indicam que o conjunto é infinito.

Diagrama de Venn-Euler

Outra maneira muito comum é representar um conjunto graficamente, por meio de um diagrama. Esse diagrama recebe o nome de Diagrama de Venn ou Diagrama de Venn-Euler.

Veja a representação do conjunto das vogais (V) e dos números primos (P) pelo Diagrama de Venn-Euler:



Compreensão

Nesse tipo de representação é indicada uma característica comum a todos os elementos do conjunto. Veja os exemplos:

$$V = \{x \mid x \text{ é uma vogal}\}.$$

Lê-se “os elementos do conjunto V são letras quaisquer “ x ” tais que esses “ x ” são vogais. Isso significa que o conjunto V possui elementos, representados por x , que são vogais.

$$P = \{y \mid y \text{ é um número primo}\}.$$

Lê-se “os elementos do conjunto P são números quaisquer “ y ” tais que esses “ y ” são números primos. Isso significa que o conjunto P possui elementos, representados por y , que são números primos.

Exemplo 03. Represente o seguinte o conjunto A na forma de compreensão. Dado:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

Solução:

Observando os números presentes no conjunto A , notamos que eles fazem parte dos números primos. Então, uma possível representação seria:

$$A = \{x \mid x \text{ é um número primo e } 1 < x < 13\}$$

Exercícios propostos

01. Observe os conjuntos abaixo e assinale a alternativa correta:

$$A = \{x \mid x \text{ é um múltiplo positivo de } 4\}.$$

$$B = \{x \mid x \text{ é um número par e } 4 \leq x < 16\}$$

a) $145 \in A$

b) $26 \in A \text{ e } B$

c) $11 \in B$

d) $12 \in A \text{ e } B$

Conjuntos Especiais

Conjunto Finito: é o conjunto que possui um número finito de elementos.

Conjunto Infinito: é o conjunto que possui infinitos elementos.

Conjunto Unitário: é o conjunto que possui um único elemento.

Conjunto Vazio: é o conjunto que não possui elementos. É representado por $\{ \}$ ou por $\emptyset$.

Conjunto Universo: é o conjunto que possui todos os elementos utilizados em um certo contexto. É representado pela letra U .

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos.

Considere dois conjuntos: A e B , eles serão iguais ($A = B$) se todo elemento de A pertence a B , e todo elemento de B pertence a A .

Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 04. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{4, 3, 2, 1\}$, temos que $A = B$.

Observação: Para um conjunto, a ordem de seus elementos não é importante, ou seja,

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\} = \{3, 2, 4, 1\}$$

Exemplo 05. Dados os conjuntos $C = \{x \mid x \text{ é inteiro e } 0 \leq x \leq 100\}$ e $D = \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$, temos que $C = D$.

Dados dois conjuntos quaisquer, A e B , se existe um elemento de A que não pertence a B ou um elemento de B que não pertence a A , dizemos que A e B são diferentes. Escrevemos como:

$$A \neq B.$$

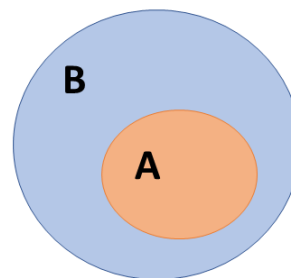
Exemplo 06. Dados os conjuntos $A = \{3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, \dots\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é ímpar, positivo } \geq 7\}$, temos que $A \neq B$.

Subconjuntos

Considere dois conjuntos, A e B . O conjunto A será subconjunto de B , se, e somente se, todo elemento de A também for elemento de B .

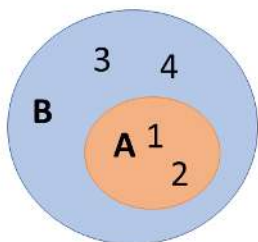
Neste caso, dizemos que A está contido em B e é denotado por $A \subset B$. Ou então, podemos dizer que B contém A ($B \supset A$).

Graficamente, representamos por:

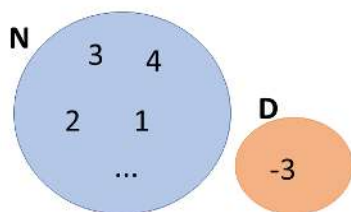


Se A não é um subconjunto de B , então A não está contido em B e é escrito como $A \not\subset B$.

Exemplo 07. Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, temos que $A \subset B$. Utilizando o diagrama de Venn, temos que:



Exemplo 08. Dado o conjunto $D = \{-3\}$, temos que $D \notin N$, ou seja, o conjunto D não está contido no conjunto dos números naturais. Graficamente, é representado como:



Observação 1. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, o conjunto vazio está contido em todos os conjuntos. Podemos escrever como:

$$\emptyset \subset A \forall A$$

Lê-se: “o conjunto vazio está contido em A para todo e qualquer A ”.

Observação 2. Se dois conjuntos, A e B , são iguais, implica que:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A),$$

Atenção: quando queremos relacionar um elemento com um conjunto, utilizamos o conceito de pertence e não pertence ($\in$ e $\notin$). Já se queremos relacionar conjunto com conjunto, utilizamos o conceito de contido e não-contido ($\subset$ e $\not\subset$).

Operações com conjuntos

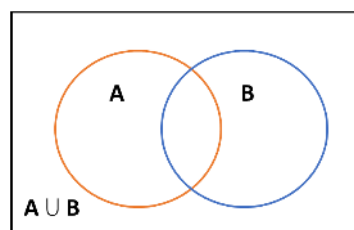
União de Conjuntos

Dado dois conjuntos A e B , a união (ou reunião) desses dois conjuntos resulta em um conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B . Denotamos por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Isso significa que o conjunto $A \cup B$ (lê-se: “ A reunião/união B ”) é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos (A e B).

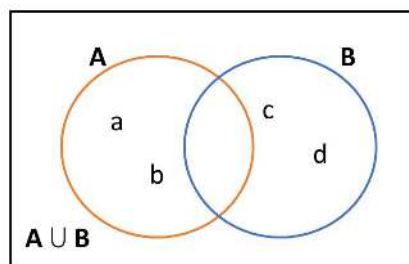
A reunião de dois conjuntos é representada pelo Diagrama de Venn por:



Exemplo 09. Considere os seguintes conjuntos: $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d\}$. A união dos dois conjuntos é:

$$A \cup B = \{a, b, c, d\}.$$

Graficamente:



Exemplo 10. Sendo $X = \{a, c, d\}$ e $Y = \{b, d, e\}$, a união dos conjuntos X e Y é:

$$X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}.$$

Note que o conjunto X possui 3 elementos e o conjunto Y também possui 3 elementos. No entanto, a reunião desses dois conjuntos possui 5 elementos. Portanto, a reunião de dois conjuntos não é a soma dos elementos de cada um deles, porque temos que desconsiderar os elementos que estão presentes, simultaneamente, nos dois conjuntos.

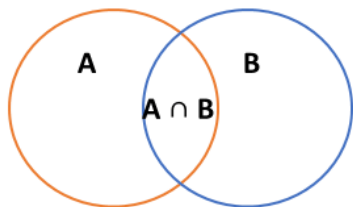
Intersecção de Conjuntos

Dado dois conjuntos A e B , a intersecção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B , simultaneamente. Representamos por:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

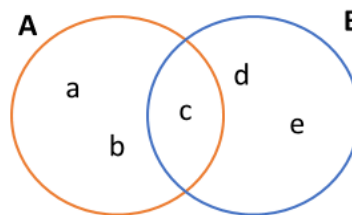
Isso significa que o conjunto $A \cap B$ (lê-se: “ A intersecção B ”) é formado pelos elementos que pertencem a A e, ao mesmo tempo, pertencem a B .

A intersecção de dois conjuntos é representada pelo Diagrama de Venn por:



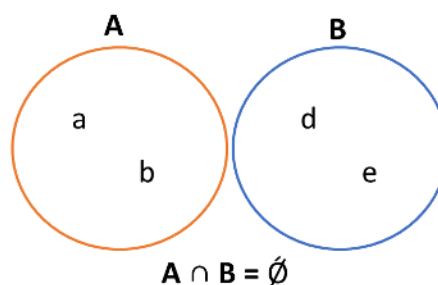
Exemplo 11. Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{c, d, e\}$, a intersecção é dada por:

$$A \cap B = \{c\}.$$



Exemplo 12. Sendo $X = \{a, b\}$ e $Y = \{c, d\}$, a intersecção dos dois conjuntos é: $X \cap Y = \emptyset$. Quando a intersecção de dois conjuntos é o conjunto vazio, dizemos que estes conjuntos são disjuntos.

No diagrama de Venn, representamos como:



Exercícios propostos

02. Qual o conjunto união dos conjuntos:

$$A = \{y \mid y \text{ é um número primo e } 1 < x < 10\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7\}.$$

03. Dados os seguintes conjuntos $A = \{0, 2, 4\}$, $B = \{x \mid x \text{ é par}\}$ e $C = \{2, 3, 4, 5\}$, classifique as sentenças a seguir como verdadeiro ou falso.

a) $() 2 \in B$

b) $() \{4, 5\} \in C$

c) $() B \subset A$

d) $() A \subset B$

e) $() \{2, 3, 4\} \subset (A \cup C)$

f) $() \{2, 3\} \notin C$

g) $() 2 \notin A$

Diferença de conjuntos

A diferença entre dois conjuntos quaisquer, A e B , é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A , mas não pertencem ao conjunto B . Assim:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Complemento de um conjunto

O complemento de um conjunto contido no conjunto A é definido como a diferença entre os conjuntos A e B . O complemento de um conjunto é denotado como C_A^B e é representado por:

$$C_A^B = A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Diferença simétrica

A diferença simétrica entre dois conjuntos A e B é definida como o conjunto de todos os elementos que pertencem à reunião dos conjuntos A e B e não pertencem à intersecção dos conjuntos A e B .

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \text{ e } x \notin A \cap B\}$$

Exemplo 13: Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $C = \{0, -1, -2\}$. obtenha os seguintes conjuntos:

a) C_A^B

O conjunto complementar B em relação a A é dado pela diferença entre A e B :

$$C_A^B = A - B = \{-2, -1\}$$

b) C_A^C

O conjunto complementar C em relação a A é dado pela diferença entre A e C :

$$C_A^C = A - C = \{1, 2\}$$

c) C_B^A

O conjunto complementar A em relação a B é dado pela diferença entre B e A :

$$C_B^A = B - A = \emptyset$$

d) C_C^A

O conjunto complementar A em relação a C é dado pela diferença entre C e A :

$$C_C^A = C - A = \emptyset$$

Exercícios propostos

04. Dados os conjuntos:

$$A = \{-3, -1, 0, 1, 6, 7\}$$

$$B = \{-4, 1, 3, 5, 6, 7\}$$

$$C = \{-5, -3, 1, 2, 3, 5\}$$

Represente-os no diagrama de Venn e, em seguida, determine:

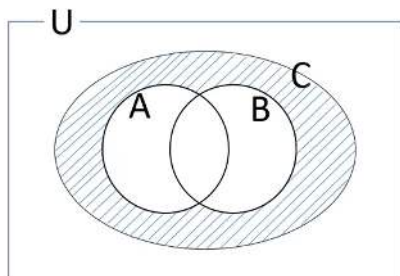
a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $C - A$

d) $B \cap (A \cup C)$

05. Assinale a alternativa que representa corretamente a área hachurada da Figura:



- a) $C \cup (A \cap B)$
- b) $C - (A \cup B)$
- c) $C \cup (A - B)$
- d) $C \cap (A \cup B)$

06. Dados os conjuntos:

$$A = \{0, -1, -2, -3, -4\},$$

$$B = \{0, -1\}$$

$$C = \{-2, -3, -4\}.$$

Obtenha os seguintes conjuntos:

- a) C_A^B
- b) C_A^C
- c) C_B^A
- d) C_C^A

Propriedades dos conjuntos

Considere A , B e C conjuntos quaisquer, $\emptyset$ o conjunto vazio e U o conjunto universo. A seguir, anunciaremos algumas propriedades que poderão auxiliar na resolução de problemas envolvendo conjuntos.

Propriedade 1. Fechamento

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B , a união de A e B , assim como a intersecção de A e B ainda são conjuntos no universo.

Propriedade 2. Reflexiva

Qualquer que seja o conjunto A , tem-se que:

$$A \cap A = A \text{ e } A \cup A = A$$

Propriedade 3. Inclusão

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B , tem-se que:

$$A \subset A \cup B = B \subset A \cup B$$

$$(A \cap B) \subset A = A \cap B \subset B$$

Propriedade 4. Inclusão relacionada

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B , tem-se que:

$$A \subset A \text{ equivale a } A \cup B = B$$

$$A \subset A \text{ equivale a } A \cap B = A$$

Propriedade 5. Associativa

Quaisquer que sejam os conjuntos A , B e C , tem-se que:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Propriedade 6. Comutativa

Quaisquer que sejam os conjuntos A e B , tem-se que:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Propriedade 7. Elemento neutro para a união

O conjunto vazio é o elemento neutro para a união de conjuntos, tal que para todo conjunto A , se tem:

$$A \cup \emptyset = A$$

Propriedade 8. Elemento “nulo” para a intersecção

A intersecção do conjunto vazio com qualquer outro conjunto A , fornece o próprio conjunto vazio:

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Propriedade 9. Elemento neutro para a intersecção

O conjunto universo é o elemento neutro para a intersecção de conjuntos, tal que para todo conjunto A se tem:

$$A \cap U = A$$

Propriedade 10. Distributiva

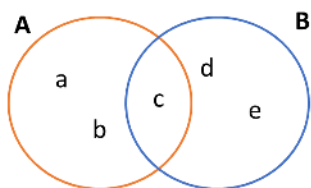
Quaisquer que sejam os conjuntos A , B e C , tem-se que:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Número de elementos de um conjunto

Considere dois conjuntos, A e B , que possuem um número finito de elementos, como o da figura a seguir:



Podemos estabelecer uma relação entre os seus respectivos número de elementos. Assim:

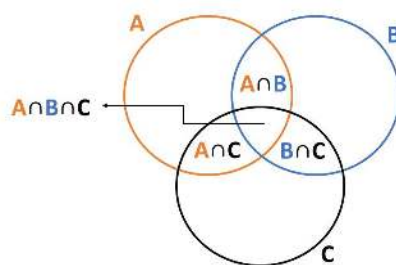
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Em que $n(A \cup B)$ é o número de elementos resultante da união de A com B , $n(A)$ é o número de elementos do conjunto A , $n(B)$ é o número de elementos do conjunto B e $n(A \cap B)$ é o número de elementos da intersecção de A com B .

Note que temos que subtrair os elementos comuns ($n(A \cap B)$), caso contrário seriam contados duas vezes.

Se A e B são conjuntos disjuntos, ou seja, $n(A \cap B) = \phi$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Observação: podemos aumentar o número de conjuntos para três ou mais conjuntos, que relação do número de elementos continua sendo válida. São necessárias, apenas, algumas manipulações. Veja:



$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Exemplo 14. Em uma escola tem 415 alunos. Desses alunos, 221 estudam inglês, 163 estudam francês e 52 estudam ambas as línguas. Quantos alunos estudam inglês ou francês? Quantos alunos não estudam nenhuma das duas línguas?

Solução:

Primeiro, vamos definir os conjuntos presentes e o número de elementos de cada um deles:

$$U = \{\text{alunos da escola}\} \text{ e } n(U) = 415,$$

$$E = \{\text{alunos que estudam inglês}\} \quad \text{e} \\ n(E) = 221$$

$$F = \{\text{alunos que estudam francês}\} \quad \text{e} \\ n(F) = 163$$

Pelo enunciado, o número de alunos que estudam as duas línguas é 52, ou seja, esse é número de elementos resultante da intersecção entre os conjuntos E e F :

$$n(E \cap F) = 52$$

O número de alunos que estudam inglês ou francês é dado pelo número de elementos resultante da união dos conjuntos E e F . E isso pode ser calculado pela expressão abaixo:

$$n(E \cup F) = n(E) + n(F) - n(E \cap F)$$

$$n(E \cup F) = 221 + 163 - 52$$

$$n(E \cup F) = 332$$

Se o número de alunos que estudam uma das línguas (ou inglês ou francês) é 332, o número de alunos que não estudam nenhuma das duas é:

$$n(U) - n(E \cup F) = 415 - 332$$

$$n(U) - n(E \cup F) = 83$$

Exercícios Propostos

07. Depois de n dias de férias, um estudante faz algumas observações:

I - Choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde.

II - Quando chove de manhã, não chove à tarde.

III - Houve 5 tardes sem chuva.

IV - Houve 6 manhãs sem chuva.

A partir dessas informações, qual o valor de n ?

08. (UFPA/Adaptada) Um professor de Matemática, ao lecionar Teoria dos Conjuntos em uma certa turma, realizou uma pesquisa sobre as preferências clubísticas de seus n alunos, tendo chegado ao seguinte resultado:

- 23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club.
- 23 alunos torcem pelo Clube do Remo.
- 15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama.
- 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco.
- 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo.

Se designarmos por A o conjunto dos torcedores do Paysandu, por B o conjunto dos torcedores do Remo e por C o conjunto dos torcedores do Vasco, todos da referida turma, qual é o número de alunos dessa turma?

Exercícios

01. (Escola Naval - 2017) Sendo $A = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, pode-se afirmar que:

- a) $\{1\} \notin A$
- b) $\{1\} \subset A$
- c) $\{1\} \cap \{2\} \notin A$
- d) $\{2\} \in A$
- e) $\{1\} \cup \{2\} \in A$

02. (FATEC - 2019) Entre as pessoas que compareceram à festa de inauguração da FATEC Pompeia, estavam alguns dos amigos de Eduardo. Além disso, sabe-se que nem todos os melhores amigos de Eduardo foram à festa de inauguração.

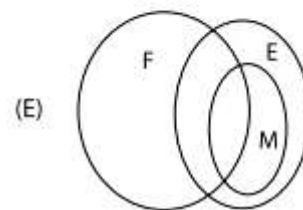
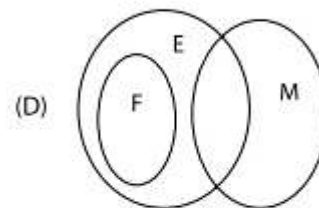
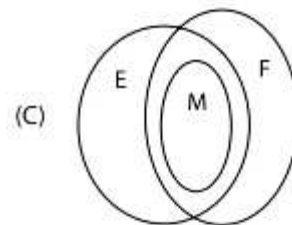
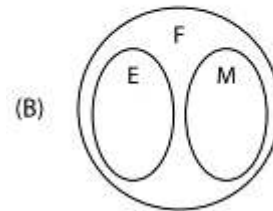
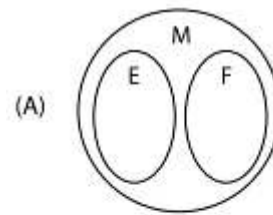
Considere:

F : o conjunto de pessoas que foram à festa de inauguração.

E : o conjunto dos amigos de Eduardo.

M : o conjunto dos melhores amigos de Eduardo.

Com base nessas informações, assinale a alternativa que contém o diagrama de Euler-Venn que descreve corretamente a relação entre os conjuntos.



03. (EPCAR - 2006) Para uma turma de 80 alunos do CPCAR, foi aplicada uma prova de matemática valendo 9,0 pontos distribuídos igualmente em 3 questões sobre:

I - Função

II - Geometria

III - Polinômios

Sabe-se que:

- apesar de 70% dos alunos terem acertado a questão sobre função, apenas 1/10 da turma conseguiu nota 9,0.
- 20 alunos acertaram as questões sobre função e geometria.
- 22 alunos acertaram as questões sobre geometria e polinômios
- 18 alunos acertaram as questões sobre função e polinômios.

A turma estava completa nessa avaliação, ninguém tirou nota zero, no critério de correção não houve questões com acertos parciais e o número de acertos apenas em geometria é o mesmo que o número de acertos apenas em polinômios.

Nessas condições:

- a)** o número de alunos que só acertaram a segunda questão é o dobro do número de alunos que acertaram todas as questões.
- b)** metade da turma só acertou uma questão.
- c)** mais de 50% da turma errou a terceira questão.
- d)** apenas $\frac{3}{4}$ da turma atingiu a média maior ou igual a 5.

04. (FGV-SP) Numa universidade com N alunos, 80 estudam Física, 90 Biologia, 55 Química, 32 Biologia e Física, 23 Química e Física, 16 Biologia e Química e 8 estudam nas 3 faculdades. Sabendo-se que esta Universidade mantém somente as 3 faculdades, quantos alunos estão matriculados na universidade?

a) 304

b) 162

c) 146

d) 154

e) n.d.a.

05. (EPCAR - 2020) Em um jogo de videogame há uma etapa em que o personagem, para se livrar do ataque de monstros, precisa subir pelo menos 1 dos 20 andares de um prédio, utilizando, necessariamente, um elevador. O personagem encontra-se no térreo e pode escolher e acionar um dos 3 elevadores ali existentes. Todos eles estão em perfeito funcionamento e são programados de modo a parar em andares diferentes, conforme esquema a seguir:

Elevador	Programado para parar apenas nos andares de números
P	pares
T	múltiplos de 3
C	múltiplos de 5

Analise cada proposição abaixo quanto a ser **V** (verdadeira) ou **F** (falsa), apenas para os andares de 1 até 20.

() Não há possibilidade de um mesmo andar receber os três elevadores P , T e C .

() Em 6 andares desse prédio, chegam, exatamente, 2 elevadores.

() Se em x andares desse prédio chega apenas 1 elevador; então, x é menor que 7.

Sobre as proposições, tem-se que:

a) apenas uma informação é verdadeira.

b) apenas duas informações são verdadeiras.

c) todas as afirmações são verdadeiras.

d) nenhuma afirmação é verdadeira.

06. (AFA - 1998) Em um grupo de n cadetes da Aeronáutica, 17 nadam, 19 jogam basquetebol, 21 jogam voleibol, 5 nadam e jogam basquetebol, 2 nadam e jogam voleibol, 5 jogam basquetebol e voleibol e 2 fazem os três esportes. Qual o valor de n , sabendo-se que todos os cadetes desses grupos praticam pelo menos um desses esportes?

a) 31

b) 37

c) 47

d) 51

07. (CMRJ) Considere o conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Para n pertencente a C , sejam:

$$An = \{x \in \mathbb{R} \mid 2n - 2 < x < 2_n n\}$$

$$Bn = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2n + 1\}$$

Podemos afirmar que:

a) A intersecção da união dos conjuntos An com a união dos conjuntos Bn é o intervalo $]0,7[$.

b) A união de todos os conjuntos da forma $An \cap Bn$ é o intervalo $]1,6[$

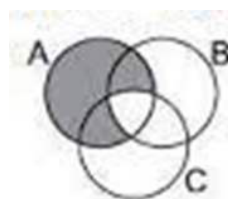
c) A intersecção de todos os conjuntos da forma $An \cup Bn$ é vazia.

d) A união da intersecção dos conjuntos An com a intersecção dos conjuntos Bn é o intervalo $]2,4[$.

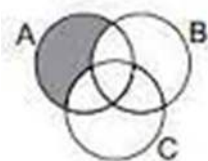
e) A intersecção da intersecção dos conjuntos An com a intersecção dos conjuntos Bn é o intervalo $]1,7[$

08. (UFJF - 2000) A parte hachurada no diagrama que melhor representa o conjunto $D = A - (B \cap C)$ é:

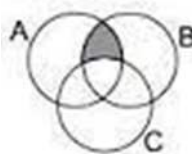
a)



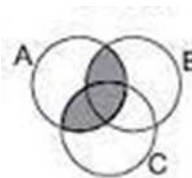
b)



c)



d)



09. (EPCAR - 2003) Em uma turma de 31 alunos da CPCAR foi aplicada uma prova de Matemática valendo 10 pontos, no dia em que 2 alunos estavam ausentes. Na prova,

constavam questões subjetivas: a primeira, sobre conjuntos, a segunda sobre funções e a terceira sobre geometria plana. Sabe-se que dos alunos presentes:

- nenhum tirou zero.
- 11 acertaram a segunda e a terceira questão.
- 15 acertaram a questão sobre conjuntos.
- 1 aluno acertou somente a parte de geometria plana.
- 7 alunos acertaram apenas a questão sobre funções.

É correto afirmar que o número de alunos com grau máximo igual a 10 foi:

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7

10. (ITA - 2000) Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X . Sejam A , B e C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e

e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a:

- a) 11
- b) 18
- c) 14
- d) 25
- e) 15

GABARITO

- 1) E
- 2) E
- 3) C
- 4) B
- 5) B
- 6) C
- 7) C
- 8) A
- 9) B
- 10) D

Conjuntos Numéricos

Os conjuntos numéricos representam a classe dos números, divididos em grupos que possuem as mesmas características, e a partir deles podemos expressar todos os conceitos matemáticos. A ideia dos conjuntos numéricos segue uma ordem de acordo com a história da Matemática, ou seja, à medida que a matemática avançou, foram surgindo vários conjuntos de números. Existem cinco conjuntos que são considerados fundamentais, pois são os mais utilizados em problemas matemáticos, são eles: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais. Neste capítulo veremos detalhes sobre cada um deles, os símbolos utilizados na sua representação e a relação entre eles.

Conjuntos numéricos

Os conjuntos numéricos são grupos de números que possuem características semelhantes.

Podemos dividir os conjuntos numéricos em cinco principais conjuntos:

- I) Conjunto dos números naturais.
- II) Conjuntos dos números inteiros.
- III) Conjuntos dos números racionais.
- IV) Conjuntos dos números irracionais.
- V) Conjunto dos números reais.

Agora iremos ver cada um desses conjuntos com detalhes e as suas propriedades, além de entender como eles se relacionam entre si.

Números Naturais (N)

O conjunto dos números naturais é representado pela letra $\mathbb{N}$ e engloba todos os números inteiros e positivos.

O conjunto dos números naturais é representado por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

É um conjunto infinito, portanto, não dá para representar todos os números. Assim, utilizamos as reticências. O conjunto também pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$$

Para representar o conjunto dos números naturais não-nulos, ou seja, diferentes de zero, devemos colocar um * ao lado do símbolo:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Observação: é importante notar que nos conjunto dos números naturais estão definidas as operações de adição (+) e multiplicação (x), ou seja, essas operações sempre vão resultar em um número natural. Entretanto, não ocorre para as de subtração (−) e de divisão (÷). Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 01.

- a) $8 + 10 = 18$, que é natural.
- b) $3 \times 9 = 27$, que é natural.
- c) $2 - 5 = -3$, que não é natural.
- d) $1 \div 2 = 0,5$ que não é natural.

Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é uma ampliação do conjunto dos números naturais. Ele é formado pela união dos números naturais com os números negativos. É representado pela letra $\mathbb{Z}$.

O conjunto dos números inteiros é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

O conjunto dos números inteiros é um conjunto infinito nas duas extremidades.

Note que, para cada número há o seu oposto ou o seu simétrico, por exemplo, 2 e -2.

Subconjuntos dos números inteiros

Temos alguns subconjuntos importantes de $\mathbb{Z}$:

a) Conjunto dos inteiros positivos:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

b) Conjunto dos inteiros negativos:

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

c) Conjunto dos inteiros não-nulos:

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

d) Conjunto dos inteiros não-nulos e positivos:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

e) Conjunto dos inteiros não-nulos e negativos:

$$\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

Observação: o uso da simbologia de $X_{+/-}$ ou X^* ou até $X_{+/-}^*$ pode ser usada para qualquer conjunto numérico.

Observação 2: No conjunto dos números inteiros as operações de adição (+), subtração (−) e multiplicação (x) estão definidas as, ou seja, essas operações sempre vão resultar em um número inteiro. Entretanto, não ocorre para a divisão (÷). Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 02.

a) $(-10) + 4 = -6$, que é inteiro.

b) $(-3) \times (-5) = 15$, que é inteiro.

c) $(-3) \div 2 = 1,5$ que não é inteiro.

Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos números racionais surgiu da necessidade de descrever partes de algo inteiro, ou seja, as frações.

O conjunto dos números racionais é representado pela letra $\mathbb{Q}$ e reúne todos os elementos que podem ser obtidos pela divisão de dois números inteiros.

Representamos esse conjunto por:

$$\mathbb{Q} = \{\dots, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots\}$$

ou

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Os números racionais que podem ser escritos na forma de fração são:

I) Todos os números inteiros.

II) Números decimais finitos, que são aqueles que possuem um número finito de casas decimais. Por exemplo: 1,1, 2,32 e 4,45.

III) Dízimas periódicas, que são decimais infinitos, mas que repetem a sequência final de suas casas decimais. Por exemplo: 0,5555..., 4,7589759....

Subconjuntos dos números racionais

Temos alguns subconjuntos importantes de Q :

a) Conjunto dos racionais positivos:

$$Q_+ = \{0, \frac{1}{2}, 2, \frac{7}{3}, \dots\}$$

b) Conjunto dos racionais negativos:

$$Q_- = \{\dots, -\frac{7}{3}, -2, -\frac{1}{2}, 0\}$$

c) Conjunto dos racionais não-nulos:

$$Q^* = \{\dots, -\frac{7}{3}, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{7}{3}, \dots\}$$

d) Conjunto dos racionais não-nulos e positivos:

$$Q_+^* = \{\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{3}, \dots\}$$

e) Conjunto dos racionais não-nulos e negativos:

$$Q_-^* = \{\dots, -\frac{7}{3}, -2, -\frac{1}{2}\}$$

No conjunto dos números racionais as operações de adição (+), subtração (-), multiplicação (x) e divisão (÷) estão bem definidas, ou seja, sempre vão resultar em um número racional.

Exemplo 03.

a) $\frac{1}{5} + \frac{3}{2} = \frac{17}{10}$, que é racional.

b) $\frac{2}{5} \div \frac{4}{3} = \frac{3}{10}$ que é racional.

Números Irracionais (I)

O conjunto dos números irracionais é composto por todos os números que não são possíveis de se descrever como uma fração. É o caso das raízes não exatas, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e do número π , e é representado pela letra I :

$$I = \{\dots, -\sqrt{\frac{7}{3}}, -\sqrt{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, \dots\}$$

Ao contrário dos outros conjuntos numéricos, o conjunto dos números irracionais não possuem subconjuntos.

Note que, todos os números que pertencem aos irracionais, não pertencem ao conjunto dos racionais. Dessa forma, ou um número é racional ou é irracional, não existe a possibilidade de um número pertencer a esses dois conjuntos simultaneamente.

Números Reais (R)

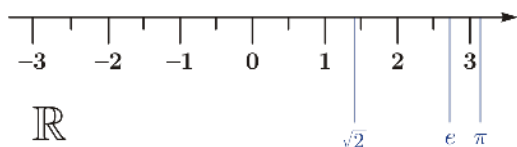
O conjunto dos números reais é formado por todos os conjuntos numéricos citados anteriormente.

Ele é representado pela letra $\mathbb{R}$ e é definido como a união entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.

Matematicamente, pode ser escrito como:

$$\mathbb{R} = Q \cup I = \{Q + I\}$$

Observação: O conjunto dos números reais é formado por todos os números que podem ser localizados em uma reta numérica (reta dos reais):



a) Conjunto dos reais positivos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

b) Conjunto dos reais negativos:

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

c) Conjunto dos reais não-nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

d) Conjunto dos reais não-nulos e positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

e) Conjunto dos reais não-nulos e negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

No conjunto dos números racionais as operações de adição (+), subtração (−), multiplicação (×) e divisão (÷) estão bem definidas, ou seja, sempre vão resultar em um número real.

Exemplo 04.

a) $\sqrt{2} + 1$ é real.

b) $2 \div \pi$ é real.

Relação entre conjuntos numéricos

Alguns conjuntos numéricos são subconjuntos de outros:

I) O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) é subconjunto do conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$).

II) O conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é subconjunto do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$).

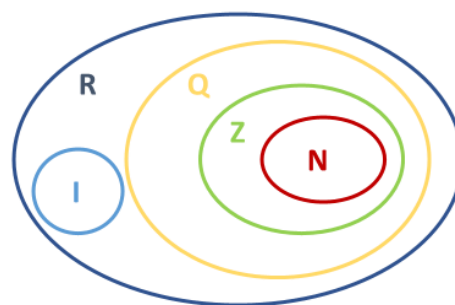
III) O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) é subconjunto do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

IV) O conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$) e irracionais ($\mathbb{I}$) são subconjuntos do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Também podemos fazer a leitura contrária dessas relações, como foi visto no Capítulo Noções de Conjuntos. Por exemplo, podemos dizer que o conjunto dos números inteiros contém o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$) e, assim, sucessivamente:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{I} \subset \mathbb{R}, \text{ com } \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

Para ficar mais claro essas relações, veja a representação pelo diagrama de Venn:



Intervalos numéricos

Uma maneira de representar conjuntos numéricos é por meio dos intervalos numéricos. Entretanto, só é possível representar intervalos numéricos para os conjuntos e subconjuntos do conjunto dos números reais.

A representação por intervalos indica que o conjunto possui cada número real entre dois extremos indicados, numericamente ou geometricamente.

Os intervalos podem ser abertos ou fechados:

- **Intervalo aberto:** é quando seus extremos não estão incluídos. Para representá-lo utilizamos o símbolo $] , [$, ou por um bolinha branca, indicando que o elemento não está incluído:



- **Intervalo fechado:** é quando seus extremos são incluídos. Para representá-lo utilizamos o símbolo $[,]$, ou por um bolinha preta, indicando que o elemento está incluído:



Podemos ter quatro condições de intervalos diferentes, vejamos:

1) Intervalo com extremos abertos:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Geometricamente, representamos como:



2) Intervalo com extremos fechados:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Geometricamente, representamos como:



3) Intervalo aberto à direita e fechado à esquerda:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Geometricamente, representamos como:



4) Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Geometricamente, representamos como:



Exercícios Propostos

01. Julgue as proposições abaixo com verdadeiro (V) ou falso (F):

$$() (2 - 3) \in \mathbb{N} \quad () \left\{ \frac{4}{7}, \frac{11}{3} \right\} \subset \mathbb{Q}$$

$$() \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad () 42 \in \mathbb{Q}$$

$$() \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \quad () 0 \in \mathbb{R}^*$$

$$() (-3)^2 \in \mathbb{Z}_- \quad () \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$$

$$() \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

$$() \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

$$() \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$$

Exercícios

01. (IFRS - 2016) Sobre os conjuntos numéricos, assinale a alternativa FALSA:

- a) A intersecção de qualquer conjunto com o conjunto dos números inteiros está contida dentro do conjunto dos números racionais.
- b) A união de qualquer subconjunto dos números racionais com um subconjunto dos números irracionais está contida no conjunto dos números complexos.
- c) A intersecção de qualquer subconjunto dos números irracionais com o conjunto dos números complexos está contida no conjunto dos números reais.
- d) A união de qualquer subconjunto dos números naturais com qualquer subconjunto dos números reais está contida no conjunto dos números racionais. certo
- e) A intersecção de qualquer subconjunto dos números racionais com qualquer subconjunto dos números irracionais é vazia.

02. (EEAR - 2020) Na figura estão representados os números reais 0, a, b e 1:



É FALSO afirmar que:

- a) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- b) $a \cdot b < a$
- c) $\frac{b}{a} < 1$
- d) $a - b < 0$

03. (EsPCEx - 2000) É correto afirmar que:

- a) A soma e a diferença de dois números naturais é sempre um número natural.
- b) O produto e o quociente de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
- c) A soma de dois números racionais é sempre um número racional.
- d) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
- e) O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional

04. (EPCAR - 1999) Seja x um número racional qualquer e y um número irracional qualquer. Analise as proposições abaixo e marque a alternativa correta:

- I) $(\sqrt{2} \cdot x)$ pode ser racional.
- II) y^2 é sempre irracional
- III) y^2 nem sempre é irracional
- IV) $\sqrt{x}$ é sempre um número real.

- a) I e IV
- b) II e III
- c) I e III
- d) II e IV

05. (EPCAR - 2010) Considere os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ e analise as proposições abaixo, classificando-as em verdadeira (V) ou falsa (F):

() Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 6n + 3, n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$, então $A \cap B = \{x \text{ é múltiplo de } 3\}$

() Se $P = R \cap \mathbb{N}$, $T = (\mathbb{N}^* \cap \mathbb{Z}) \cup Q$ e $S = \mathbb{N}^* \cup (\mathbb{Z}_+^* \cap Q)$, então $P \cup T \cup S = \mathbb{Z} - \mathbb{Z}_-$.

() Se $y = \sqrt[n]{\frac{80}{4^{n+2} + 2^{2n+6}}}$ para $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, então y é racional.

Marque a alternativa que apresenta a sequência correta

a) V-V-F

b) F-F-V

c) V-F-F

d) F-V-V

06. (CMRJ - 2015) Dentre as afirmativas abaixo, assinale a alternativa FALSA.

a) Seja a um número real não nulo. Então, $a^{-1} \in \mathbb{R}$.

b) Para qualquer número inteiro, a raiz quadrada desse número elevado ao quadrado é igual ao próprio número.

c) Para qualquer inteiro, o sucessor do antecessor do número é o próprio número.

d) A média aritmética simples de dois inteiros negativos não é necessariamente um inteiro negativo.

e) Todo número real negativo possui inverso.

07. (CN - 1999) Dos números:

I) 0,4333...

II) 0,101101110....

III) $\sqrt{2}$

IV) O quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma mesma circunferência.

São racionais:

a) Todos

b) Nenhum

c) apenas 1 deles

d) apenas 2 deles

e) apenas 3 deles

08. (UNIFOR/CE - 1999) Quantos números inteiros pertencem ao intervalo real $[\sqrt{8}, \sqrt{63}]$?

a) Três

b) Quatro

c) Cinco

d) Seis

e) Sete

09. (EPCAR - 2015) Analise as afirmativas seguintes e classifique cada uma em (V) verdadeira ou (F) falsa.

I. Se $A = \frac{5-5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{5-5^{\frac{1}{2}}}$, então $A \in \{(R - Q) \cap (R - Z)\}$.

II. O valor da expressão $\left[\frac{(0,001)^4 \cdot 100^7}{10^5} \right] \cdot (0,1)^{-4}$ é $100^{\frac{1}{2}}$;

III. Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, uma forma simplificada da expressão $\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$ é a^{-4} .

A sequência correta é:

a) V-V-V

b) V-V-F

c) V-F-V

d) F-V-F

12. (AFA - 2013) Considere os seguintes conjuntos numéricos $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e considere também os seguintes conjuntos:

$$A = (\mathbb{N} \cup I) - (\mathbb{N} \cap \mathbb{Z})$$

$$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$$

$$D = (\mathbb{N} \cup I) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$$

Das alternativas abaixo, a que apresenta elementos que pertencem aos conjuntos A , B e D , nesta ordem, é:

a) -3 ; $0,5$ e $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{20}$; $\sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{10}$; -5 e 2

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3 e $2,3\overline{1}$

GABARITO

1) D

2) C

3) C

4) C

5) B

6) B

7) C

8) C

9) B

10) D

Funções do Primeiro Grau

Na Matemática, as funções representam uma relação entre duas grandezas variáveis. Há diversos tipos de funções e neste capítulo estudaremos as funções de 1º grau, também conhecidas como funções afim. As funções de 1º grau possuem aplicações muito importantes em Física, por exemplo, no estudo do movimento retilíneo uniforme. Neste capítulo vamos aprender os métodos para solucionar esse tipo de função e a associação de seus coeficientes à sua representação gráfica.

Definição

Chama-se função do 1º grau, ou função afim, toda relação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = ax + b$$

Em que **a** e **b** são números reais constantes, com **a** $\neq$ 0. O **a** é chamado de coeficiente angular e o **b** de coeficiente linear. Vejamos alguns exemplos:

- $f(x) = 5x - 2$ é uma função do 1º grau, com $a = 5$ e $b = -2$.
- $g(x) = -2x + 7$ é função do 1º grau, com $a = -2$ e $b = 7$.
- $h(x) = 12x$ é uma função do 1º grau, com $a = 12$ e $b = 0$.

Observação: Conceitualmente, a função do 1º grau aparece em situações em que uma parte é fixa (coeficiente linear) e a outra parte varia (coeficiente angular) de forma diretamente proporcional.

Domínio da função

A função do 1º grau é de domínio real, ou seja, o x pode ser qualquer número real e, a cada número real x , associamos um número real na forma $ax + b$.

Vamos resolver um exemplo, para entendermos melhor esse conceito.

Exemplo 01. Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R\$ 8,00 mais um custo variável de R\$ 0,50 por unidade produzida. Sendo x o número de unidades produzidas:

a) Escreva a lei da função que fornece o custo total de x peças.

b) Calcule o preço de 100 peças.

Solução:

a) Como vimos, a função do 1º grau é definida por:

$$f(x) = ax + b$$

Em que **ax** representa a parte variável e **b** representa a parte fixa.

Pelo enunciado, nós temos que cada peça produzida tem um custo fixo de R\$ 8,00, o qual está relacionado com o coeficiente linear da função (**b**), e um custo variável de 0,50, que representa o coeficiente angular (**a**).

Portanto, a lei da função que fornece o custo total é dada por:

$$f(x) = 0,5x + 8$$

b) Para sabermos o preço de 100 peças, basta substituímos o x por 100, uma vez que x representa o número de peças. Então:

$$f(100) = 0,5 \cdot 100 + 8$$

$$f(100) = 58$$

Portanto, o custo para produzir 100 peças seria de R\$ 58,00.

Exercício Proposto

01. O motorista de um aplicativo cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R\$ 5,00 e mais R\$ 2,00 por quilômetro rodado.

a) Determine a lei de função que define o valor total arrecadado (R) em função da quantidade de quilômetros percorridos (x).

b) Um passageiro fez uma corrida de 20 km, quanto ele pagará pela corrida?

c) Após um dia inteiro de trabalho, o motorista teve a receita de R\$ 805,00. Quantos quilômetros ele rodou nesse dia?

Gráfico de uma função do 1º grau

Cada tipo de função apresenta uma curva específica para relacionar as suas grandezas.

Os gráficos das funções de 1º grau são uns dos mais simples que existem.

O gráfico de uma função do 1º grau é descrito por uma reta oblíqua aos eixos x e y, em que o coeficiente **a** da reta está relacionado à sua inclinação em relação ao eixo x e o coeficiente **b** da reta é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y.

Como os gráficos das funções de 1º grau são sempre representados por uma reta, basta conhecermos apenas dois pontos para traçar a curva.

Para compreendermos melhor, vamos construir o gráfico da seguinte função:

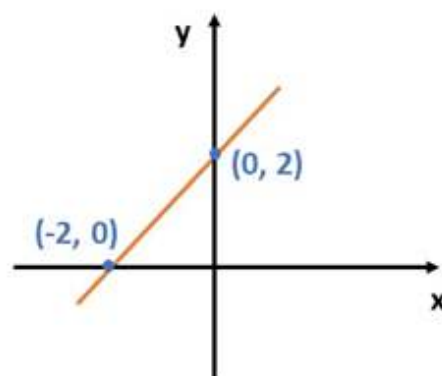
$$f(x) = x + 2.$$

Primeiramente, para desenhar o gráfico, precisamos encontrar dois pontos. Para isso, podemos atribuir valores de x e encontrar $f(x)$ ou vice-versa. Então:

- Para $x = 0$, temos $f(x) = 2$, resultando no ponto $(0, 2)$.

- Para $x = -2$, temos $f(x) = 0$, resultando no ponto $(-2, 0)$.

Como o gráfico da função do 1º grau é uma reta, marcamos esses dois pontos no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta. Veja:



Exercícios propostos

02. Construa o gráfico, no plano cartesiano, das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x + 1$

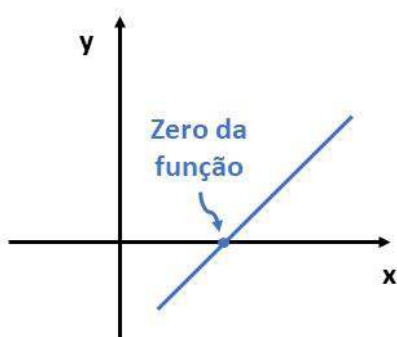
b) $f(x) = -x + 6$

03. Um corpo se movimenta com uma velocidade constante, segundo a função $s(t) = 5t + 15$, em que **s** indica a posição do corpo (em metros) no instante **t** (em segundos). Construa o gráfico de **s** em função **t**. Qual será a posição do corpo no

instante 10 segundos? E qual é o instante em que o corpo se encontra a 35 m da origem?

Zero da função do 1º grau

A raiz ou zero de uma função de 1º grau é o valor de x para qual a função é nula, ou seja, é o valor de x que torna $f(x) = 0$. No gráfico, a raiz da função é representada pelo ponto em que a reta corta o eixo x , como mostra a figura abaixo.



Algebricamente, determinamos a raiz da função igualando-a a zero.

Considere a seguinte função:

$$f(x) = ax + b,$$

Igualando a zero, temos:

$$0 = ax + b$$

Isolando o x , encontramos a raiz da função:

$$x = \frac{-b}{a}$$

Note que toda função na forma $f(x) = ax + b$ possui apenas uma única raiz.

Exemplo 02. Determine o zero da função: $f(x) = -6x + 12$.

Solução:

Como queremos encontrar o zero da função, temos que igualá-la a zero:

$$-6x + 12 = 0$$

Agora, vamos identificar os coeficientes da função:

$$a = -6 \text{ e } b = 12.$$

Já vimos que a raiz da função é dada por:

$$x = \frac{-b}{a}$$

Substituindo os valores de **a** e **b**, encontramos o valor de x :

$$x = \frac{-12}{-6}$$

$$x = -2$$

Logo, temos que: $f(-2) = 0$.

Exercício proposto

04. Encontre a raiz das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x - 6$

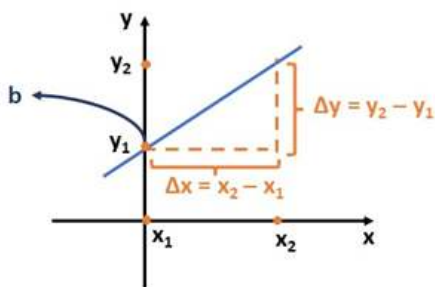
b) $f(x) = -2x + 10$

Determinando a função do primeiro grau a partir do seu gráfico

Nós acabamos de aprender como construir o gráfico de uma função do 1º grau, a partir da sua lei de função. Entretanto, às vezes temos que fazer o oposto, ou seja, nós temos apenas o gráfico e precisamos encontrar a função que descreve aquele gráfico. É isso que veremos agora, como determinar a função do 1º grau a partir do seu gráfico.

Para determinar uma função, primeiro temos que identificar os valores dos coeficientes angular e linear no gráfico.

Vamos considerar o seguinte gráfico, que representa uma função de 1º grau:



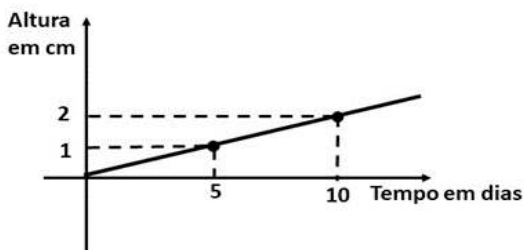
O coeficiente angular **(a)** está relacionado com a inclinação da reta e o seu valor é encontrado pela expressão:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

E o coeficiente linear **(b)** é obtido pelo ponto de intersecção com o eixo y.

Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 03. Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando-se os pontos colocados por ele em um gráfico, resultou na figura abaixo.



Se for mantida sempre esta relação entre tempo e altura, qual a altura que a planta terá no 30º dia?

Solução:

Para encontrarmos a altura no 30º dia, primeiramente, temos que determinar a lei da função que descreve o gráfico.

Como o gráfico é uma reta, a função que o representa é do 1º grau, do tipo $f(x) = ax + b$.

De acordo com a figura, temos que os pares ordenados (x, y) são: $(5, 1)$ e $(10, 2)$.

Sendo assim, podemos determinar o valor do coeficiente angular da reta substituindo os valores na expressão:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{10 - 5}$$

$$a = \frac{1}{5}$$

Para determinarmos o valor do coeficiente linear, podemos utilizar dois métodos.

Método 1. Uma vez que encontramos o valor de **a**, substituímos na função:

$$f(x) = \frac{1}{5}x + b$$

Agora, podemos pegar os valores de um dos pares ordenados e substituí-los na expressão acima para encontrar o valor de **b**:

Para o par $(5, 1)$, ou seja, $f(x) = 1$ e $x = 5$:

$$1 = \frac{1}{5} \cdot 5 + b$$

$$b = 0$$

Note que se tivéssemos utilizado o outro par ordenado (10, 2), o valor de **b** seria o mesmo:

$$2 = \frac{1}{5} \cdot 10 + b \Rightarrow b = 0.$$

Método 2. O segundo método para encontrar o valor de **b** seria identificar em que ponto a reta toca o eixo y. Pela figura do exemplo, a reta passa pelo eixo y no ponto 0, ou seja, **b = 0**.

Sendo assim, a lei da função é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{5} x$$

Em que x é o tempo, em dias, e $f(x)$ a altura, em cm.

O enunciado pede a altura da planta no 30º dia, ou seja, o valor de $f(x)$ quando x for 30.

Substituindo o valor de x na função encontrada, temos:

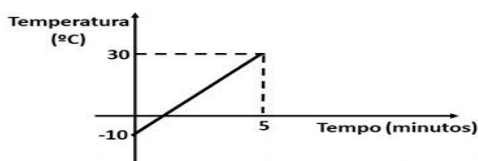
$$f(30) = \frac{1}{5} \cdot 30$$

$$f(30) = 6$$

Portanto, a altura da planta no 30º dia será de 6 cm.

Exercício proposto

05. Uma barra de ferro com temperatura inicial de 10°C foi aquecida até 30°C. A figura mostra o gráfico que representa a variação de temperatura em função do tempo gasto nessa experiência. Qual será o tempo, após o início da experiência, em que a temperatura da barra atingiu 0°C?



Variação de sinal da função de 1º grau

A partir de agora, vamos estudar o sinal da função de 1ª grau, mas antes precisamos discutir alguns conceitos, como crescimento e decréscimo de uma função.

Função Crescente e Decrescente

Função Crescente

Vamos considerar a função:

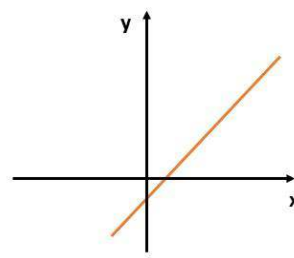
$$f(x) = 3x - 1$$

Se aumentarmos o valor de x , os valores correspondentes de $f(x)$ também aumentam. Veja:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-1	2	5	8

Neste caso, dizemos que a função é crescente.

Graficamente, a função crescente é representada por uma reta inclinada para cima.



Função Decrescente

Agora, vamos considerar a função:

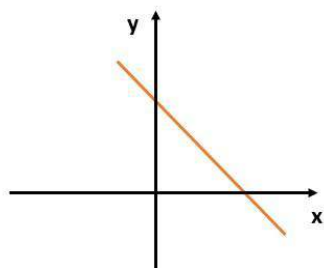
$$f(x) = -3x - 1$$

Quando aumentamos o valor de x , o valor correspondente de $f(x)$ diminui:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	-1	-4	-7

Neste caso, dizemos que a função é decrescente.

Ao contrário da função crescente, no gráfico de uma função decrescente temos uma reta inclinada para baixo.



Acabamos de aprender que para determinar se uma função é crescente ou decrescente, temos que substituir os valores de x e observar se $f(x)$ aumenta ou diminui. Entretanto, podemos fazer isso de uma forma mais simples: analisando o coeficiente angular da função.

Quando o coeficiente angular for positivo ($a > 0$) a função é crescente e quando o coeficiente angular for negativo ($a < 0$) a função será decrescente.

Exercícios Propostos

06. Construa o gráfico das funções abaixo, depois identifique se são funções crescentes ou decrescentes.

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = -x + 1$

c) $f(x) = 2 - x$, se $x < -3$,

$f(x) = x + 2$, se $3 \leq x \leq -1$,

$f(x) = -x$, se $-1 < x < 2$ e

$f(x) = x - 2$, se $x \geq 2$.

07. Determine a lei da função cuja reta passa pelos pontos A (-8, 0) e B (0, 4). Essa função é crescente ou decrescente?

Sinal da Função de 1º grau

Agora que já vimos como identificar se uma função é crescente ou decrescente, vamos estudar o sinal da função de 1º grau.

Estudar o sinal de uma função de 1º grau significa determinar os valores de x para os quais:

- $f(x)$ é positivo ($f(x) > 0$),
- $f(x)$ é zero ($f(x) = 0$) e
- $f(x)$ é negativo ($f(x) < 0$).

Vamos considerar a seguinte função:

$$f(x) = ax + b.$$

Nós vimos que $f(x)$ será zero na raiz da função, ou seja, quando $x = \frac{-b}{a}$.

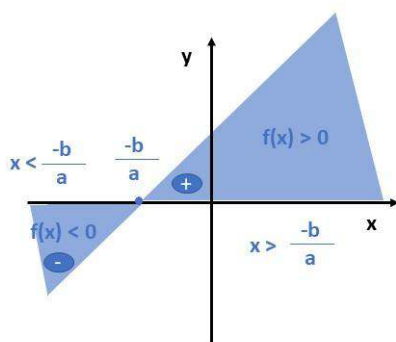
Agora, temos mais dois casos possíveis:

1) Quando a função é crescente, ou seja, quando $a > 0$:

$$-f(x) > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > \frac{-b}{a}$$

$$-f(x) < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < \frac{-b}{a}$$

Graficamente, o ponto em que a reta corta o eixo da abscissa é a raiz da função. Para valores de x menores que a raiz, os pontos estão abaixo do eixo das abscissas; e para valores de x maiores que a raiz, os pontos encontram-se acima do eixo das abscissas.



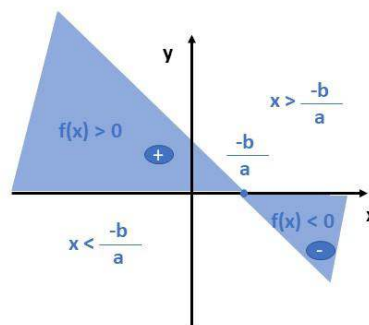
Note que $f(x)$ será positivo para valores de x maiores que a raiz e negativo para valores de x menores que a raiz.

2) Quando a função é decrescente, ou seja, quando $a < 0$:

$$-f(x) > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < \frac{-b}{a}$$

$$-f(x) < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > \frac{-b}{a}$$

Graficamente, o ponto em que a reta corta o eixo da abscissa é a raiz da função. Para valores de x menores que a raiz, os pontos estão acima do eixo das abscissas e para valores de x maiores que a raiz, os pontos encontram-se abaixo do eixo das abscissas.



Note que $f(x)$ será positivo para valores de x menores que a raiz e negativo para valores de x maiores que a raiz.

Exemplo 04. Estude o sinal da função: $f(x) = 3x - 9$.

Solução:

Primeiro, vamos identificar os coeficientes da função:

$$a = 3 \text{ e } b = -9$$

Agora, vamos determinar a raiz da função e, em seguida, desenhar o seu gráfico.

A raiz da função é obtida igualando a zero, ou seja, $f(x) = 0$:

$$3x - 9 = 0$$

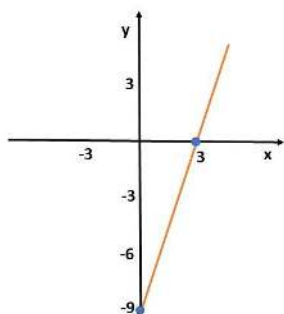
$$x = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

Logo, temos o ponto $(3, 0)$.

Para construir o gráfico da função, temos que obter mais um ponto:

Para $x = 0$, temos: $f(x) = -9$, resultando no ponto $(0, -9)$.

Marcando esses dois pontos no plano cartesiano e traçando a reta, o gráfico que representa a função $f(x) = 3x - 9$ é dado por:

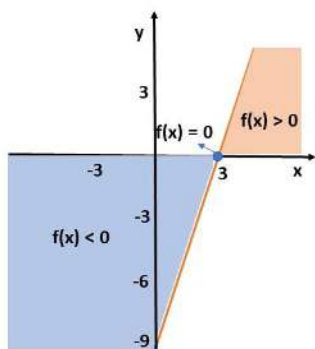


Pelo gráfico, podemos observar que a função é crescente.

Agora vamos analisar o sinal da função:

- para valores de x menores que 3, vemos que $f(x) < 0$;
- para x igual a 3, a função é nula; e
- para valores de x maiores que 3, temos que $f(x) > 0$.

Veja:



Agora vamos ver um método mais simples para resolver esse problema, sem a necessidade de construir o gráfico.

Para isso, inicialmente, temos que identificar o coeficiente angular da função, que no caso é igual a 3.

Em seguida, vamos calcular a raiz da função. Como já vimos, também será igual a 3.

Com os conhecimentos adquiridos até agora, vamos montar uma tabela.

Na primeira coluna, eu devo colocar os três sinais que $f(x)$ pode assumir, ou seja, $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$. E na segunda coluna, é colocado os valores de x relacionados com a raiz da função. Note que os sinais de x irá depender do coeficiente angular, ou seja, se a função é crescente ou decrescente.

Para a função dada no exemplo, a tabela ficaria assim:

$f(x) = 3x - 9$	$a > 0$
$f(x) < 0$	$x < 3$
$f(x) = 0$	$x = 3$
$f(x) > 0$	$x > 3$

Dessa forma, a partir da tabela temos que a função é:

- Negativa para $x < 3$,
- Nula para $x = 3$, e
- Positiva para $x > 3$.

Observação: Lembrando que a raiz de uma função do 1º grau é $-\frac{b}{a}$, podemos resumir as explicações sobre os estudos da função de 1º grau apresentadas acima em uma tabela geral:

$f(x) = ax+b$	$a < 0$	$a > 0$
$f(x) < 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$x < -\frac{b}{a}$
$f(x) = 0$	$x = -\frac{b}{a}$	$x = -\frac{b}{a}$
$f(x) > 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$

Exercício proposto

08. Estude o sinal de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x + 4$

b) $f(x) = \frac{-x}{2} - 1$

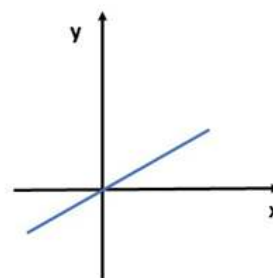
c) $f(x) = 8 - 4x$

d) $f(x) = -x$

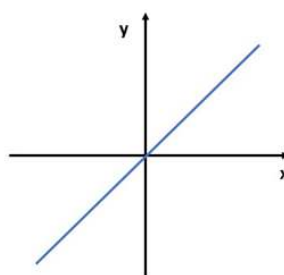
Tipos particulares de funções do 1º grau

Existem três tipos particulares de funções do 1º grau, e o tipo da função irá influenciar na forma do gráfico. O gráfico continua sendo uma reta, mas com posições diferentes e marcantes. Agora veremos quais são esses três tipos.

1) Função linear: A função do primeiro grau é chamada de linear quando é do tipo $f(x) = ax$, com $a \neq 0$ e $b = 0$. O gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem, ou seja, no ponto $(0, 0)$.

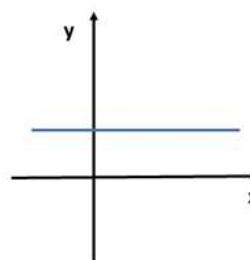


2) Função identidade: A função do 1º grau é chamada de função identidade quando é do tipo $f(x) = x$, ou seja, quando $a = 1$ e $b = 0$. O gráfico de uma função identidade é uma reta que passa pela origem cortando os quadrantes I e II ao meio. Essa reta também é chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares.



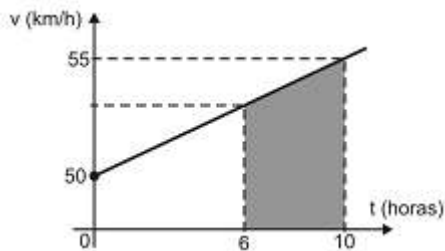
Note que a função identidade é um caso particular da função linear.

3) Função constante: A função do 1º grau é chamada de constante quando é do tipo $f(x) = b$, em que b não depende de x , ou seja, quando $a = 0$. O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x .



Exercícios

01. (EPCAR - 2017) O gráfico a seguir é uma função polinomial do 1º grau e descreve a velocidade v de um móvel em função do tempo t :



Assim, no instante $t = 10$ horas o móvel está a uma velocidade de 55 km/h, por exemplo.

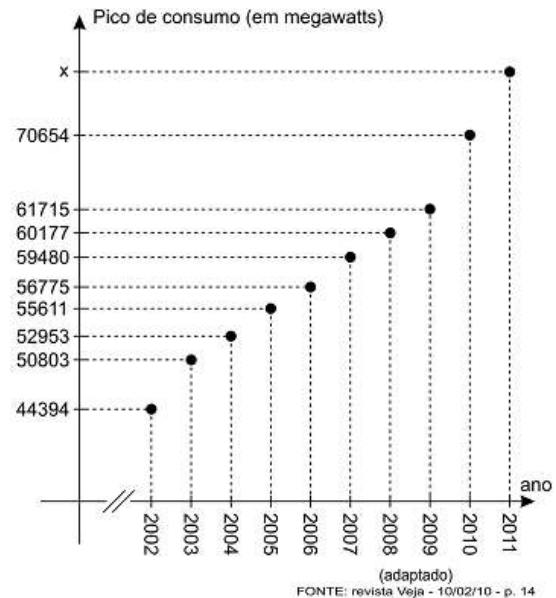
Sabe-se que é possível determinar a distância que o móvel percorre calculando a área limitada entre o eixo horizontal t e a semirreta que representa a velocidade em função do tempo. Desta forma, a área hachurada no gráfico fornece a distância, em km, percorrida pelo móvel do instante 6 a 10 horas.

É correto afirmar que a distância percorrida pelo móvel, em km, do instante 3 a 9 horas é de:

- a) 318
- b) 306
- c) 256
- d) 215

02. (EPCAR - 2010) “Demanda crescente: O consumo de energia elétrica no Brasil nunca foi tão alto. Na quinta-feira passada, atingiu seu recorde histórico. O valor é muito superior ao registrado em anos anteriores.” (Revista Veja - 10/02/10 - p. 71)

O gráfico abaixo indica o pico de consumo de energia (em megawatts) na primeira quinta-feira de fevereiro dos anos de 2002 a 2010.



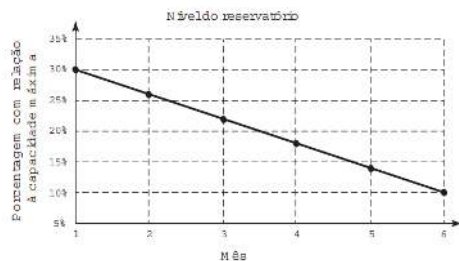
Analisando-se o gráfico acima e supondo-se que em 2011, na primeira quinta-feira do mês de fevereiro, haverá um crescimento do pico de consumo de energia, proporcional ao crescimento ocorrido na primeira quinta-feira do mês de fevereiro do ano de 2009 ao ano de 2010, é correto afirmar que x é um número compreendido entre:

- a) 76000 e 77000
- b) 77000 e 78000
- c) 78000 e 79000
- d) 79000 e 80000

03. (EEAR - 2019) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$. A função será positiva para

- a) $x > 3$
- b) $x < -3$
- c) $0 < x < 3$
- d) $-3 < x < 0$

04. (ENEM 2016) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

- a) 2 meses e meio
- b) 3 meses e meio
- c) 4 meses
- d) 1 mês

05. (EPCAR - 2017) João, ao perceber que seu carro apresentará um defeito, optou por alugar um veículo para cumprir seus compromissos de trabalho. A locadora, então, lhe apresentou duas propostas:

- plano A, no qual é cobrado um valor fixo de R\$ 50,00 e mais R\$ 1,60 por quilômetro rodado.

- plano B, no qual é cobrado um valor fixo de R\$ 64,00 mais R\$ 1,20 por quilômetro rodado.

João observou que, para certo deslocamento que totaliza k quilômetros, era indiferente optar pelo plano A ou pelo plano B, pois o valor final a ser pago seria o mesmo.

É correto afirmar que k é um número racional entre:

- a) 14,5 e 20
- b) 20 e 25,5
- c) 25,5 e 31
- d) 31 e 36,5

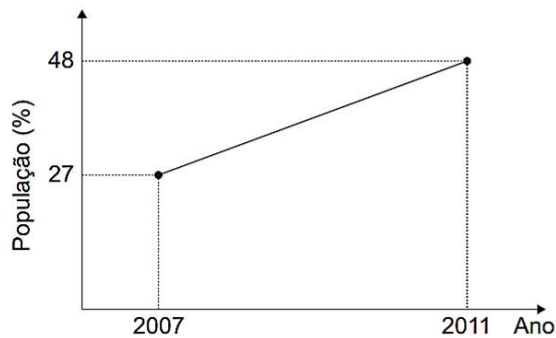
06. (EEAR - 2020) Seja a função real $f(x) = x + 4$. Se h é uma função polinomial de 1º grau que passa pelos pontos $(0, f(0))$ e $(3, f(-4))$, então o coeficiente angular de h é:

- a) $-\frac{4}{3}$
- b) $-\frac{3}{4}$
- c) $\frac{4}{3}$
- d) $\frac{3}{4}$

07. (ENEM PPL - 2016) O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo

Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.

Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período 2007 - 2011.



A estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013 era igual a:

- a) 56,40%
- b) 58,50%
- c) 60,60%
- d) 63,75%
- e) 72,00%

08. (IFSP - 2014) Uma confecção tem um custo fixo com contas de água, luz e salário de funcionários de R\$ 5000,00 por mês. Cada peça de roupa produzida tem um custo de R\$ 4,00 e é vendida por R\$ 12,00. O número de peças que devem ser produzidas e vendidas para se obter um lucro igual ao custo fixo é:

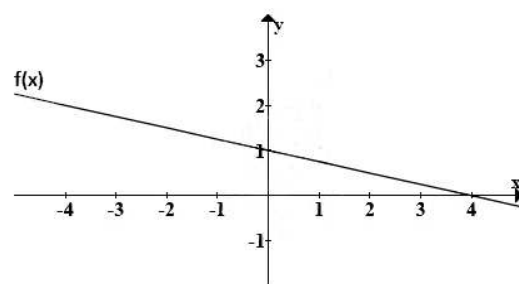
- a) 125
- b) 250
- c) 650
- d) 1250
- e) 1275

09. (EPCAR - 2016) O dono de uma loja de produtos seminovos adquiriu, parceladamente, dois eletrodomésticos. Após pagar $\frac{2}{5}$ do valor dessa compra, quando ainda devia R\$ 600,00, resolveu revendê-los. Com a venda de um dos eletrodomésticos, ele conseguiu um lucro de 20% sobre o custo, mas a venda do outro eletrodoméstico representou um prejuízo de 10% sobre o custo. Com o valor total apurado na revenda, ele pode liquidar seu débito existente e ainda lhe sobrou a quantia R\$ 525,00.

A razão entre o preço de custo do eletrodoméstico mais caro e o preço de custo do eletrodoméstico mais barato, nessa ordem, é equivalente a:

- a) 5
- b) 4
- c) 3
- d) 2

10. (UEG - 2015) Considere o gráfico a seguir de uma função real afim $f(x)$.



A função afim $f(x)$ é dada por:

- a) $f(x) = -4x + 1$
- b) $f(x) = -0,25x + 1$
- c) $f(x) = -4x + 4$
- d) $f(x) = -0,25x - 3$
- e) $f(x) = -0,4x + 1$

GABARITO

- 1) A
- 2) D
- 3) B
- 4) A
- 5) D
- 6) A
- 7) B
- 8) D
- 9) C
- 10) B

Função do 2º grau

Na Matemática, as funções representam uma relação entre duas grandezas variáveis. Há diversos tipos de funções e neste capítulo estudaremos as funções de 2º grau, também chamadas de funções quadráticas. As funções de 2º grau possuem aplicações muito importantes em Física, por exemplo, no movimento uniformemente variado e no lançamento oblíquo. Neste capítulo vamos aprender os métodos para solucionar esse tipo de função e a associação de seus coeficientes à sua representação gráfica.

Definição

Chama-se função quadrática toda relação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Em que **a**, **b** e **c** são números reais constantes, chamados de coeficientes, com $a \neq 0$. Veremos alguns exemplos:

- $f(x) = 5x^2 + 4x - 2$ é uma função do 2º grau com $a = 5$, $b = 4$, $c = 2$.
- $g(x) = x^2 + 3$ é função do 2º grau com $a = 1$, $b = 0$, e $c = 3$.
- $h(x) = 2x^2 + x$ é função do 2º grau, com $a = 2$, $b = 1$ e $c = 0$.
- $i(x) = 4x + 2$, não é função do 2º grau pois $a = 0$.

Note que **a** $\neq$ **0** é uma condição de existência, pois se o coeficiente **a** for igual a zero, a função não será quadrática. Entretanto, os coeficientes **b** e **c** podem ser iguais a zero.

Quando todos os termos da função quadrática são diferentes de zero, a função é chamada de completa. Caso contrário, ou seja, se os coeficientes **b** e/ou **c** são iguais a zero, a função é chamada de incompleta.

Domínio da função

A função quadrática é de domínio real, ou seja, o x pode ser qualquer número real e, a cada número real x , associamos um número na forma $ax^2 + bx + c$.

Gráfico de uma função quadrática

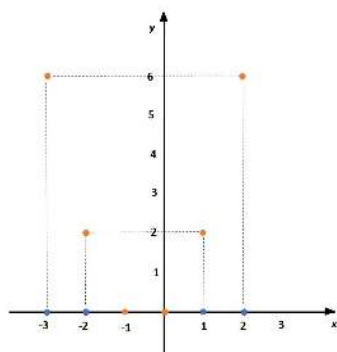
As funções, por serem relações entre duas grandezas, possuem uma curva específica para cada uma dessas relações. Diferente das funções do 1º grau, em que se conhecermos dois pontos é possível traçar o gráfico, nas funções quadráticas são necessários conhecer vários pontos. Por exemplo, vamos desenhar o gráfico da seguinte função quadrática:

$$f(x) = x^2 + x.$$

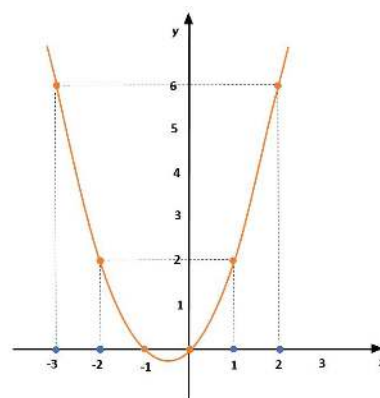
A maneira mais intuitiva para definir o gráfico é atribuir valores para a variável x , e calcular as respectivas imagens $f(x)$. A Tabela mostra os valores atribuídos para x e as suas respectivas imagens $f(x)$.

x	$f(x)$
-2	6
-1	0
0	0
1	2
2	6

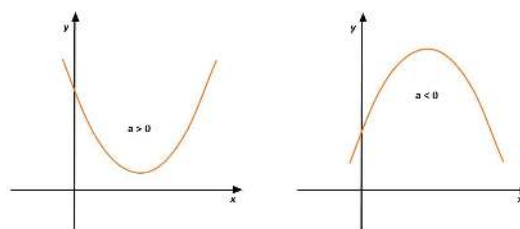
Desenhando o plano cartesiano e ligando os pares ordenados, obtemos a seguinte Figura:



Ligando-se os pontos obtidos por meio dos pares ordenados, obtemos a curva abaixo. Essa curva é a representação geométrica da função quadrática e chamamos de **parábola**,



A abertura de uma parábola é chamada de concavidade. Pelo coeficiente **a** da função quadrática, definimos se a concavidade será voltada para cima ou para baixo. Quando **a > 0**, a concavidade será voltada para cima e quando **a < 0**, a concavidade será voltada para baixo, como podemos ver na imagem abaixo.



A construção do gráfico de uma função quadrática, por meio de tabelas, como feito anteriormente, é um método útil; porém, para ganhar tempo e precisão, podemos fazer a construção dos gráficos de uma maneira mais rápida, utilizando alguns pontos importantes que a função possui, como veremos a seguir.

Pontos importantes de uma função quadrática

Em uma função quadrática existem três pontos principais que podemos utilizar para construir a parábola, são eles:

1. Zeros da função;
2. Ponto de vértice; e
3. Intersecção com o eixo y.

Agora veremos com detalhes cada um desses pontos.

Zeros da função

Os zeros de uma função são os pontos em que a parábola intercepta o eixo x. Portanto, os zeros da função podem ser encontrados igualando-as a zero.

Se prestarmos atenção, percebemos que uma função quadrática é uma equação do 2º grau cujo resultado é variante. Quando igualamos a função a zero, podemos encontrar as suas raízes. As raízes de uma equação de 2º grau são calculadas em função dos coeficientes da equação, por meio da fórmula de Bhaskara.

Seja a equação do 2º grau:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

as raízes da equação é obtida pela expressão:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Fórmula de Bhaskara)

Para fins didáticos, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de discriminante da equação do segundo grau e representada pela letra grega delta (Δ)

). Então, a fórmula de Bhaskara é escrita como:

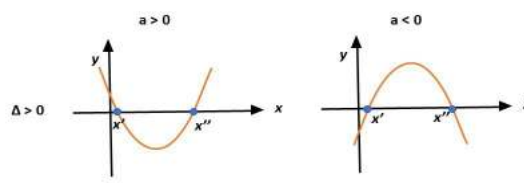
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

A partir do valor do discriminante da equação do 2º grau, podemos obter três situações diferentes a respeito das raízes da equação:

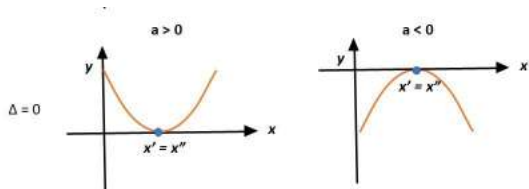
- Quando $\Delta > 0$, teremos duas raízes reais. Perceba que, pela fórmula de Bhaskara, é possível obter duas raízes: uma quando utilizamos o sinal positivo ($x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$) e outra quando utilizamos o sinal negativo ($x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$).
- Quando $\Delta = 0$, teremos apenas uma raiz real, em que os valores de x_1 e x_2 são iguais ($x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).
- Quando $\Delta < 0$, não teremos raízes reais.

Graficamente, de uma forma geral, a parábola pode ficar disposta em seis formas diferentes, divididas em três situações que dependem da concavidade e dos valores dos discriminantes, como mostra as Figuras a seguir.

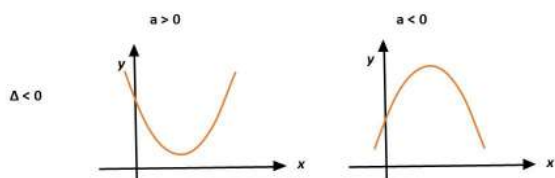
- 1 -** A função apresenta duas raízes, que cortam o eixo das abscissas em dois pontos distintos.



2 - A função apresenta uma raiz de multiplicidade dois, tocando o eixo das abscissas em apenas um ponto.



3 - Não ocorre interseção com o eixo das abscissas, ou seja, a função está toda acima ou abaixo do eixo. Isso indica que não existe no conjunto dos números reais um valor que zere a função.



É extremamente importante que você saiba resolver corretamente as funções e equações, e que entenda o que significa os resultados obtidos. Para fixar o conteúdo, vamos ver o exemplo abaixo e, depois, resolver os exercícios propostos.

Exemplo 01. Determine os zeros da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Solução:

Como queremos encontrar os zeros, teremos que igualar a função a zero, ou seja:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Primeiramente, temos que identificar os coeficientes: **a** = 1, **b** = -6 e **c** = 5.

Depois de identificados, vamos calcular o valor do discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$

$$\Delta = 16$$

Como $\Delta > 0$, então teremos duas raízes distintas e, conseqüentemente, dois valores que zeram a função,

Aplicando na fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 5 \text{ e } x_2 = 1$$

As raízes da equação são os zeros da função. Logo, temos que:

$$f(5) = 0 \text{ e } f(1) = 0.$$

Agora tente resolver os exercícios abaixo para aplicar o método de Bháskara.

Exercícios propostos

01. Encontre o zero das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 9x + 14$

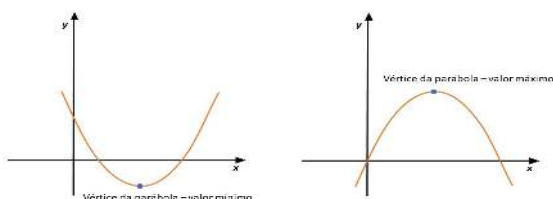
b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = x^2 - 6x + 13$

d) $f(x) = x^2 + 9$

Vértice da parábola

O vértice é um ponto muito importante e representa o ponto em que uma função quadrática assume o seu valor máximo, caso a concavidade seja virada para baixo, ou mínimo, se a concavidade é virada para cima. Além disso, o vértice é o ponto em que o gráfico de uma função quadrática muda o sentido da sua curvatura.



As coordenadas do vértice de uma parábola, chamadas de x do vértice (x_v) e y do vértice (y_v), podem ser determinadas por meio de fórmulas que envolvam os coeficientes da função.

Agora veremos como encontrar as coordenadas do vértice da parábola a partir da fórmula de Bhaskara.

Nós vimos anteriormente que as raízes de uma função é dada pela fórmula:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Então:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como a parábola é simétrica, podemos dizer que a coordenada x do vértice (x_v) está bem no meio, entre as duas raízes. Logo, podemos calculá-la por:

$$x_v = \frac{\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)}{2}$$

$$x_v = -\frac{2b}{4a}$$

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Já para descobrir a coordenada y do vértice (y_v), vamos substituir o valor de x_v na própria função quadrática, veja:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

Substituindo x_v na equação, temos:

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \left(\frac{b^2}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$

$$y_v = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2}$$

$$y_v = \frac{-a(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Agora, sempre que tiver que saber os máximos e mínimos de uma função quadrática, basta obter o seu vértice, $V = (x_v, y_v)$.

Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 02. Dada a função $f(x) = -x^2 + 4x - 2$, quais são as coordenadas do vértice?

Solução:

Primeiro, vamos identificar os coeficientes da função: **a** = -1, **b** = 4 e **c** = -2.

Para encontrar as coordenadas do vértice (x_v e y_v), vamos aplicar as fórmulas apresentadas anteriormente:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_v = \frac{-[(4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)]}{4 \cdot (-1)} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Portanto o ponto do vértice tem coordenadas V (2, 2).

Exemplo 03. Uma pessoa começa a receber um medicamento através de um soro e a quantidade **Q**, em mg, em sua corrente sanguínea varia de acordo com a função $Q(t) = -t^2 + 6t + 20$, sendo **t** o tempo em horas desde o início da aplicação do soro. Responda:

a) Após quanto tempo do início da aplicação do soro, a quantidade do medicamento na corrente sanguínea é máxima?

b) Qual é essa quantidade máxima?

Solução:

Primeiro, vamos identificar os coeficientes da função: **a** = -1, **b** = 6 e **c** = 20.

Como $a < 0$, a concavidade é virada para baixo, então a quantidade máxima de medicamento na corrente sanguínea e o tempo para que isso ocorra correspondem ao ponto máximo na parábola, ou seja, o ponto de vértice. Nesse caso, $x_v = t$ e $y_v = Q(t)$.

Logo,

a) Vamos calcular o tempo pela fórmula do x do vértice.

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3.$$

O tempo para que se atinja a quantidade máxima de medicamento na corrente sanguínea será de 3 horas.

b) Para calcularmos a quantidade máxima podemos utilizar a fórmula do y do vértice ou calcular por meio de $Q(3)$.

Utilizando a segunda opção, vamos substituir o valor de **t** encontrado na letra a) ($t = 3$) na função $Q(t)$. Sendo assim, temos que:

$$Q(3) = -(3)^2 + 6 \cdot 3 + 20$$

$$Q(3) = 29$$

Então, a quantidade máxima de medicamento na corrente sanguínea é de 29 mg.

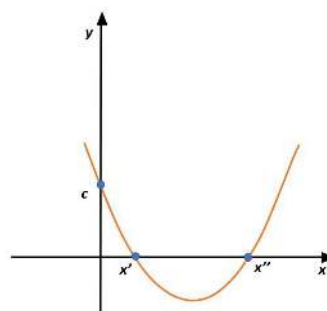
Para verificar o seu entendimento sobre esse assunto, resolva o exercício abaixo.

Exercício proposto:

02. (IFAL 2017 - Adaptada). No Laboratório de Química do IFAL, após várias medições, o pesquisador concluiu que a concentração de certa substância em uma amostra variava em função do tempo, medido em horas, segundo a função quadrática $f(x) = 5t - t^2$. Determine em que momento, após iniciadas as medidas, a concentração dessa substância foi máxima nessa amostra.

Intersecção com o eixo y

A intersecção com o eixo y ocorre quando $x = 0$. Temos que para $x = 0$, $f(x) = c$. Então o coeficiente **c** é o valor em que a parábola intercepta o eixo y.



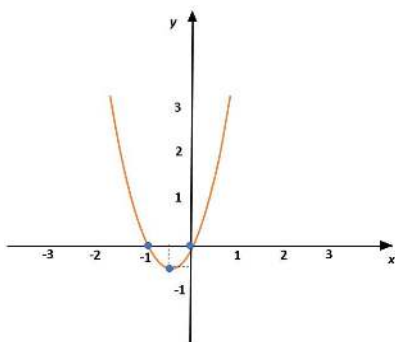
Agora, vamos voltar a função anterior $f(x) = x^2 + x$ e identificar os pontos notáveis mencionados. Para simplificar, vamos chamá-lo de **A** (zero da função), **B** (vértice) e **C** (intersecção com o eixo y).

A. Os zeros da função são os valores que anulam a função, ou seja, $f(x) = 0$. Podemos ver que os valores -1 e 0 anulam a função, pois $f(0) = 0$ e $f(-1) = 0$.

B. O vértice, obtido pelas expressões de x_v e y_v , tem como coordenadas $(-1/2, -1/4)$, e será o valor mínimo, pois a concavidade da parábola é voltada para cima ($a > 0$).

C. A função é do tipo incompleta em c, pois $c = 0$. Logo, a função intercepta o eixo y na origem (0,0).

Marcando os pontos A, B e C no plano cartesiano e traçando o gráfico, temos:



Perceba que, com apenas esses pontos, já é possível traçar o gráfico da função sem a necessidade de se utilizar a tabela. Logo, entender o que cada ponto representa e saber como encontrá-lo em uma função é de suma importância no entendimento desse conteúdo.

Imagem de uma função de 2º grau

A imagem de uma função, ou seja, os valores de y que pertencem à função, está intimamente ligada aos pontos de máximo e de mínimo, ou seja, ao vértice da função.

Existem duas possibilidades para o conjunto imagem de uma função quadrática:

Quando o vértice for ponto de máximo, ou seja, $a < 0$, o conjunto imagem será:

$$Im = \{y \in \mathbb{R} / y \geq y_v\}.$$

Neste caso, a imagem da função será o ponto máximo até menos infinito.

Quando o vértice for ponto mínimo, ou seja, $a > 0$, o conjunto imagem será:

$$Im = \{y \in \mathbb{R} / y \leq y_v\},$$

Para essa situação, a imagem da função será o ponto mínimo até mais infinito.

Crescimento e Decrescimento

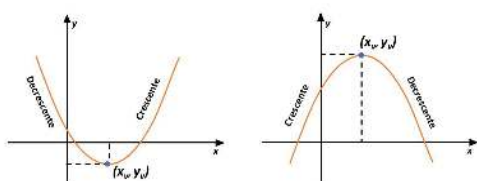
O crescimento e o decrescimento de uma função quadrática estão relacionados com o vértice da parábola e a sua concavidade.

Uma função quadrática sempre será crescente em um intervalo aberto e decrescente em outro. Como está relacionada à concavidade, teremos duas situações:

1 - Quando $a > 0$: A função f é decrescente em $]-\infty, \frac{-b}{2a}[$ e crescente em $]\frac{-b}{2a}, +\infty[$.

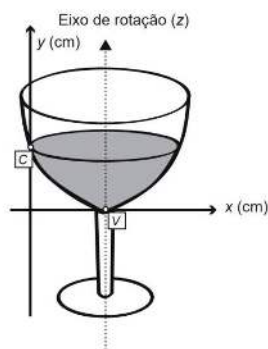
2 - Quando $a < 0$: A função f é crescente em $]-\infty, \frac{-b}{2a}[$ e decrescente em $]\frac{-b}{2a}, +\infty[$.

Veja a representação gráfica abaixo:



Exercícios

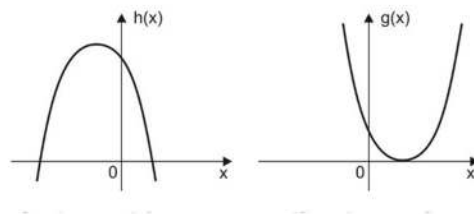
01. (ENEM - 2013) A parte inferior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z , conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V , na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x . Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros é:

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 5
- e) 6

02. (EPCAR - 2022) Nos gráficos indicados a seguir, estão desenhados duas parábolas que representam as funções reais h e g definidas pelas leis: $h(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = dx^2 + ex + f$, com a, b, c, d, e, f sendo números reais não nulos.



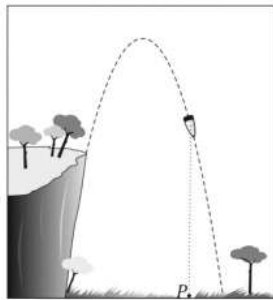
Com base nas informações e nos gráficos, é correto afirmar, necessariamente, que:

- a) $b.f < \frac{-e}{2.d}$
- b) $e^2 \neq 4.d.f$
- c) $a.d > f - e$
- d) $-\frac{b^2 - 4.a.c}{4.a} < 0$

03. (EPCAR - 2011) No tempo $t = 0$, o tanque de um automóvel está com a litros de combustível. O volume de combustível no tanque, em litros, após o carro entrar em movimento, é descrito por uma função de 2º grau em função do tempo t , em minutos. O carro entra em movimento, após 10 minutos do início do movimento, o tanque está com 36 litros de combustível e após 3 horas e 10 minutos do início do movimento, o volume de combustível no tanque se esgota. Sabe-se que o gráfico dessa função toca o eixo Ox num único ponto de coordenadas $(190, 0)$. Dessa forma, o número a está compreendido entre:

- a) 40 e 42
- b) 42 e 44
- c) 44 e 46
- d) 46 e 48

04. (FUVEST - 2015) A trajetória de um projétil, lançado da beira de uma penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura



O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?

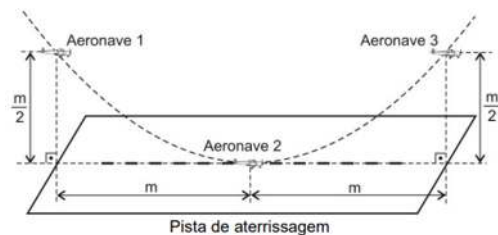
- a) 60
- b) 90
- c) 120
- d) 150
- e) 180

05 (ENEM - 2013). A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39° .

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

- a) 19,0
- b) 19,8
- c) 20,0
- d) 38,0
- e) 39,0

06. (EPCAR - 2022) Em um exercício de aperfeiçoamento de Cadetes da Força Aérea Brasileira, três aeronaves estão posicionadas como indicado na figura a seguir.



Em certo momento, as aeronaves 1, 2 e 3 são vistas de um determinado ponto, seguindo uma trajetória de voo sobre a curva de uma parábola, sendo dadas as suas distâncias de referência como a da figura.

Considere um plano cartesiano em que:

- As aeronaves 1, 2 e 3 estão sobre a trajetória de uma única parábola;
- A pista de aterrissagem está no eixo da abscissas;
- A posição de cada aeronave é um ponto (x, y) desse plano, onde $y = f(x)$ é a altura atingida pela aeronave, em km, em relação ao chão; e
- O eixo das ordenadas passa pela aeronave 1.

A lei da função **f** que satisfaz as condições estabelecidas na figura é:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2m}\right)(x - m)^2$

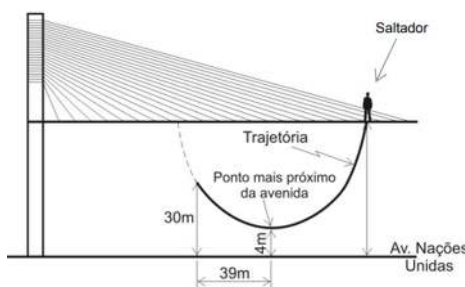
b) $f(x) = \left(\frac{1}{m}\right)(x + m)^2$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{2m}\right)(x - 2m)^2$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2m}\right)x^2$

07. (EPCAR - 2018) De acordo com o senso comum, parece que a juventude tem gosto por aventuras radicais. Os alunos do CPCAR não fogem dessa condição. Durante as últimas férias, um grupo desses alunos se reuniu para ir a São Paulo com o objetivo de saltar de “Bungee Jumping” da ponte Octávio Frias de Oliveira, geralmente chamada de “Ponte Estaiada”.

Em uma publicação na rede social de um desses saltos, eles, querendo impressionar, colocaram algumas medidas fictícias da aproximação do saltador em relação ao solo. Considere que a trajetória que o saltador descreve possa ser modelada por um função polinomial do 2 grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo eixo das abscissas coincida com a reta da Avenida das Nações Unidas e o eixo das ordenadas contenha o ponto mais próximo da Avenida, indicados na figura. Considere também as medidas informadas.



O coeficiente de x^2 da função com as características sugeridas é igual a:

a) $22/1521$

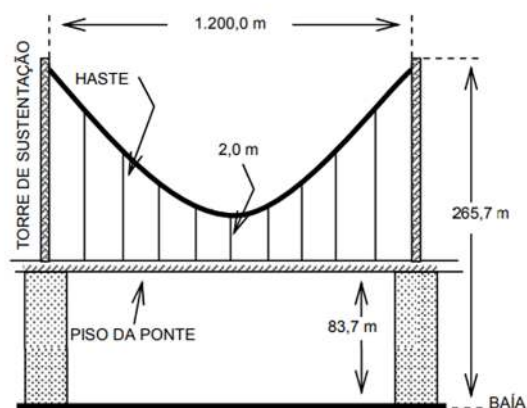
b) $2/117$

c) $13/1521$

d) $13/117$

08. (EPCAR - 2008) Um cabo de suspensão de uma ponte tem a forma de uma parábola, e seu ponto mais baixo está a 2,0 m acima do piso da ponte. A distância do piso da ponte em relação à superfície da baía é de 83,7 m, o cabo passa sobre as torres de sustentação, distantes 1200,0 m entre si, numa altura de 265,7 m acima da baía e é ligado ao piso da ponte por hastes rígidas perpendiculares a ela.

O comprimento de cada uma dessas hastes que ligam o cabo à ponte, distantes de 50 m do centro da ponte é, em metros, igual a:



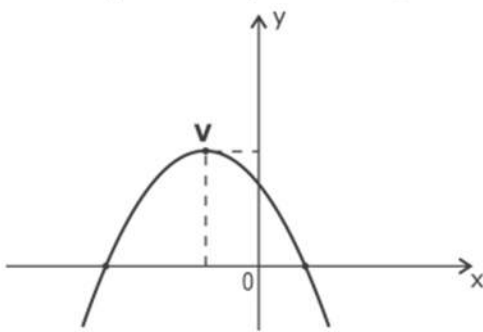
a) 1,25

b) 3,00

c) 3,25

d) 3,50

09. (EPCAR - 2010) Seja a função real definida por: $f(x) = ax^2 + bx + c$ e V o vértice da parábola, representada graficamente por:



Após a análise gráfica, assinale a alternativa **INCORRETA**:

- a) $a \cdot b \cdot c^2 < 0$
- b) $\frac{a \cdot b^2}{c} < 0$
- c) $a^2 + b \cdot c > 0$
- d) $b \cdot c - a < 0$

10. (ENEM 2016 - 2ª aplicação) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número **f** de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$, em que **t** é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção, e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria da Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita. No dia em que o número de infectados chegasse a marca de 1600 pessoas, uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

- a) 19º dia
- b) 20º dia
- c) 29º dia
- d) 30º dia
- e) 60º dia

GABARITO

- 1) E
- 2) A
- 3) A
- 4) D
- 5) D
- 6) A
- 7) A
- 8) C
- 9) D
- 10) B

Potenciação e Radiciação

A potenciação e a radiciação são operações matemáticas muito importantes, assim como a adição, subtração, multiplicação e divisão. Enquanto a potenciação é uma multiplicação, na qual todos os fatores são iguais, a radiciação procura descobrir que fatores são esses, fornecendo o resultado dessa multiplicação. Tanto a potenciação quanto a radiciação possuem inúmeras aplicações, por exemplo, nas funções exponenciais e na resolução das equações de 2º grau. Neste capítulo veremos sobre cada uma delas, as suas características e propriedades, além de como resolver as expressões envolvendo essas duas operações.

Multiplicação

Antes de iniciarmos o assunto sobre potenciação e radiciação, faremos uma breve revisão sobre as propriedades da multiplicação.

1) Propriedade Comutativa

A propriedade comutativa, também é conhecida como “*a ordem dos fatores não altera o produto*”, nos diz que não importa a ordem em que escrevemos os fatores a serem multiplicados, o resultado sempre será o mesmo:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Exemplo 01.

$$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$$

2) Propriedade Associativa

A propriedade associativa nos diz que a associação dos fatores não altera o produto. Isso significa que a ordem em que associamos os números na multiplicação não altera o resultado final.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Exemplo 02.

$$3 \cdot (4 \cdot 5) = (3 \cdot 4) \cdot 5 = 60$$

3) Propriedade Distributiva

Segundo a propriedade distributiva podemos distribuir a multiplicação em relação à soma e à subtração.

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

$$a \cdot (b - c) = ab - ac$$

Exemplo 03.

$$3 \cdot (4 \pm 5) = (3 \cdot 4) \pm (3 \cdot 5)$$

04. Elemento Neutro

Segundo essa propriedade, existe um elemento que não altera o valor da multiplicação. Esse elemento é o número 1, chamado de elemento neutro.

$$1 \cdot a = a$$

$$1 \cdot (b + c) = b + c$$

Potenciação

A potenciação é definida como a operação matemática que representa a multiplicação de diversos fatores iguais. Assim, podemos escrever a potenciação, de uma forma geral, como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ fatores iguais}}$$

***n** fatores iguais*

Sendo que a^n corresponde ao produto de n fatores iguais a a .

Em relação à nomenclatura, chamamos o a de base, o qual indica o fator que está se repetindo na multiplicação, o n de expoente, que representa quantas vezes a base aparece na multiplicação, e a^n de potência, que corresponde ao resultado obtido ao resolvermos a multiplicação.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 04. a) O produto $2 \cdot 2$ pode ser escrito como 2^2 .

b) O produto $2 \cdot 2 \cdot 2$ pode ser escrito como 2^3 .

c) O produto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ pode ser escrito como 2^4 .

Note que a quantidade de vezes que o número 2 aparece no produto é o número que vai em cima do 2. Assim:

$$\begin{array}{c} \text{Expoente} \\ \nearrow \\ 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ \nwarrow \quad \searrow \\ \text{Base} \quad \text{Potência} \end{array}$$

Observação: O expoente é um número natural, podendo ser inteiro positivo, negativo ou irracional.

Exemplo 05. Indique a base, o expoente e a potência:

a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

A base é 3, o expoente é 4 e a potência é 81.

b) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

A base é 5, o expoente é 3 e a potência é 125.

Até aqui, nós vimos apenas a potenciação envolvendo a base composta por números positivos. Entretanto, temos que tomar cuidado quando temos uma base negativa, pois a forma como estará denotada influenciará no resultado. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 06. As potências $(-2)^2$ e -2^2 apresentam o mesmo resultado?

Vejamos:

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$$

Note que a única diferença entre as potências acima é o uso de um parêntese, mas que resultam em valores diferentes. Isso acontece, pois quando temos $(-2)^2$, tanto o número quanto o sinal estão elevados a dois, já em -2^2 , apenas o número que está sendo elevado ao quadrado.

Agora, se o expoente ao invés de 2 for 3. Como ficaria o resultado?

Vejamos:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$$

Neste caso, os resultados foram iguais. Então, podemos concluir que as potências $(-a)^n$ e $-a^n$ terão resultados diferentes quando o expoente n for um número par e resultados iguais quando n for um número ímpar.

Em relação aos sinais da base, temos três regras que podem ser utilizadas:

1) Base positiva

Se o expoente for par ou ímpar, o resultado sempre será positivo:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

2) Base negativa e expoente par

Se a base for negativa e o expoente um número par, o resultado da potência será positivo:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

3) Base negativa e expoente ímpar:

Se a base for negativa e o expoente um número ímpar, o resultado da potência será negativo:

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

Vale lembrar que essas regras valem para qualquer base, seja inteira, racional ou irracional.

Potência de números racionais

Na potência de números racionais, a base é composta por um número racional. Essa operação é análoga ao que observamos nos exemplos vistos até agora. Veja:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Em que o número $\frac{2}{3}$ aparece n vezes.

As regras de sinais aprendidos também valem aqui. Observe alguns exemplos:

$$\text{a)} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

$$\text{b)} \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\text{c)} \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3^3}{4^3} = -\frac{27}{64}$$

Observação: Quando temos a potenciação envolvendo uma fração, também temos que nos atentar na ordem correta para fazer a notação e, consequentemente, as operações. Veja:

$$\text{a)} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\text{b)} \frac{3^2}{4} = \frac{9}{4}$$

A única diferença entre as letras **a)** e **b)** é o uso de um parêntesis. Ele nos indica o que está sendo elevado ao expoente: em **a)**, a fração está dentro do parênteses e tudo fica elevado ao expoente. Enquanto, em **b)**, apenas o número 3 está elevado ao expoente.

Exercício proposto

01. Calcule as potências:

$$\text{a)} \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{b)} -\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\text{c)} -\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \quad \text{d)} \left(-\frac{1}{3}\right)^3$$

e) $\left(\frac{3}{10}\right)^2$ f) $\frac{3}{(10)^2}$

g) $\frac{3^2}{10}$ h) -2^2

i) $(-2)^2$ j) $-(-2)^2$

Operações com potências

Imagine que quiséssemos calcular $7^2 \cdot 7^5$, daria para fazer da forma como vimos até agora: elevar cada número ao expoente e depois multiplicá-los, mas daria muito trabalho.

Agora veremos algumas operações entre potências que podem facilitar os cálculos.

Dados os números reais a e b e os números inteiros m e n , temos:

01) Multiplicação de potência de mesma base.

Quando temos uma multiplicação de potências de bases iguais, nós mantemos a base e somamos os expoentes:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Exemplo 07. Reduza a uma só potência:

a) $5^3 \cdot 5^2$

Como apresentam a mesma base, vamos mantê-la e somar os expoentes:

$$5^3 \cdot 5^2 = 5^{3+2} = 5^5$$

b) $5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^7$

Como apresentam a mesma base, vamos mantê-la e somar os expoentes:

$$5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^7 = 5^{3+2+7} = 5^{12}$$

02) Divisão de potência de mesma base.

Quando temos uma divisão de potências, temos que manter a base e subtrair os expoentes:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Exemplo 08. Reduza a uma só potência:

a) $\frac{5^3}{5^2}$

Como apresentam a mesma base, vamos mantê-la e subtrair os expoentes:

$$\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1$$

b) $\frac{2^7}{2^{-3}}$

Como apresentam a mesma base, vamos mantê-la e subtrair os expoentes:

$$\frac{2^7}{2^{-3}} = 2^{7-(-3)} = 2^{10}$$

03) Potência de potência de mesma base.

Nesse caso, nós mantemos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplo 09. Reduza a uma só potência: $(2^5)^3$.

Utilizando a propriedade 03, temos que manter a base e multiplicar os expoentes:

$$(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$$

Observação: Devemos tomar cuidado para não confundir “potência de potência” com “potência de ordem superior”. A potência de ordem superior é quando na sua representação a base está elevada a um expoente que está elevado a outro expoente. Nestes casos, apenas o expoente da potência é elevado ao outro expoente. Veja:

Potência de ordem superior:

$$2^{2^3} = 2^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^8$$

Potência de potência:

$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

Então, $a^{m^n} \neq (a^m)^n$.

04) Potência de um produto.

Nessa propriedade, nós fazemos a distributiva em relação ao expoente:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Exemplo 10.

$$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$$

05) Potência de uma divisão

É similar a propriedade de potência de um produto, ou seja, fazemos a distributiva em relação ao expoente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Exemplo 11:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^7 = \frac{2^7}{5^7}$$

Observação: Essas duas últimas propriedades são válidas para as operações de multiplicação e divisão. Não podemos utilizar em relação à soma ou à subtração.

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n \text{ e}$$

$$(a - b)^n \neq a^n - b^n$$

Agora, podemos calcular facilmente a expressão $2^7 \cdot 5^7$, utilizando a propriedade de potência de um produto. Assim:

$$2^7 \cdot 5^7 = (2 \cdot 5)^7 = 10^7 = 10000000$$

Propriedades das potências

Assim como vimos na multiplicação, a potenciação também tem suas propriedades específicas e servem para facilitar a escrita e os cálculos.

Propriedade 1. Todo número elevado a 1 é igual ao próprio número:

$$a^1 = a$$

Exemplo 12:

$$8^1 = 8$$

Propriedade 2. Todo número, diferente de zero, elevado a 0 é igual a 1:

$$a^0 = 1$$

Exemplo 13:

$$98^0 = 1$$

Observação: Quando temos 0^0 , o resultado é indeterminado. Quando temos o zero elevado a qualquer outro número o resultado sempre será 0. Assim:

$$0^4 = 0.0.0.0 = 0.$$

Propriedade 3. Toda potência de base "1" elevada a qualquer expoente possui como resultado o próprio valor 1:

$$1^n = 1$$

Exemplo 14:

$$1^8 = 1.1.1.1.1.1.1.1 = 1$$

Propriedade 4. Potência de expoente negativo.

A princípio essa propriedade pode lhe parecer estranha, pois vimos até agora que o expoente é o número de vezes que multiplicamos a base. Então, o que isso significa?

Para compreender o que significa um expoente negativo, vamos resolver um exemplo.

Veja o que acontece quando multiplicamos 2^{-1} por 2^1 . Como temos uma multiplicação com mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes:

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

E pela propriedade 2, qualquer número elevado a zero é igual a 1. Para um caso mais geral:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^0 = 1$$

Note que, sempre que multiplicamos um número qualquer, elevado a um expoente, pelo mesmo número, mas com o expoente oposto, o resultado será 1. Se $a^n \cdot a^{-n} = 1$, podemos passar a^n para o outro lado do sinal da igualdade. Portanto:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Isso significa que a^n e a^{-n} são números inversos. Essa relação é válida para qualquer expoente n e qualquer número a , com exceção quando $n = 0$, pois o zero não possui inverso. Portanto, quando temos um expoente negativo, temos que inverter a base e trocar o sinal do expoente:

$$\text{a) } 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{1}\right)^1 = 4$$

$$\text{c) } (-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

Note que, nos exemplos acima, o sinal negativo do expoente não interferiu no resultado final, pois esta não é a sua função.

Observação: Esse conceito é utilizado para explicar porque 0^0 é um resultado indeterminado, pois se quiséssemos calcular 0^0 , deveríamos fazer $\frac{0^1}{0^1} = 0^1 - 0^1 = 0^0$. Entretanto, estaríamos dividindo um número por zero, o que não existe.

Propriedade 5. Todo número elevado a um expoente fracionário pode ser transformado em um radical, em que o denominador do expoente representa o índice da raiz:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Exemplo 15. Transforme a potência $4^{\frac{7}{3}}$ em radical:

$$4^{\frac{7}{3}} = (\sqrt[3]{4})^7$$

Exercícios propostos

02. Calcule as potências:

- a) $\left(-\frac{1}{3} \cdot 5 + 6 \cdot \frac{3}{7}\right)^0$ b) $3^4 \cdot 3^{-2}$
- c) $\left(\frac{5}{3}\right)^4 : \left(\frac{5}{3}\right)^4$ d) $\left(\frac{5}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$
- e) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^4$ f) $\left(\frac{5}{4}\right)^6 : \left(\frac{4}{5}\right)^3$
- g) $(x^2)^3$ h) $\left(\frac{x}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{x^3}{7^2}\right)$

03. Escreva as potências na forma de radical:

- a) $2^{\frac{1}{5}}$ b) $4^{\frac{2}{3}}$
- c) $8^{-\frac{1}{2}}$ d) $(a^3 b)^{\frac{1}{4}}$

Radiciação

A radiciação é a operação inversa da potenciação, ou seja, a radiciação busca um número que satisfaz determinada potência.

De um modo geral, podemos escrever como:

$$\begin{array}{c} \text{Índice} \swarrow \quad \searrow \text{Radicando} \\ n \sqrt[n]{a} = b \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Radical} \quad \text{Raiz} \end{array}$$

Em que n é o índice ($n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$), a é o radicando, b é a raiz e $\sqrt[n]{}$ é chamado de radical. Veja os exemplos abaixo:

- a) $\sqrt{4}$, lê-se a raiz quadrada de 4. Quando temos uma raiz com índice $n = 2$, costuma-se omitir o índice no símbolo do radical ($\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$). Para o caso mais geral, dizemos raiz n -ésima de a .
- b) $\sqrt[3]{27}$, lê-se a raiz cúbica de 27.
- c) $\sqrt[5]{32}$, lê-se a raiz quinta de 32.
- d) $\sqrt[n]{a}$, lê-se a raiz n -ésima de a .

Nós vimos que uma das propriedades da potenciação diz que todo número elevado a um expoente fracionário pode ser transformado em um radical e a operação inversa também é verdadeira. Então, o radical pode ser escrito na forma de potência:

$$b^n = a$$

Note que a radiciação é uma maneira diferente de representar uma potência com expoente fracionário.

Raiz quadrada e raiz cúbica

As raízes quadradas e cúbicas de um número são importantes operações matemáticas, além de serem umas das mais comuns.

Uma raiz quadrada de um número a é um número positivo, que quando multiplicado por ele mesmo é igual a a . As raízes quadradas são fundamentais para a resolução das equações do 2º grau.

A raiz cúbica de um número a corresponde ao número que multiplicado três vezes por ele mesmo, dá como resultado a .

Veja os exemplos:

a) Raiz quadrada:

$$\sqrt{4} = 2, \text{ pois } 2^2 = 4$$

b) Raiz cúbica:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ pois } 2^3 = 8$$

Observação: um número que é quadrado de um número inteiro, recebe a denominação de quadrado perfeito. Enquanto, um número que é cubo de um número inteiro é chamado de cubo perfeito. Veja na tabela alguns números que são quadrados e cubos perfeitos.

x	x^2	x^3
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64

5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000

Raiz de um número real

O valor do radicando (a) pode ser um número positivo ou negativo. Entretanto, dependendo se o índice é par ou ímpar, a raiz pode existir ou não. Veja:

1) Se $b \geq 0$ e n é par ou ímpar, a raiz sempre será um número real positivo ou nulo:

$$\sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25.$$

2) Se $b < 0$ e n é par, não existe raiz, ou seja, não existe raiz de índice par de um número negativo. Isso acontece pois não há um número real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo:

$$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}, \sqrt[6]{-100} \notin \mathbb{R}.$$

3) Se $b < 0$ e n é ímpar, a raiz sempre será um número real negativo:

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \Leftrightarrow (-2)^5 = -32$$

Propriedades da radiciação

A radiciação possui uma série de propriedades, assim como as demais operações, que facilitam nos cálculos. As suas propriedades são derivadas da potenciação, uma vez que são operações inversas.

Propriedade 1. Potência de expoente radical.

Essa propriedade é a mesma da potenciação, em que o expoente é uma fração. Assim, todo radical pode ser escrito na forma de uma potência:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

O expoente do radicando corresponde ao numerador da fração e o índice da raiz representa o denominador.

Exemplo 16:

$$\sqrt[5]{4^3} = 4^{\frac{3}{5}}$$

Propriedade 2. Raiz em que o expoente do radicando é igual ao índice.

Essa propriedade nos diz que quando o índice for igual ao expoente do radicando, o resultado da raiz n -ésima é a própria radicando:

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$$

Exemplo 17:

$$\sqrt[3]{7^3} = 7^{\frac{3}{3}} = 7$$

Propriedade 3. Produto de raízes de índices iguais.

Na propriedade 3, o produto de duas raízes com índices iguais é igual à raiz de mesmo índice do produto dos radicandos. Assim:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Exemplo 18.

$$\sqrt[3]{a^3 \cdot b^6} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$$

Propriedade 4. Quociente de raízes de índices iguais.

De forma análoga à propriedade 3, a propriedade 4 diz que a divisão entre duas raízes de índices iguais é igual à raiz de mesmo índice da divisão dos quocientes:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplo 19.

$$\sqrt{\frac{81^6}{4^5}} = \frac{\sqrt{81^6}}{\sqrt{4^5}}$$

Propriedade 5. Potência de uma raiz.

Segundo a propriedade 5, a raiz n -ésima elevada a um determinado expoente m é igual à raiz n -ésima do radicando elevado ao expoente:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = b^{\frac{1}{n} \cdot m} = b^{\frac{m}{n}}$$

Exemplo 20.

$$(\sqrt[2]{5})^3 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 5^{\frac{1}{2} \cdot 3} = 5^{\frac{3}{2}}$$

Propriedade 6. Raiz de outra raiz

Quando tivermos uma raiz de outra raiz, temos que conservar o radicando e multiplicar os índices das raízes. Veja:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Exemplo 21.

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[3 \cdot 2]{3} = \sqrt[6]{3}$$

Propriedade 7. Simplificação de radicais

Uma raiz n -ésima de uma potência pode ser simplificada. A simplificação é feita pela multiplicação do índice e do expoente do radicando por qualquer número desde que seja diferente de 0.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Essa última propriedade é utilizada quando queremos reduzir as raízes ao mesmo índice. Isso pode facilitar na hora de resolvermos os exercícios. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 22. Reduza a uma única raiz: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3}$.

Note que as duas raízes apresentam índices diferentes: 3 e 4. Então, nós não podemos utilizar a propriedade 4 para fazer a multiplicação das duas raízes, pois para fazer a multiplicação os índices devem ser iguais. Entretanto, com base na propriedade 7, multiplicamos o 1º índice por 4 e o 2º índice por 3. Fazendo isso, teremos o mesmo índice, no caso é 12. Veja:

$$\sqrt[3 \cdot 4]{2^4} \cdot \sqrt[4 \cdot 3]{3^3} = \sqrt[12]{16} \cdot \sqrt[12]{27}$$

Agora as duas raízes apresentam o mesmo índice, assim, podemos fazer a multiplicação delas:

$$\sqrt[12]{16} \cdot \sqrt[12]{27} = \sqrt[12]{432}$$

Observação: Nem sempre é fácil identificar os números que devemos multiplicar os índices para torná-los iguais. Um método para resolver isso seria determinar o M.M.C. dos índices,

que vai ser o índice do radical. Depois, dividimos o índice comum pelo índice de cada radical, e multiplicamos o quociente obtido em cada caso pelo expoente do radicando. Veja o exemplo.

Exemplo 23. Reduza os radicais $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2}$ ao mesmo índice.

Solução:

Os dois radicais possuem índices diferentes: 2 e 5.

Primeiro, vamos obter o M.M.C. de 2 e 5, que é M.M.C (2, 5) = 10. Esse valor será o novo índice, comum aos dois.

Em seguida, temos que dividir o valor encontrado pelo índice de cada radical e multiplicá-lo pelo expoente do radicando. Assim:

$$\sqrt[10]{a^{(10:2) \cdot 1}} \cdot \sqrt[10]{a^{(10:5) \cdot 2}}$$

$$\sqrt[10]{a^{(5) \cdot 1}} \cdot \sqrt[10]{a^{(2) \cdot 2}}$$

$$\sqrt[10]{a^5} \cdot \sqrt[10]{a^4}$$

Exercícios propostos

04. Escreva os radicais na forma de potência com expoente fracionário:

a) $\sqrt{7}$

b) $\sqrt[3]{3^5}$

c) $\sqrt[6]{2}$

d) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

05. Calcule o valor das expressões, simplificando o índice do radical com o expoente do radicando.

a) $\sqrt{10^2}$

b) $\sqrt{121}$

c) $\sqrt[15]{2^5}$

d) $\sqrt[9]{6^6}$

06. Escreva sob a forma de uma única raiz.

a) $\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\sqrt{6}}$

c) $2\sqrt[3]{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{2^3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{2}$

Operações com radicais

Vamos considerar a expressão algébrica: $5x + 3x - 4x$. Nós sabemos que quando temos termos, podemos reduzir a expressão a um só termo: $5x + 3x - 4x = 4x$.

De forma análoga, podemos utilizar esse procedimento quando temos radicais semelhantes em uma adição ou subtração algébrica:

$$8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$$

Esse procedimento também é válido quando temos mais de um radical semelhante, basta colocar os radicais em evidência e realizar a operação dos fatores externos. Veja:

$$8\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 7\sqrt{2}$$

$$(8 + 2)\sqrt{5} + (-3 + 7)\sqrt{2}$$

$$10\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$$

Note que dois ou mais radicais são semelhantes quando possuem o mesmo índice e o mesmo radicando.

Se os radicais forem diferentes, temos que verificar se é possível realizar a simplificação, por meio da fatoração, de modo a torná-los semelhantes.

Exercício proposto

07. Determine as expressões algébricas:

a) $12\sqrt{10} - 6\sqrt{10} - 8\sqrt{10}$

b) $\frac{7}{3}\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{81} + \frac{5}{4}\sqrt[3]{81}$

c) $5\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{3} + 2 - 45\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{3}$

Como encontrar o valor de uma raiz

Para encontrar o valor de uma raiz, uma das formas de resolver é a realizar a fatoração, por meio da decomposição em fatores primos, e escrever o número na forma de potência.

Exemplo 24. Encontre a raiz de $\sqrt{1024}$

Solução:

Primeiramente devemos fatorar o radicando, ou seja, 1024:

1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Assim, o número 1024 pode ser escrito como 2^{10} , ou seja, o 2 elevado a 10° potência resulta no número 1024.

Agora podemos calcular o valor da raiz quadrada de 1024:

$$\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}}$$

Transformando o radical em potência, temos:

$$\sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

Exemplo 25. Encontre a raiz de $\sqrt{2704}$.

Solução:

Primeiramente devemos fatorar o radicando, ou seja, 2704:

2704	2
1352	2
676	2
338	2
169	13
13	13
1	

Assim, o número 2704 pode ser escrito como $2^4 \cdot 13^2$. Entretanto, como queremos obter a raiz quadrada, podemos separar os números em potências de 2 para simplificar os cálculos, ou seja, $2^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2$. Então:

$$\sqrt{2704} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2} = 2 \cdot 2 \cdot 13$$

$$\sqrt{2704} = 52$$

No caso da raiz quadrada, quando decompos um número em fatores primos, podemos ter dois tipos de raízes:

1) Raiz quadrada exata: o resultado faz parte do conjunto dos números racionais, ou seja, podem ser números inteiros, decimais exatos e

dízimas periódicas, por exemplo: $\sqrt{16} = 4$ e $\sqrt{75,69} = 8,7$.

2) Raiz quadrada não exata: o resultado faz parte do conjunto dos números irracionais, ou seja, podem ser números decimais infinitos e não-periódicos, por exemplo: $\sqrt{3} = 1,732\dots$ e $\sqrt{5} = 2,236\dots$

Observação: Esse procedimento de fatoração pode ser utilizado para qualquer índice do radical.

Exercício proposto

08. Fatore os radicandos e escreva na forma de potência com expoente fracionário:

a) $\sqrt[3]{32}$

b) $\sqrt[7]{81}$

c) $\sqrt[8]{512}$

d) $\sqrt[8]{625}$

Racionalização de denominadores

Quando temos uma expressão fracionária em que o denominador é um radical, ou seja, um número irracional, como em $\frac{4}{\sqrt{3}}$, precisamos racionalizar a fração.

Racionalizar uma fração significa achar uma fração equivalente à ela, mas com um denominador racional, ou seja, temos que eliminar o radical do denominador. Para isso, basta multiplicarmos ambos os termos da fração por um número conveniente e que transforme o denominador em um número racional. Veja o exemplo.

Exemplo 26. Racionalize as frações abaixo:

a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

Vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$, pois ao fazermos isso eliminamos o radical do denominador:

$$\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

Neste caso, temos que multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt[3]{2^2}$, pois $1 + 2 = 3$, e assim eliminamos a raiz do denominador:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^1 \cdot 2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^{2+1}}}$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2}$$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

Aqui, no denominador não temos apenas o radical; então, temos que multiplicar pelo conjugado do denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1$$

Exercício proposto

09. Racionalize o denominador das expressões:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

c) $\frac{1}{4+\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Exercícios

01. (EPCAR - 2011) Simplificando a expressão:

$$S = \frac{(x^{-2})^{222} \cdot [(-x^{-2})^{322}]^{-1}}{x^{23} \cdot [(-x^3)^{32}]^{23}}$$

onde $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$, obtém-se:

a) $-x^{-94}$

b) x^{94}

c) x^{-94}

d) $-x^{94}$

02. (EPCAR - 2020) Considere os números A e B , tais que:

$$A = 2^{1001} + 4^{501} - 256^{125}$$

$$B = \frac{8^{0,666...} + (0,25)^{-\frac{3}{2}} - (0,5)^{-\sqrt{9}} + 9^{0,5}}{\left[\frac{1}{2 \cdot (0,2)^{-2} - (\sqrt[3]{10})^0} \right]^{-0,5}}$$

Se $C = (5AB)^{\frac{1}{2}}$, então C é igual a:

a) $20 \cdot 2^{296}$

b) $10 \cdot 2^{499}$

c) $25 \cdot 2^{500}$

d) $40 \cdot 2^{492}$

03. (EPCAR - 2018) Considere o conjunto de todos os valores de m e n para os quais a expressão algébrica A , abaixo, está definida:

$$A = \frac{\frac{m^2}{n^2} - \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{m \cdot n} + \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{(m-n)^{-2}}{(m^2-n^2)^{-1}}$$

Nesse conjunto, uma expressão algébrica equivalente a A é:

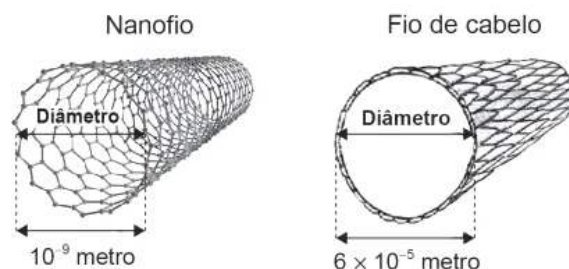
a) $m^2 + n^2$

b) $m^2 - n^2$

c) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$

d) $\frac{m^2+n^2}{m-n}$

04. (ENEM - 2021) O nanofio é um feixe de metais semicondutores usualmente utilizado na fabricação de fibra óptica. A imagem ilustra, sem escala, as representações das medidas dos diâmetros de um nanofio e de um fio de cabelo, possibilitando comparar suas espessuras e constatar o avanço das novas tecnologias.



O número que expressa a razão existente entre o comprimento do diâmetro de um fio de cabelo e o de um nanofio é:

a) 6×10^{-14}

b) $6 \times 10^{-\frac{5}{9}}$

c) $6 \times 10^{\frac{5}{9}}$

d) 6×10^4

e) 6×10^{45}

05. (EPCAR - 2009) Analise as expressões abaixo:

$$A = \sqrt[3]{\frac{(0,005)^2 \cdot (0,000075)}{10}}$$

$$B = -\left[\frac{(5 \cdot 10^{-4}) \cdot (2^{-1/3})}{3^{-1/3}}\right]$$

Marque a resposta correta;

a) $A + B > 0$

b) $A \cdot B = -1$

c) $\frac{A}{B} = -1$

d) $A^{-1} = B$

06. (UFPB - 1977) A expressão numérica $2\sqrt{27} - \sqrt{75} + 3\sqrt{12}$ é igual a:

a) $2\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{12}$

c) $4\sqrt{27}$

d) $7\sqrt{3}$

07. (UECE - 2002) A expressão numérica $5\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{16}$ é igual a:

a) $\sqrt[3]{1458}$

b) $\sqrt[3]{729}$

c) $2\sqrt[3]{70}$

d) $2\sqrt[3]{38}$

08. (EPCAR - 2016) Simplificando as expressões:

$$A = \frac{\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \cdot x^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy}} \quad \text{e} \quad B = \frac{x^2 - xy}{2x},$$

nas quais $y > x > 0$, é correto afirmar que:

a) $\frac{A}{B} = 2^{-1}$

b) $\frac{B}{A} \in \mathbb{N}$

c) $A \cdot B > 0$

d) $A + B > 0$

09. (EPCAR - 2016) Analise as proposições abaixo e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA):

() Se $m = \frac{0,0001 \cdot (0,01)^2 \cdot 1000}{0,001}$, então $m = \frac{1}{100}$

() O número $(0,899^2 - 0,101^2)$ é menor que $\frac{7}{10}$

() $\left(\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^{\sqrt{2}-1}} \cdot \sqrt{4 \cdot \sqrt{(2\sqrt{3}+1)^{\sqrt{3}-1}}} \right)$ é irracional

A sequência correta é:

a) V - F - F

b) V - F - V

c) F - F - F

d) F - V - V

10. (ENEM - 2010) Embora o índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices, são:

$$IMC = \frac{massa (kg)}{[altura (m)]^2}$$

$$RIP = \frac{altura (cm)}{\sqrt[3]{massa (kg)}}$$

ARAUJO, C. G. S.; RICARDO, D. R. Índice de Massa Corporal: Um Questionamento Científico Baseado em Evidências. Arq. Bras. Cardiologia, volume 79, no 1, 2002 (adaptado).

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 kg/m², então ela possui RIP igual a:

- a) 0,4 cm/kg^{1/3}
- b) 2,5 cm/kg^{1/3}
- c) 8 cm/kg^{1/3}
- d) 20 cm/kg^{1/3}
- e) 40 cm/kg^{1/3}

GABARITO

- 1) A
- 2) B
- 3) A
- 4) D
- 5) C
- 6) D
- 7) A
- 8) C
- 9) A
- 10) E

Números Primos e Compostos

Todos os números naturais maiores que 1 podem ser classificados em apenas dois grupos: os primários e os compostos. Os números primários são os chamados números primos, enquanto os números compostos são todos os outros números. Para entender melhor sobre esse assunto, vamos abordar neste capítulo as definições e as relações entre os números primos e compostos.

Números Primos

Antes de falar sobre os números primos, precisamos entender o que são os divisores de um número.

Os divisores de um número

Definição: Dado dois números inteiros, se a divisão do primeiro pelo segundo é exata, dizemos que o primeiro é divisível pelo segundo e o segundo é divisor do primeiro.

Essa definição pode parecer um pouco confusa, vamos ver um exemplo, para ficar mais claro.

O número 10 pode ser dividido exatamente por 1, 2, 5 e por ele mesmo, 10. Os números 1, 2, 5 e 10 são chamados de divisores de 10. E a este conjunto de números, damos o nome de conjunto dos divisores de um número, e pode ser escrito da seguinte forma:

$$D(10) = \{1, 2, 5 \text{ e } 10\}.$$

Agora podemos definir o que são números primos.

Os números primos são números naturais que admitem apenas dois divisores diferentes: o número um e ele mesmo.

Vejamos o conjunto dos divisores de alguns números:

a) $D(2) = \{1, 2\};$

b) $D(3) = \{1, 3\};$

c) $D(5) = \{1, 5\};$

d) $D(7) = \{1, 7\};$

e) $D(11) = \{1, 11\}.$

Observando tais conjuntos, podemos notar que temos como divisores desses números somente o 1 e ele próprio, portanto os números 2, 3, 5, 7 e 11 são números primos.

Note que o número 1 não é um número primo, pois ele possui apenas um divisor natural, ele mesmo.

Dois números naturais são primos entre si se o único divisor comum entre eles é o número 1.

Curiosidade: O número 2 é o único número primo que é par. Todos os pares após o 2, são divisíveis por 2, portanto, já possuem mais de dois divisores distintos.

Lista de Números Primos

É impossível construir uma lista com todos os números primos, pois eles são infinitos. É muito importante que você conheça alguns desses números, principalmente os primeiros, mas não é necessário que você decore muitos deles, desde que

saiba como descobrir se um número é primo ou não.

E como identificar se o número é um número primo?

Para identificar se um número é primo ou não, precisamos dividir o número dado, sucessivamente, pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ..., até que o quociente seja menor ou igual ao divisor. Se a divisão não for exata, o número dado é primo.

Vamos ver o exemplo a seguir.

Exemplo 01. Verifique se o número 163 é primo?

Solução:

Primeiro, temos que verificar se o número 163 é divisível pelos números primos até que o quociente seja menor ou igual ao divisor.

- a) 163 é divisível por 2? Não.
- b) 163 é divisível por 3? Não.
- c) 163 é divisível por 5? Não.
- d) 163 é divisível por 7?
- e) 163 é divisível por 11?
- f) 163 é divisível por 13?

Para responder as três últimas perguntas, vamos efetuar as divisões:

$$\begin{array}{r} 163 \overline{) 7} \\ 14 \\ \hline 23 \\ 21 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 163 \overline{) 11} \\ 11 \\ \hline 53 \\ 44 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 163 \overline{) 13} \\ 13 \\ \hline 33 \\ 26 \\ \hline 7 \end{array}$$

- d) 163 é divisível por 7? Não e o quociente é maior que o divisor (23 > 7).

- e) 163 é divisível por 11? Não e o quociente é maior que o divisor (14 > 11).

- f) 163 é divisível por 13? Não e o quociente é menor que o divisor (12 < 13).

Note que nenhuma das divisões são exatas, e que o quociente resultante da divisão de 163 por 13 é menor que o divisor (12 < 13). Portanto, o número 163 é um número primo.

Agora, para verificar o seu entendimento e fixar o conteúdo, resolva os exercícios a seguir.

Exercícios propostos:

01. Verifique se os números abaixo são números primos:

- a) 37
- b) 109
- c) 251
- d) 57

Além do método que acabamos de ver para verificar se um número é primo ou não, podemos fazer isso de outra maneira, conhecido como Crivo de Eratóstenes.

Eratóstenes foi um matemático do século 300 a.C., e ele criou um método simples e prático para encontrar os números primos até um valor determinado. Para isso, ele fez uma tabela de 1 até 50 e, seguiu alguns passos:

1º) Riscou o número 1 porque ele não é um número primo.

2º) Marcou o número 2, que é primo, e riscou todos os outros números divisíveis por 2.

3º) Marcou o número 3, que é primo, e riscou os demais números que são divisíveis por 3.

4º) Marcou o número 5, que é primo, e riscou os demais números que são divisíveis por 5.

5º) Prosseguiu da mesma forma, até que não houvesse mais números a serem riscados.

Após fazer isso, ele chegou ao resultado de que todos os números que não estavam riscados eram números primos.

Veja a tabela com o crivo de Eratóstenes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Note que você pode montar a tabela para qualquer valor.

Até agora, nós vimos os números naturais que admitem apenas dois divisores naturais diferentes; mas, e se o número apresenta mais de dois divisores naturais? Esse é o assunto que veremos a seguir.

Números Compostos

Os números compostos são números naturais, diferente de 1, que admite mais de dois divisores naturais distintos.

Vejamos o conjunto dos divisores de alguns números:

a) $D(4) = \{1, 2 \text{ e } 4\}$;

b) $D(6) = \{1, 2, 3 \text{ e } 6\}$;

c) $D(8) = \{1, 2, 4 \text{ e } 8\}$;

d) $D(10) = \{1, 2, 5 \text{ e } 10\}$;

e) $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6 \text{ e } 12\}$.

Diferente dos números primos, para todos os números acima temos mais de dois divisores. Sendo assim, os números 4, 6, 8, 10 e 12 são chamados de números compostos.

Agora que você já sabe a diferença de números primos e compostos, resolva os exercícios a seguir.

Exercícios propostos

02. Quais dos números a seguir são primos e quais são compostos?

a) 13

b) 81

c) 545

d) 227

e) 559

Decomposição em fatores primos

Se observarmos os exemplos anteriores, podemos ver que os números compostos são uma composição de números primos, ou seja, qualquer número composto pode ser decomposto em fatores primos.

Vamos ver os seguintes exemplos:

a) $6 = 2 \cdot 3$

b) $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

c) $25 = 5 \cdot 5$

d) $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

Então, para determinar a decomposição em fatores primos de um número, podemos seguir os seguintes passos:

(I) Colocar o número a ser decomposto em fatores primos e fazer um traço vertical.

(II) Dividir o número pelo seu menor divisor primo, e o divisor é colocado à direita do traço vertical.

(III) Dividir o quociente da divisão anterior pelo seu menor divisor primo, e repetir esses passos até chegar ao quociente 1.

(IV) Todos os números que se encontram à direita do traço vertical formam o conjunto dos divisores positivos do número.

Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 02. Decomponha em fatores primos o número 30.

Solução:

Vamos seguir os passos apresentados acima:

$$30 \mid 2$$

$$15 \mid 3$$

$$5 \mid 5$$

$$1 \mid$$

Assim, o número 30 pode ser escrito como:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Exemplo 03. Decomponha em fatores primos o número 36.

Solução: $36 \mid 2$

$$18 \mid 2$$

$$9 \mid 3$$

$$3 \mid 3$$

$$1 \mid$$

Assim, o número 36 pode ser escrito como:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Entretanto, note que, o número 36 também pode ser escrito como:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

A partir desse último resultado, veremos agora um dos principais teoremas da aritmética: o Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema Fundamental da Aritmética

Segundo o teorema fundamental da aritmética, todo número composto inteiro pode ser expresso por um produto de potência de números primos, ou seja, $N = a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots$, em que **a**, **b** e **c** são números primos.

Por exemplo, o número 90 pode ser escrito como:

$$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$

Exercícios propostos:

02. Faça a decomposição em fatores primos dos seguintes números: 28, 60, 115 e 350.

Exercícios

01. (EPCAR - 2018) Considere quatro números naturais distintos tais que, quando adicionados três a três, resultem em: 152, 163, 175 e 185,

Sobre esses quatro números é correto afirmar que:

- a) todos são números menores que 70.
- b) nenhum é múltiplo de 10.
- c) Apenas um é número primo.
- d) algum é quadrado perfeito.

02. (EPCAR - 2014) Se **a** e **b** são primos entre si então **(a-b)** é igual a:

- a) 23
- b) 22
- c) 21
- d) 20

03. (EPCAR - 2009) Um número **x** de três algarismos, tal que $\sqrt{x} < 14$, tem o produto de seus algarismos igual a 24; se permutarmos os dois últimos algarismos de **x**, o número **y** assim obtido excede **x** de 18 unidades.

Com base nos dados acima, é correto afirmar que:

- a) o máximo divisor comum de y e x não é um número primo.
- b) a razão $r = \frac{x}{y}$ é tal que $r > \frac{37}{41}$.
- c) y tem 2 divisores a mais que x.
- d) a soma dos algarismos de x com os algarismos de y é menor que 20.

04. (FUVEST - 2021) O quadrinho aborda o tema: os números primos são ímpares, sobre os quais é correto afirmar:



- a) Todos os números primos são ímpares.
- b) Existem, no máximo, 7 trilhões de números primos.
- c) Todo número da forma 2^n , $n \in \mathbb{N}$, é primo.
- d) Entre 24 e 36, existem somente 2 números primos.
- e) O número do quadrinho, 143, é um número primo.

05. (UERJ - 2021) De acordo com o teorema fundamental da aritmética, todo número natural maior que 1 é primo ou é um produto de números primos. Observe os exemplos:

$$1964 = 2^2 \cdot 491$$

$$1994 = 2 \cdot 997$$

O maior número primo obtido na fatoração de 1716 é:

- a) 17
- b) 13
- c) 11
- d) 7

06. (UFRGS - 2018) Tomando-se os números primos compreendidos entre 0 e 20, o número de frações do tipo $\frac{a}{b}$, em que $a < b$, que pode ser formado é:

- a) 21
- b) 27
- c) 28
- d) 30
- e) 36

07. (UECE - 2018) Seja n o número obtido como a soma dos inversos multiplicativos dos números primos positivos que são fatores do número 195. Se p é o inverso multiplicativo de n , então, p cumpre a condição:

- a) $1,5 < p < 1,7$
- b) $1,4 < p < 1,6$
- c) $1,8 < p < 1,9$
- d) $1,7 < p < 1,8$

08. (FATEC - 2012) Seja M um subconjunto finito do conjunto dos números inteiros. Sobre os elementos de M , considere as seguintes informações:

- 40 são números primos;
- 50 são números positivos;
- 14 são números não primos e não positivos;

- 8 são números primos e positivos.

Considerando M o subconjunto dos inteiros com menor número de elementos que satisfazem, simultaneamente, as informações, pode-se afirmar corretamente que em M há:

- a) 112 elementos.
- b) 64 números que não são primos.
- c) 90 números que são primos ou positivos.
- d) 42 números que são positivos e não primos certo.
- e) 36 números que são primos e não positivos.

09. (EPCAR - 2017) Uma agência de turismo fez o levantamento para apurar a faixa etária de um grupo de N pessoas que se interessaram por determinada viagem.

No registro das idades dessas pessoas, em anos, foram utilizadas exatamente N números inteiros positivos e entre esses números foi observado que:

- 10 eram múltiplos de 8,
- 12 eram múltiplos de 4 e
- 8 eram números primos.

É correto afirmar que o número de divisores positivos de N é igual a:

- a) 7
- b) 6
- c) 5
- d) 4

10.(ESPM - 2013) Sabe-se que as raízes da equação $x^2 + kx + 6 = 0$ são dois números naturais primos. O valor de k pertence ao intervalo:

- a) $[-8, -6]$
- b) $[-6, -3]$
- c) $[-3, 0]$
- d) $[0, 4]$
- e) $[4, 7]$

GABARITO

- 1) C
- 2) A
- 3) C
- 4) D
- 5) B
- 6) C
- 7) A
- 8) D
- 9) B
- 10) B

Critérios de Divisibilidade,

MMC e MDC

A divisão está presente em inúmeras situações cotidianas, sendo um assunto de grande importância. Entretanto, nem sempre é tão simples resolver os problemas de divisão sem o auxílio de uma calculadora. Felizmente, existem alguns métodos que facilitam a resolução de divisões mais complexas ou de números muito grandes. Neste capítulo abordaremos algumas ferramentas que facilitam a resolução de problemas matemáticos envolvendo divisão, como os critérios de divisibilidade, mínimo múltiplo comum (MMC) e máximo divisor comum (MDC). Apesar de serem conceitos básicos de matemática, são extremamente necessários para a compreensão de outras matérias, como as funções matemáticas.

Divisão

Antes de iniciarmos, vamos fazer uma breve revisão sobre divisão. A divisão é um assunto muito importante e que merece uma atenção especial, pois todo o conceito de multiplicidade, divisibilidade, MMC e MDC vem da ideia de divisão.

Vamos supor que nós temos 25 itens a serem distribuídos em 8 pacotes. Quantos itens conseguirei alocar em cada pacote? Será que é possível fazer isso de modo exato ou irá sobrar algum item? Vejamos:

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 8} \\ - 24 \\ \hline 1 \end{array}$$

Neste caso, obtivemos 8 pacotes com 3 itens em cada e ainda sobra um item. Podemos dizer, então, que 25 dividido por 8 resulta em 3 com sobra de 1.

Em uma forma mais genérica, temos:

$$\begin{array}{r} D \overline{) d} \\ R \\ \hline q \end{array}$$

Em que o **D** é chamado de dividendo, o **d** de divisor, o **q** de quociente e o **R** de resto. Sendo que: **D = d . q + R**.

No caso do exemplo anterior, o 25 é o dividendo, o 8 é o divisor, o 3 é o quociente e o 1 é o resto.

Note que **D** pode ser qualquer número, enquanto os termos **d**, **q** e **R** apresentam algumas restrições. O termo **d** tem que ser diferente de zero, o valor de **q** tem que ser menor que o de **d** e **r** deve ser positivo e menor que **d**.

Nomenclaturas

A seguir, veremos algumas nomenclaturas que são muito importantes e que serão abordadas ao longo do curso, além de serem amplamente utilizadas nas questões de aritmética.

Considerando a divisão acima, podemos dizer que **D** é dividido por **d**, dando como resultado **q** e resto **R**. Se o resto for nulo, ou seja, $R = 0$, dizemos que:

D é divisível por **d**;

D é múltiplo de **d**;

d é divisor de **D**; e

d divide **D**.

Por exemplo, se dividirmos 10 por 2, o resto é zero. Então 10 é múltiplo de 2, 10 é divisível por 2, 2 é divisor de 10 e 2 divide 10. Note que todas essas afirmativas são equivalentes.

Acabamos de ver que um número é divisível por outro quando a divisão é exata, mas como fazemos para saber se um número é ou não divisível por outro?

Por exemplo, seria 120 divisível por 4? Vamos fazer a conta:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 4 \\ - 12 & 30 \\ \hline 00 & \end{array}$$

Vemos que o resto da divisão é 0. Então, 120 é divisível por 4. Mas e se esse número fosse maior, por exemplo, 5224 é divisível por 4?

Teríamos que fazer a conta para descobrirmos? Ou será que conseguiríamos verificar isso sem, de fato, fazermos as contas? Existem algumas regras que nos permitem verificar se um número é ou não divisível por outro, que são os chamados critérios de divisibilidade.

Critérios de divisibilidade

Agora veremos os critérios de divisibilidade dos números de 2 a 11.

Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 se seu último algarismo for par (0, 2, 4, 6 ou 8). Por exemplo, 2, 16 e 378 são divisíveis por 2, pois terminam em número par.

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 se a soma de seus algarismos também for divisível por 3. Por exemplo:

a) 123 é divisível por 3, pois $1 + 2 + 3 = 6$.

b) 21 é divisível por 3, pois $2 + 1 = 3$.

c) 587 é divisível por 3, pois $5 + 8 + 7 = 21$.

Divisibilidade por 4

Um número é divisível por 4 se seus dois últimos algarismos formarem um número divisível por 4. Por exemplo, 16, 124 e 1540 são divisíveis por 4 pois os dois últimos algarismos são divisíveis por 4.

Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 se seu último algarismo for 5 ou 0. Por exemplo, os números 135, 220 e 2025 são divisíveis por 5, pois terminam em 5 ou 0.

Divisibilidade por 6

Um número é divisível por 6 se for divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo, ou seja, seu último algarismo deve ser par e a soma de seus algarismos deve ser divisível por 3.

Por exemplo, o número 324 é divisível por 3, pois é par e a soma dos seus números é divisível por 3 ($3 + 2 + 4 = 9$).

Divisibilidade por 7

Um número é divisível por 7 quando a diferença entre o número que se obtém retirando-se o algarismo das unidades do número original e o dobro desse algarismo for múltiplo de 7.

Observação: esse processo pode ser feito quantas vezes necessário até se obter um número pequeno e mais fácil de avaliar.

Veja o exemplo a seguir:

a) 1659

$$165 - 2 \cdot 9 = 147.$$

$$14 - 2 \times 7 = 0,$$

Então, o número 1659 é divisível por 7.

Divisibilidade por 8

Um número é divisível por 8 se seus três últimos algarismos formarem um número divisível por 8. Por exemplo, os três últimos algarismos dos números 23800 e 1024 são divisíveis por 8, portanto esses números são divisíveis por 8

Divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 se a soma de seus algarismos também é. Veja os exemplos:

a) 27 é divisível por 9, pois $2 + 7 = 9$.

b) 648 é divisível por 9, pois $6 + 4 + 8 = 18$.

Divisibilidade por 10

Um número é divisível por 10 se seu último algarismo for zero. Por exemplo, os números 20, 460 e 7340 são divisíveis por 10, pois termina em 0.

Divisibilidade por 11

É parecido com o critério de divisibilidade por 7. Um número será divisível por 11 quando a soma dos algarismos das ordens ímpares subtraída da soma dos algarismos das ordens pares for um número divisível por 11. Veja os exemplos:

a) 12232, é divisível por 11, pois $(3 + 2) - (2 + 2 + 1) = 5 - 5 = 0$.

Vamos praticar? Resolva os exercícios a seguir para verificar e fixar o conteúdo aprendido.

Exercícios propostos

01. Considere os seguintes números:

21, 32, 41, 55, 126, 384, 570, 2541 e 7920.

Pergunta-se:

- a) Quais deles são divisíveis por 1?
- b) Quais deles são divisíveis por 2?
- c) Quais deles são divisíveis por 3?
- d) Quais deles são divisíveis por 4?
- e) Quais deles são divisíveis por 5?
- f) Quais deles são divisíveis por 6?
- g) Quais deles são divisíveis por 8?
- h) Quais deles são divisíveis por 9?
- i) Quais deles são divisíveis por 10?

02. Dado um número de 3 algarismos: $5\mathbf{k}6$, pergunta-se:

a) Esse número é divisível por 5?

b) Quais valores devemos substituir $\mathbf{k}$ para se obter um número divisível por 3?

03. Substitua as letras **A** e **B** no número $5\mathbf{A}38\mathbf{B}$, para se obter um número divisível, ao mesmo tempo, por 5, 9 e 10.

Como determinar os diversos divisores de um número?

No capítulo anterior, nós vimos como decompor um número em fatores primos. Para determinar todos os seus possíveis divisores, devemos realizar todos os produtos possíveis entre seus fatores (sem usá-los mais vezes do que aparecem na decomposição).

Uma forma organizada de realizar esses produtos é realizá-los junto à própria decomposição (em uma terceira coluna), na qual se anota os resultados do produto entre o fator atual por todos os fatores e divisores anotados anteriormente.

Por exemplo:

60	2	1, 2
30	2	2, 4
15	3	3, 6, 12
5	5	5, 10, 20, 15, 30,
		60
1	1	

Assim, os divisores de 60 serão :

$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

Note: o número 1 sempre deve ser anotado logo ao início pois sempre será divisor para qualquer número.

Máximo Divisor Comum

O máximo divisor comum, cuja sigla é MDC, refere-se ao maior número que é, simultaneamente, divisor de todos os números de um dado conjunto de dois ou mais números naturais e diferentes de zero.

Exemplo 01. Qual o MDC dos números 45 e 60?

Solução:

Temos que, os divisores de 60 são:

$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

E os divisores de 45 são:

$D(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

Se compararmos os dois, vemos que os divisores comuns de 45 e 60 são:

$DC(45, 60) = \{1, 3, 5, 15\}$

Assim, o maior dos divisores comuns de 45 e 60 será o número 15, que é representado por:

$MDC(45, 60) = 15.$

Métodos para determinar o MDC

Para determinar o MDC entre dois ou mais números não é necessário calcular todos os seus divisores, pois existem métodos que simplificam o trabalho para se determinar tais números, como veremos a seguir.

Método 1: Decomposição em separado

Passo 1: Decompor cada número em fatores primos.

Passo 2: Multiplicar os fatores comuns com os menores expoentes.

Veja o exemplo:

Exemplo 02. Qual o MDC dos números 120 e 140?

Solução: Utilizando o método 1, temos:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Note que os fatores comuns são o 2 e o 5, sendo que o 2 aparece como 2^2 e 2^3 , assim devemos separar aquele com menor expoente (2^2).

Então,

$$\text{MDC}(120, 140) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Método 2: Decomposição simultânea

Passo 1: Decompor ambos os números ao mesmo tempo.

Passo 2: Destacar quais fatores pertencem à decomposição de ambos os números. **Dica:** marque esses fatores com um asterisco ou outro símbolo durante a decomposição.

Passo 3: Multiplicar os fatores destacados.

Exemplo 03. Vamos resolver agora o mesmo problema do exemplo anterior, mas aplicando o método 2.

Solução:

$$120, 140 \mid 2 \quad \times$$

$$60, 70 \mid 2 \quad \times$$

$$30, 35 \mid 2$$

$$15, 35 \mid 3$$

$$5, 35 \mid 5 \quad \times$$

$$1, 7 \mid 7$$

$$1, 1 \mid$$

Note que os fatores usados para dividir os dois números ao mesmo tempo estão marcados com um **X**. A multiplicação desses fatores é o que compõe o MDC.

Então,

$$\text{MDC}(120, 140) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Observações:

a) Quando não houverem fatores comuns entre os números, dizemos que o MDC é 1, e nesse caso dizemos que os números são primos entre si.

b) Números consecutivos sempre são primos entre si.

c) Dois números primos distintos sempre serão primos entre si.

Mínimo Múltiplo Comum

O mínimo múltiplo comum, cuja sigla é MMC, refere-se ao menor número diferente de zero que é múltiplo de todos os números pertencentes a um dado conjunto de dois ou mais números naturais e diferentes de zero.

Exemplo. Qual o MMC dos números 45 e 60?

Solução:

Para os números 45 e 60, temos que:

Os múltiplos de 60 são:

$$M(60) = \{0, 60, 120, 180, 240, 300, \dots\}$$

Os múltiplos de 45 são:

$$M(45) = \{0, 45, 90, 135, 180, 225, \dots\}$$

Os múltiplos comuns de 45 e 60 são:

$$MC(45, 60) = \{0, 180, 360, 540, \dots\}$$

Assim, o menor dos múltiplos diferente de zero e comum entre 45 e 60 será o número 180, que pode ser representado por:

$$\text{MMC}(45, 60) = 180$$

Métodos para determinar o MMC

Para determinar o MMC entre dois ou mais números não é necessário calcular seus múltiplos até encontrar um comum, pois existem métodos que podem ser utilizados para obtê-los mais fácil e mais rápido, como veremos a seguir.

Método 1: Decomposição em separado

Passo 1: Decompor cada número em fatores primos.

Passo 2: Multiplicar os fatores comuns e não comuns com os maiores expoentes.

Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 04. Qual o MMC dos números 120 e 140?

Solução:

Utilizando o método 1, temos:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Então,

$$\text{MMC}(120, 140) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$$

Método 2: Decomposição simultânea

Passo 1: Decompor ambos os números ao mesmo tempo.

Passo 2: Multiplicar todos os fatores.

Vamos resolver o exemplo anterior, utilizando o 2º método:

$$120, 140 \mid 2$$

$$60, 70 \mid 2$$

$$30, 35 \mid 2$$

$$15, 35 \mid 3$$

$$5, 35 \mid 5$$

$$1, 7 \mid 7$$

$$1, 1 \mid$$

Então,

$$\text{MMC}(120, 140) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$$

Observações:

a) Se A e B são primos entre si, $\text{MMC}(A, B) = A \times B$.

b) $\text{MDC}(A, B) \times \text{MMC}(A, B) = A \times B$.

Para verificar o seu entendimento sobre o assunto visto neste capítulo, resolva os exercícios propostos a seguir.

Exercícios Propostos

01. Dados os números 24 e 40, determine:

- a)** os divisores de 24;
- b)** os divisores de 40;
- c)** os divisores comuns de 24 e 40;
- d)** o maior divisor comum de 24 e 40.

02. Determine o MMC e o MDC entre os números:

- a)** 10 e 5;
- b)** 56 e 60;
- c)** 21 e 12;
- d)** 13 e 17;
- e)** 150 e 240.

03. Sabendo que o produto de dois números é 1134 e que o MMC entre eles é 81, determine o MDC deles.

04. Determine os dois menores múltiplos comuns dos números 45, 54 e 81.

05. Determine o valor de x no número $N = 3 \cdot 5^2 \cdot 2^{x+1}$, para que o MDC entre 96, N e 240 seja 24.

Exercícios

01. (EPCAR 2021) Considere, em $\mathbb{N}^*$, os seis menores números consecutivos tais que:

- a soma dos três menores é igual ao número A;
- a soma dos três maiores é igual ao número B;
- o número A é divisível por 5; e
- o número B é divisível por 6.

Analise as afirmações a seguir e marque a única correta.

- a) $A + B$ é um número múltiplo de 12.
- b) O máximo divisor comum de A e B é um número maior que 10
- c) O produto de A por B é um número quadrado perfeito.
- d) O mínimo múltiplo comum de A e B é igual a 120.

02. (UEG - 2007) Um comerciante de materiais para cercas recebeu 12 troncos de madeira de seis metros de comprimento e outros 9 de oito metros. Ele determinou a um de seus funcionários que trabalha na preparação dos materiais que cortasse os troncos para fazer estacas, todas de mesmo comprimento, para utilizá-las numa cerca para área de pastagem. Disse-lhe ainda que os comprimentos deviam ser os

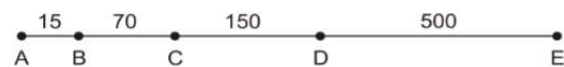
maiores possíveis. A tarefa foi executada pelo funcionário, e o número total de estacas preparadas foi:

- a) 144
- b) 75

c) 72

d) 64

03. (EPCAR - 2011) Um agricultor fará uma plantação de feijão em um canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.



Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância **d** entre todos eles fosse a mesma e a maior possível. Se x representa o número de vezes que a distância **d** foi obtida pelo agricultor, então x é um número divisível por:

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7

04. (EEAR - 2001) Considere as afirmativas:

I - Numa divisão, cujo resto r não é nulo, o menor número que se deve adicionar ao dividendo para que ela se torne exata é $d - r$, sendo d o divisor.

II - A soma de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 3.

III - O produto de dois números ímpares consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre um quadrado perfeito.

São verdadeiras as afirmativas:

- a) I e II.
- b) I e III.
- c) II e III.
- d) I, II e III.

05. (EPCAR - 2011) Em um prédio de 90 andares, numerados de 1 a 90, sem contar o térreo, existem 4 elevadores que são programados para atender apenas determinados andares. Assim o elevador:

- O para nos andares múltiplos de 11;
- S para nos andares múltiplos de 7;
- C para nos andares múltiplos de 5;
- T para em todos os andares.

Todos esses elevadores partem do andar térreo e funcionam perfeitamente de acordo com sua programação.

Analise as afirmativas abaixo, classificando cada uma em **V** (verdadeira) ou **F** (falsa).

() No último andar para apenas 1 elevador.

() Não há neste prédio um andar em que parem todos os elevadores, com exceção do próprio térreo.

() Existem, neste prédio, 4 andares que param 3 elevadores com exceção do próprio térreo.

Tem-se a sequência correta em:

- a) F-V-V
- b) F-V-F
- c) V-F-V
- d) F-F-V

06. (UFC-CE) Considere um número inteiro formado por cinco algarismos cuja representação na base dez seja **abcde**. Considere também o fato de que um número dessa forma é divisível por 11 se, e somente se, **a + c + e - b - d** for divisível por 11.

Com base nessas condições, assinale a alternativa na qual consta um número divisível por 11.

- a) 50623
- b) 65432
- c) 71819
- d) 78321
- e) 83621

07. (UNICAMP) Um número de três algarismos **2b3** é adicionado ao número 324, obtendo-se **5c7**. Se **5c7** é divisível por 9, o valor de **b + c** é igual a:

- a) 10
- b) 11
- c) 12
- d) 13
- e) 14

08. (EPCAR - 2010) Um número **x** de três algarismos, tal que $\sqrt{x} < 14$ tem o produto de seus algarismos igual a 24; se permutarmos os dois últimos algarismos de **x**, o número **y** assim obtido excede **x** de 18 unidades. Com base nos dados acima, é correto afirmar que:

a) O máximo divisor comum de y e x NÃO é um número primo.

b) a razão $r = \frac{x}{y}$ é tal que $r > \frac{37}{41}$.

c) y tem 2 divisores a mais que x.

d) a soma dos algarismos de x com os algarismos de y é menor que 20.

09. (EPCAR - 2011) Sabe-se que x , y e z são números naturais distintos e $x > y$. Considere $A = x \cdot y$ e $B = (x \cdot y \cdot z)^2$ e que o MDC (A , B) e o MMC (A , B) são, respectivamente, 21 e 1764. Se $W = x^2 + y^2 + z^2$, então o conjunto formado pelos divisores naturais de W possui:

a) 4 elementos.

b) 6 elementos.

c) 9 elementos.

d) 12 elementos.

10. (FUVEST - 1991) No alto de uma torre de uma emissora de televisão duas luzes “pisçam” com frequência diferentes. A primeira “pisca” 15 vezes por minuto e a segunda “pisca” 10 vezes por minuto. Se num certo instante as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a piscar simultaneamente?

a) 12

b) 10

c) 20

d) 15

e) 30

GABARITO

- 1) D
- 2) C
- 3) D
- 4) D
- 5) A
- 6) C
- 7) A
- 8) C
- 9) A
- 10) A

Frações e Dízimas Periódicas

As frações correspondem a uma representação das partes de um todo e fazem parte do nosso contexto diário, por exemplo, ela está presente quando vamos fazer uma receita culinária ou quando vamos dividir uma conta com um grupo de amigos. Neste capítulo veremos os tipos de frações, as operações realizadas com frações e outras formas de representação das frações.

Frações

As frações são uma forma de representar matematicamente algo dividido em partes iguais e elas fazem parte do conjunto dos números racionais.

A fração pode ser representada, na forma escrita, por dois números inteiros:

1) Numerador: que fica na posição de cima da fração, e representa a parte do todo; e

2) Denominador: que fica na posição de baixo da fração, e representa todas as partes do todo.

Veja: $\frac{x}{y}$

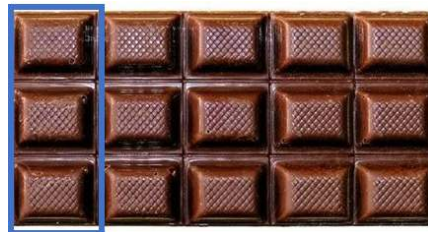
Em que o x é o numerador e o y é o denominador.

Vamos ver um exemplo prático, para entendermos melhor esse conceito.

Suponha que você tenha uma barra de chocolate dividida em 12 pedaços iguais, como mostra a Figura abaixo:



Imagine, agora, que você pegue 3 pedaços dessa barra para dar ao seu amigo:



Nós podemos utilizar a fração para representar essa parte que foi retirada.

Matematicamente, temos que sobrepor os dois números. No caso do exemplo acima, a fração ficaria:

$$\frac{3}{12}$$

Em que 3 é o numerador e 12 é o denominador.

Observações: Note que todo número inteiro pode ser escrito como uma divisão de outros dois números inteiros. Exemplo:

$$4 = \frac{12}{3}$$

As frações representam números racionais, isso significa que elas possuem as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. É o que veremos a seguir.

Operações com frações

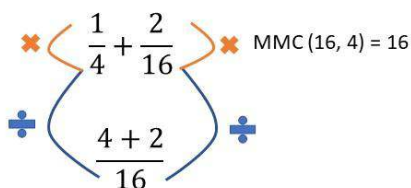
Adição e Subtração

Para somar ou subtrair, primeiramente, devemos identificar se os denominadores são iguais ou diferentes. Se forem iguais, basta repetir o denominador e somar os numeradores. Entretanto, se os denominadores forem diferentes, antes de somar, devemos transformar as frações para que tenham o mesmo denominador. Para isso, devemos tirar o mínimo múltiplo comum (MMC) entre os denominadores das frações e esse valor passa a ser o novo denominador. Em seguida, devemos dividir o MMC encontrado pelo denominador de cada uma das frações e multiplicar o resultado pelo numerador de cada uma delas. Veja os exemplos abaixo:

a) Denominadores iguais:

$$\frac{5}{11} + \frac{2}{11} = \frac{7}{11}$$

b) Denominadores diferentes:



$$\frac{1}{4} + \frac{2}{16} = \frac{4+2}{16}$$

MMC(16, 4) = 16

$$\frac{4+2}{16} = \frac{6}{16}$$

Multiplicação de frações

Para multiplicar duas ou mais frações, devemos multiplicar o numerador da primeira com o numerador da segunda (e assim

sucessivamente) e proceder da mesma forma com os denominadores, ou seja, na multiplicação com frações, basta multiplicar o numerador com numerador e denominador com denominador. Exemplo:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{20}{16} = \frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 16} = \frac{40}{80}$$

Divisão de frações

Para realizar a divisão entre duas frações, mantemos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda. O inverso de uma fração é obtido trocando o numerador pelo denominador. Veja o exemplo a seguir:

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$$

Agora, para praticar o conteúdo visto, resolva os exercícios a seguir.

Exercícios propostos

01. Calcule as operações com frações:

a) $\frac{7}{12} + \frac{5}{12}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

c) $2 + \frac{1}{7}$

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{3}{4}$

e) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$

f) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3}$

g) $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{7}$

h) $\frac{7}{9} \div \frac{14}{3}$

Tipos de frações

Mesmo sendo estruturadas da mesma maneira, nem toda a fração é igual. Veremos agora alguns tipos específicos de frações.

Fração Própria

Nas frações próprias o numerador possui valor absoluto menor do que o denominador, ou seja, esse tipo de fração representa um número menor que 1. Exemplos:

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{79}{100}$$

Frações impróprias

Ao contrário das frações próprias, nas frações impróprias o numerador possui um valor absoluto maior do que o denominador, ou seja, essas frações representam um número maior que 1. Exemplos:

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{100}{79}$$

Frações aparentes

Nas frações aparentes, o numerador é divisível pelo denominador, ou seja, esse tipo de fração pode ser representada por um número inteiro. Exemplos:

$$\frac{6}{3}, \frac{50}{10}, \frac{49}{7}$$

Frações mistas

As frações mistas são constituídas por uma parte inteira e uma parte fracionária. Por exemplo, a fração $2\frac{1}{3}$ tem como parte inteira o 2 e como parte fracionária o $\frac{1}{3}$.

Uma fração mista pode ser escrita como uma fração imprópria. Para isso, primeiro multiplicamos a parte pelo denominador da parte fracionária e depois somamos o resultado com o numerador da parte fracionária, esse valor corresponde ao numerador da fração imprópria. Em relação ao denominador, será o mesmo da parte fracionária. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 01. Transforme em uma fração imprópria a seguinte fração mista: $5\frac{2}{3}$.

Solução:

Primeiro vamos encontrar o numerador da fração imprópria: temos que multiplicar pelo denominador e depois somar ao numerador da parte fracionária. Veja:

$$\text{Numerador} = 5 \cdot 3 + 2 = 15 + 2 = 17.$$

Como o denominador mantém o mesmo da parte fracionária, a fração imprópria resultante é:

$$\frac{17}{3}$$

Também podemos realizar o processo inverso, ou seja, transformar uma fração imprópria em uma fração mista. Para isso, temos que fazer a divisão do numerador pelo denominador. O quociente da divisão será a parte inteira, o resto será o numerador da parte fracionária e o divisor será o denominador da parte fracionária. Veja o exemplo:

Exemplo 02. Vamos transformar a fração imprópria $\frac{22}{4}$ em fração mista.

Solução:

Primeiro temos que realizar a divisão de 22 (numerador) por 4 (denominador):

$$\begin{array}{r} 22 \overline{)4} \\ -20 \\ \hline 2 \end{array}$$

O quociente é 5, então, a parte inteira será 5. O resto é 2, que corresponde ao numerador da parte fracionária. Por fim, o denominador é igual a 4 (divisor).

Portanto, fração mista resultante é:

$$5\frac{2}{4}.$$

Frações equivalentes

As frações equivalentes são utilizadas para representar a mesma quantidade.

Você se lembra do exemplo do chocolate, no início do capítulo? Agora, vamos supor que ao invés de 3 pedaços, você retire 6 pedaços da barra de chocolate; o que equivale a metade da barra ($\frac{1}{2}$). As frações $\frac{6}{12}$ e $\frac{1}{2}$ são frações equivalentes.

Note que as frações equivalentes podem ser obtidas multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número, desde que não seja zero.

Veja:

$$\frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2}$$

Frações Irredutíveis

Quando uma fração apresenta valores altos no numerador e no denominador, a fração pode ser representada por uma fração equivalente, com valores menores e

irredutíveis, ou seja, uma fração pode ser simplificada.

A simplificação nada mais é que a redução da fração original, a qual pode ser feita dividindo o numerador e o denominador da fração pelo MDC dos números em questão. Por exemplo, a fração $\frac{20}{100}$ pode ser simplificada dividindo o numerador e o denominador pelo MDC dos dois números. No caso $\text{MDC}(100, 20) = 20$. Então, a fração equivalente e simplificada é igual a $\frac{1}{5}$. Essa fração também é chamada de fração irredutível, ou seja, uma fração que não pode mais ser reduzida.

Frações Compostas ou Complexas

Nas frações compostas, o numerador e o denominador também são frações. Exemplo:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}}$$

Frações unitárias

Nas frações unitárias, o numerador é o número 1 e o denominador pode ser qualquer valor inteiro maior de zero. Exemplo:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{100}$$

Frações decimais

Nas frações decimais, o denominador é uma potência positiva de 10. Esse tipo de fração também pode ser representada na forma decimal. Exemplo:

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

Vamos praticar? Para fixação do conteúdo acerca dos tipos de frações, resolva os exercícios a seguir.

Exercícios propostos

01. Passe para a forma mista as seguintes frações impróprias:

a) $\frac{26}{5}$

b) $\frac{59}{2}$

c) $\frac{147}{13}$

d) $\frac{125}{8}$

e) $\frac{1313}{25}$

02. Transforme as frações mistas em frações impróprias.

a) $2\frac{1}{3}$

b) $1\frac{1}{3}$

c) $3\frac{5}{11}$

03. Escreva a representação decimal das seguintes frações:

a) $\frac{13}{99}$

b) $\frac{7}{20}$

c) $\frac{56}{9}$

d) $\frac{64}{15}$

Representações de uma fração

Nós vimos no início do capítulo que a fração é a representação de uma divisão, ou seja, a fração representa a relação entre uma parte e o todo. Entretanto, podemos escrever as frações de mais duas formas

diferentes: forma decimal e forma percentual.

Agora veremos com mais detalhes a representação de uma fração na forma decimal.

Observação: A representação na forma percentual será estudada no Capítulo Razões, Grandezas Proporcionais e Porcentagem.

Dízima Periódica

Nós já vimos que as frações decimais podem ser representadas por números decimais.

Existe um tipo particular de números decimais que é a dízima periódica.

A dízima periódica é um número decimal que tem uma quantidade infinita de algarismos e que se repetem periodicamente, ou seja, é um número com “infinitas casas depois da vírgula”, na qual os algarismos após a vírgula apresentam uma repetição. A parte do número que se repete é chamada de período. Por exemplo:

a) 0,33333333... O período é igual a 33.

b) 1,42424242... O período é igual a 42.

c) 234,193193193... O período é igual a 193.

As dízimas periódicas mostradas nos exemplos acima são chamadas de dízima periódica simples, pois existe apenas o período na parte decimal (o período se inicie logo após a vírgula). Além da dízima periódica simples, nós temos as dízimas periódicas compostas. Neste caso, a dízima possui alguns algarismos antes do período, que são chamados de antiperíodo (há um ou mais

algarismos entre a vírgula e o período). Veja os exemplos:

a) 3,125555... A parte não periódica ou antiperíodo é igual a 12 e o período é igual a 5.

b) 1,7862222... A parte não periódica ou antiperíodo é igual a 786 e o período é igual a 2.

c) 0,0525252... A parte não periódica ou antiperíodo é igual a 0 e o período é igual a 52.

Para evitar usar as reticências e deixar claro qual é o período, podemos escrever a dízima com o período aparecendo apenas uma vez, mas com uma barra acima dele, que indica a sua repetição. Por exemplo:

a) $0,\overline{3}$

b) $1,\overline{42}$

c) $0,\overline{052}$

Observação: Quando um número for decimal infinito, mas não apresentar algarismos que se repetem, ou seja, não possui um período, ele não será uma dízima periódica e sim um número irracional.

Toda dízima periódica é um número racional, portanto, ela pode ser escrita na forma de uma fração. Por exemplo:

a) $\frac{1}{3} = 0,333...$

b) $\frac{47}{33} = 1,424242...$

c) $\frac{52}{990} = 0,0525252...$

A fração que representa uma dízima periódica é chamada de fração geratriz, e existem alguns métodos para determiná-la, como veremos a seguir.

Fração geratriz

Para determinar a fração de uma dízima periódica simples, ou seja, que não possui o antiperíodo, podemos seguir alguns passos:

Passo 1: Temos que escrever a dízima como uma soma de sua parte inteira com sua parte decimal.

Passo 2: Determinar o número de algarismos do período, em relação à parte decimal.

Passo 3: Escrever a fração na qual o numerador é o período e o denominador possui todos os algarismos iguais a 9. A quantidade de algarismos 9 é exatamente a quantidade de elementos do período.

Passo 4: Por fim, somamos à fração obtida no passo 3 com a parte inteira da dízima inicial (o número antes da vírgula), deixando a solução na forma de fração.

Para ficar mais claro, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 03. Obter a fração geratriz da dízima 25,33333...

Solução:

Primeiramente, vamos identificar as partes da dízima: o período é igual a 3, a parte inteira é igual a 25; então a parte decimal é igual a 0,333...

Aplicando-se os passos:

Passo 1: $25 + 0,33333...$

Passo 2: Número de algarismo do período: 1.

Passo 3: O numerador da fração é 3 e o denominador é 9 (pois o período só possui um algarismo), então a fração será $\frac{3}{9}$.

Passo 4: Por fim,

$$25 + 0,333.. = 25 + \frac{3}{9}$$

$$\frac{225}{9} + \frac{3}{9} = \frac{228}{9}$$

Logo a fração geratriz da dízima é:

$$\frac{228}{9}.$$

Para as dízimas periódicas compostas, ou seja, as que possuem um antiperíodo, temos que seguir os seguintes passos para obter a fração geratriz:

Passo 1: Primeiro, vamos escrever a dízima como a soma da parte inteira com a parte decimal.

Passo 2: Determinar a quantidade de algarismos do período e do antiperíodo, em relação à parte decimal.

Passo 3: Determinar o numerador, que é composto pela diferença entre o número formado pelos algarismos do antiperíodo seguido dos algarismos do período e o número formado pelos algarismos do antiperíodo.

Passo 4: Determinar o denominador, que é formado pelos algarismos 9 e 0. A quantidade de 9 é igual à quantidade de elementos do período; e quantidade de 0 é igual a quantidade de algarismos do antiperíodo.

Passo 5: Por fim, soma-se a fração obtida nos passos 3 e 4 com a parte inteira da dízima inicial.

Para entender melhor, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 04. Determine a fração geratriz da dízima 2,12321321321...

Solução:

Primeiramente, vamos identificar as partes que compõem a dízima: o período é igual a 321, o antiperíodo é igual a 12 e a parte inteira é igual a 2; então a parte decimal é igual a 0,12321321321...

Aplicando-se os passos:

Passo 1: $2 + 0,12321321321...$

Passo 2: O período possui 3 algarismos (321) e o antiperíodo 2 algarismos (12).

Passo 3: Vamos determinar o numerador da fração:

$$12321 - 12 = 12309$$

Passo 4: E agora o denominador: 99000.

A fração obtida nos passos 3 e 4 é:

$$\frac{12309}{99000}$$

Passo 5: Portanto, a fração geratriz será:

$$2 + \frac{12309}{99000}$$

$$\frac{199800}{99000} + \frac{12309}{99000} = \frac{212109}{99000}$$

Logo a fração geratriz da dízima é:

$$\frac{212109}{99000}$$

Tem-se ainda um terceiro método que pode ser utilizado para determinar a fração geratriz, tanto para dízima simples quanto composta.

Esse método consiste em multiplicar a dízima por potências de 10, de forma que seja possível eliminar a repetição do período com uma subtração.

Para isso, primeiro temos que identificar a parte inteira e parte periódica da dízima. Em seguida, igualamos a parte periódica à uma incógnita. Depois, temos que multiplicar a dízima por 10, para que o período apareça na parte inteira.

Note que se houver dois números no período, multiplicamos por 100; se houver três números, multiplicamos por 1000 e assim por diante.

Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 05. Determinar a fração geratriz da dízima 0,3333...

Solução:

Separando a parte inteira da periódica, e igualando essa última à uma incógnita (x), temos:

$$x = 0,33333...$$

Vamos multiplicar por 10:

$$10 \cdot x = 3,33333...$$

Agora temos que subtrair o período na expressão acima:

$$10x - x = 3,333... - 0,333...$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{3}{9}$$

Logo, a fração geratriz é igual a $\frac{3}{9}$.

Exemplo 06. Determinar a fração geratriz da dízima 0,424242...

Solução:

Separando a parte inteira da periódica, e igualando essa última à uma incógnita (x), temos:

$$x = 0,424242...$$

Vamos, agora, multiplicar por 100, pois o período possui dois algarismos:

$$100 \cdot x = 42,4242...$$

Agora temos que subtrair o período na expressão acima:

$$100x - x = 42$$

$$99x = 42$$

$$x = \frac{42}{99}$$

Logo, a fração geratriz é igual a $\frac{42}{99}$

Exemplo 07. Determinar a fração geratriz da dízima 1,3525252...

Solução:

Separando a parte inteira da periódica, e igualando essa última à uma incógnita (x), temos:

$$x = 1,3525252$$

Vamos multiplicar por 10 (antiperíodo) e por 1000 (período):

$$10 \cdot x = 13,525252...$$

$$1000 \cdot x = 1352,525252$$

Agora temos que subtrair o período e o antiperíodo:

$$1000x - 10x = 1339$$

$$990x = 1339$$

$$x = \frac{1339}{990}$$

Logo, a fração geratriz é igual a $\frac{1339}{990}$.

Para verificar o seu entendimento, resolva os exercícios a seguir:

Exercícios propostos

01. Escreva se a representação decimal é finita, infinita e periódica ou infinita e não-periódica:

- a) $17/5$
- b) $3,44$
- c) $3,123124125126\dots$
- d) $4/6$
- e) π

02. Encontre a fração geratriz das dízimas periódicas:

- a) $0,7777\dots$
- b) $4,2424242\dots$
- c) $1,015151515\dots$
- d) $0,002002002\dots$

Exercícios

01. (EPCAR - 2018) Considere os números X e Y , expressos por:

$$X = \frac{(0,12) \cdot (4,125)}{(7,36) \cdot \left(\frac{11}{324}\right)} \text{ e } Y = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 4$$

Marque a alternativa verdadeira.

- a) X é um número racional não inteiro positivo.
- b) $X \cdot Y$ é um número inteiro e negativo.
- c) $X + Y$ é um número irracional.
- d) $\frac{Y}{X}$ é um número racional não inteiro e positivo.

02. (EPCAR - 2010) Certo dia, Isabela e Ana Beatriz saíram para vender pastéis na praia. Elas tinham juntas 460 pastéis. No final do dia, verificou-se que Isabela conseguiu vender $\frac{3}{5}$ dos pastéis que levava e Ana Beatriz $\frac{5}{8}$ dos pastéis que levará,

Ao final do dia, o número de pastéis que restou para Ana Beatriz era a metade do número de pastéis que restou para Isabela.

Se Ana Beatriz, levou x pastéis para vender, então, a soma dos algarismos de X é:

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9

03. (EPCAR - 2009) Um estudante, preparando-se para o Exame de Admissão ao CPCAR, resolveu todas as N questões de uma prova. Ele acertou 8 das 18 primeiras e acertou $\frac{5}{6}$ das restantes.

Sabe-se que o estudante acertou 75% do total de questões da prova.

A quantidade de questões que ele errou nessa prova é um número compreendido entre:

- a) 5 e 10
- b) 10 e 15
- c) 15 e 20
- d) 20 e 25

04. (EPCAR - 2009) João pagou a metade dos $\frac{3}{5}$ que devia. Ao procurar o credor para quitar o restante de sua dívida, foram-lhe apresentadas duas propostas:

1ª) Pagar tudo à vista com 10% de desconto,

2ª) Assumir um acréscimo de 30% para um possível pagamento parcelado.

João optou pelo pagamento à vista e gastou exatamente 945 reais para quitar o restante da dívida. Caso optasse pela 2ª proposta, João teria gasto a mais um valor em reais compreendido entre:

- a) 390 e 410
- b) 410 e 430
- c) 430 e 450
- d) 450 e 470

05. (EPCAR - 2012) Analise as proposições abaixo.

I) Uma jarra cheia de leite pesa 235 dag; com $\frac{3}{4}$ de leite a jarra pesa 19,5 hg. O peso da jarra com $\frac{5}{8}$ de leite é y gramas. A soma dos algarismos de y é igual a 13.

II) Com $\frac{3}{5}$ de 6,0 da metade de 1 lata que comporta 20l de tinta, um pintor consegue pintar uma área de 16 m^2 . Para pintar uma área 25% menor, são necessários, $0,003 \text{ m}^3$ de tinta.

III) Um pedreiro prepara uma mistura de 1 kg de cimento e 600 ml de água. Em seguida, ele aumenta 50% a quantidade de cimento e mexe até ficar homogênea a mistura, obtendo 1800 ml dessa mistura. Se a densidade da água é g/ml, então a densidade do cimento é igual a 1,25 kg/l.

Tem-se que:

- a) Apenas I é verdadeira.
- b) Apenas II é falsa;
- c) Apenas I e II são falsas.
- d) I, II e III são verdadeiras.

06. (EPCAR - 2013) Um ônibus percorre, na estrada, 9 km com 1 litro de combustível. O motorista desse ônibus realizou uma viagem de 551 km. Ao sair do local de origem da viagem, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicava $\frac{6}{8}$ do tanque. Após o motorista percorrer 225 km, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicou $\frac{1}{2}$ tanque. Com base nessa situação, é correto afirmar que, ao chegar no destino proposto, a quantidade de

combustível restante no tanque do ônibus estava entre:

- a) 11 e 12 litros
- b) 12 e 13 litros
- c) 13 e 14 litros
- d) 14 e 15 litros

07. (EPCAR - 2013) Há dois anos Letícia tinha $\frac{1}{6}$ da idade que seu pai tem hoje. Daqui a um ano Letícia terá $\frac{1}{4}$ da idade atual de sua mãe. Hoje a soma das idades dos três é igual ao menor número natural de três algarismos distintos divisível por 3. Os irmãos gêmeos de Letícia têm hoje a metade da idade que Letícia terá daqui a oito anos. Atualmente, a soma das idades dos três irmãos é:

- a) 24
- b) 26
- c) 28
- d) 30

08. (EPCAR - 2013) Uma confecção de roupas foi contratada para confeccionar os agasalhos de todos os alunos do 1º ano CPCAR para o ano de 2014. O prazo que a confecção teve para a execução do trabalho foi de 4 dias. Para isso, o gerente da confecção utilizou 6 máquinas tipo α , cada uma trabalhando 6 horas por dia e todas com a mesma produtividade. Ao final do terceiro dia, o gerente da fábrica verificou que somente $0,3$ de $\frac{9}{4}$ dos agasalhos estavam prontos. Sendo assim, substituiu, no início do quarto dia, as máquinas do tipo α por 3 outras do tipo β , cada uma trabalhando 8 horas por dia, e cada uma delas com o triplo da produtividade de uma máquina tipo α . Se as 3 máquinas

tipo β tivessem sido utilizadas desde o início, o serviço teria sido realizado em:

- a) 20 horas
- b) 16 horas
- c) 12 horas
- d) 10 horas

09. (UNICAMP - 2018) A representação decimal de certo número inteiro positivo tem dois algarismos. Se o triplo da soma desses algarismos é igual ao próprio número, então o produto dos algarismos é igual a:

- a) 10
- b) 12
- c) 14
- d) 16

10. (UNICAMP - 2013) A razão entre a idade de Pedro e de seu pai é igual a $\frac{2}{9}$. Se a soma das duas idades é igual a 55 anos, então Pedro tem:

- a) 12 anos
- b) 13 anos
- c) 10 anos
- d) 15 anos

GABARITO

- 1) B
- 2) B
- 3) D
- 4) B
- 5) D
- 6) C
- 7) C
- 8) B
- 9) C
- 10) C

Razões, Grandezas Proporcionais e Porcentagem

Os conceitos de razão e proporção são utilizados em vários aspectos do nosso dia a dia, por exemplo, para preparar uma receita utilizamos certas medidas proporcionais entre os ingredientes; assim como os conceitos de porcentagem, que está presente nos descontos concedidos em compras, juros nas prestações etc. Além disso, são assuntos muito utilizados em outras disciplinas, como na Física. Neste capítulo vamos entender o que cada uma significa e como elas se relacionam.

Razão

A razão é definida como a comparação entre dois números ou duas grandezas e está diretamente relacionada com a operação de divisão.

A razão entre dois números **a** e **b**, com **b** ≠ 0 pode ser escrita de duas formas:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a : b.$$

Os números **a** e **b** são os termos da razão e são denominados de antecedente e consequente, respectivamente.

Observação: $a : b$ nós lemos como “a está para b” ou “a para b”.

Exemplo 01. A razão entre os números 4 e 9 pode ser escrita como $\frac{4}{9}$ ou $4 : 9$; em que o antecedente é o 4 e o consequente é o 9.

Exemplo 02. Em uma prova com 50 questões, Lucas acertou 40. Qual a razão entre o número de erros e o número de acertos?

Solução:

Primeiro, vamos descobrir a quantidade de erros:

$$50 - 40 = 10 \text{ erros.}$$

Então a razão é:

$$\frac{10}{40} = \frac{1}{4} \text{ ou } 1 : 4.$$

Podemos interpretar o resultado como a cada 4 acertos, ele cometeu 1 erro.

Razão entre grandezas

Primeiro, vamos definir o que são grandezas. Uma grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado. Por exemplo: massa, comprimento, velocidade, tempo, temperatura, custo etc.

Então, a razão entre duas grandezas, dada em certa ordem, é a razão entre a medida da primeira grandeza e a medida da segunda grandeza.

Se as duas grandezas forem de uma mesma espécie, elas devem ser apresentadas na mesma unidade. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 03. A razão entre 12 m e 15 m é dada por $\frac{12\text{ m}}{15\text{ m}} = \frac{4}{5}$ ou 4 : 5.

Note que as duas grandezas são da mesma espécie (comprimento) e apresentam a mesma medida (metro) e a razão entre elas é um número que não apresenta unidade de medida.

Exemplo 04. Um terreno tem 70 m de largura e é representado em um desenho por 30 cm. Qual a escala do desenho?

Solução:

A escala é a razão entre a medida do desenho e a medida real, ou seja, é a razão entre grandezas de mesma espécie.

As duas grandezas do exemplo não apresentam a mesma unidade (uma está em metro e a outra em centímetro); então precisamos fazer a conversão de uma delas:

$$70\text{ m} = 7000\text{ cm}$$

Logo, a escala é:

$$\frac{30\text{ cm}}{7000\text{ cm}} = \frac{3}{700}$$

Isso significa que cada 3 cm na representação (desenho) equivale a 700 cm no terreno.

Quando as duas grandezas que formam a razão não são da mesma espécie, a razão apresenta uma unidade e vai depender das unidades das grandezas do antecedente e do conseqüente. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 05. Um motociclista faz o percurso de 450 km em 5 horas. Qual a velocidade média dessa moto?

Solução:

A velocidade média nada mais é do que a razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto. Sendo assim:

$$v = \frac{450\text{ km}}{5\text{ h}} = 90\text{ km/h}$$

Isso significa que a cada 1 hora de viagem o motociclista percorre 90 km.

Proporção

O quadro Abaporu de Tarsila do Amaral é uma obra conhecida por todos, que retrata uma figura humana sentada em uma posição pensativa, em uma paisagem árida e ensolarada.



Fonte: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-47808327>

Quando analisamos a pintura, percebemos que algumas partes são muito pequenas em relação às outras. Em outras palavras, podemos dizer que as suas medidas não são proporcionais. A seguir, vamos definir o que é proporção e as suas propriedades.

Proporção

A proporção é definida como a igualdade entre duas ou mais razões.

Vamos considerar os números **a**, **b**, **c** e **d**, com **b** ≠ 0 e **d** ≠ 0, eles estarão em proporção se a razão entre **a** e **b** for igual a razão entre **c** e **d**; a qual podemos representar como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a : b = c : d$$

Os termos **a** e **d** são chamados de extremos e os termos **b** e **c** são chamados de meios.

Observação: nós lemos como “a está para b assim como c está para d”.

Propriedade fundamental das proporções

A propriedade fundamental das proporções nos diz que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Considere a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, de acordo com a propriedade fundamental das proporções:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Na prática, isso significa que temos uma multiplicação na forma de cruz.

A propriedade fundamental pode ser utilizada para verificar se duas razões são proporcionais ou não. Além disso, também é utilizada para determinar o valor de uma incógnita na proporção. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 06. Qual o valor de **x** na equação:

$$\frac{3x-1}{x+4} = \frac{2}{3}$$

Solução:

Pela propriedade fundamental da proporção:

$$(3x - 1) \cdot 3 = (x + 4) \cdot 2$$

$$9x - 3 = 2x + 8$$

$$9x - 2x = 8 + 3$$

$$7x = 11$$

$$x = \frac{11}{7}$$

Propriedades da Proporção

Além da propriedade fundamental, as proporções apresentam mais algumas propriedades, que são enunciadas a seguir.

Propriedade 1: A soma dos antecedentes está para a soma dos seus consequentes, assim como cada antecedente está para o seu respectivo consequente. Veja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

Propriedade 1

Propriedade 2: A diferença entre os antecedentes está para a diferença de seus consequentes, assim como cada antecedente está para o seu respectivo consequente. Veja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$

Propriedade 2

Propriedade 3: A soma dos termos da primeira razão está para seu antecedente, assim como a soma dos termos da segunda razão está para seu respectivo antecedente. Veja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

Propriedade 3

Propriedade 4: A soma ou diferença dos termos da primeira razão está para seu conseqüente, assim como a soma dos termos da segunda razão está para seu respectivo conseqüente. Veja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

Propriedade 4

Propriedade 5: O produto dos antecedentes está para o produto dos conseqüentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para o quadrado do seu conseqüente. Veja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} \text{ ou } \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c^2}{d^2}$$

Propriedade 5

Agora vejamos alguns exemplos para entender a utilização dessas propriedades.

Exemplo 07. Determine dois números (**x** e **y**), sabendo que a sua soma é 54 e que a razão entre eles é 1 : 2.

Solução:

O enunciado nos diz que:

$$x + y = 54 \text{ e } \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

Aplicando a propriedade 3 na proporção $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, temos que:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{1+2}{1}$$

Como $x + y = 54$:

$$\frac{54}{x} = \frac{3}{1}$$

Agora, vamos utilizar a propriedade fundamental:

$$3x = 54$$

$$x = \frac{54}{3} = 18$$

Encontramos o valor de **x**, agora vamos descobrir o valor de **y**:

$$x + y = 54$$

$$y = 54 - 18 = 36$$

Então, os valores de **x** e **y** são, respectivamente, 18 e 36.

Exemplo 08. Determine dois números sabendo que a diferença entre eles é igual a 12 e que o maior deles (**a**) está para o menor (**b**) assim como 6 está para 5.

Solução:

Pelo enunciado temos que:

$$a - b = 12 \text{ e } \frac{a}{b} = \frac{6}{5}$$

Vamos aplicar a propriedade 4 na proporção $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{6-5}{6}$$

$$\frac{12}{a} = \frac{1}{6}$$

Agora, vamos utilizar a propriedade fundamental:

$$a \cdot 1 = 12 \cdot 6$$

$$a = 72$$

Encontramos o valor de a , agora vamos descobrir o valor de b :

$$a - b = 12$$

$$b = a - 12 = 72 - 12 = 60$$

Então, os valores de a e b são 72 e 60, respectivamente.

Agora é a sua vez, resolva os exercícios a seguir.

Exercícios propostos

01. Qual o valor de x na proporção:

$$\frac{x}{5} = \frac{(x-3)}{2}$$

02. Determine dois números (x e y), sabendo que a diferença entre eles é igual a 18 e que $\frac{x}{y} = \frac{25}{19}$.

03. Determine dois números (a e b), sabendo que a soma entre eles é igual a 300 e que a está para b assim como 9 está para 11.

Grandezas Proporcionais

Às vezes, quando ocorre a variação de uma grandeza, a outra grandeza também sofre variação, ou seja, as duas grandezas se relacionam.

A relação entre duas grandezas pode ser de dois tipos: diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.

Grandezas diretamente proporcionais

As grandezas são diretamente proporcionais quando a variação de uma provoca a variação da outra, ou seja, se uma grandeza duplica a outra também irá se duplicar ou se ela é dividida a outra também irá se dividir.

Considere duas grandezas A e B , sendo $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, elas serão diretamente proporcionais se:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = k$$

O k é chamado de constante de proporcionalidade.

Exemplo 09. Suponha que um ônibus percorre 90 km em 1 hora, 180 km em 2 horas e 270 km em 3 horas.

Note que quando aumenta a distância percorrida, o tempo gasto também aumenta. Então, neste caso, a distância percorrida e o tempo gasto são grandezas proporcionais, ou seja:

$$\frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{90}{1} = \frac{180}{2} = \frac{270}{3} = 90$$

Em que a constante de proporcionalidade é igual 90.

Grandezas inversamente proporcionais

Nas grandezas inversamente proporcionais ocorre o oposto do que acontecia nas grandezas diretamente proporcionais. Neste caso, a variação de uma grandeza provoca a variação da outra de forma inversa, ou seja, se uma aumenta a outra reduz ou vice-versa.

Considere duas grandezas A e B , sendo $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, elas serão inversamente proporcionais se:

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots = k$$

O k é chamado de constante de proporcionalidade.

Exemplo 10. Suponha que um carro percorra a mesma distância. Se ele andar a 120 km/h gastará 1 hora, se andar a 60 km/h gastará 2 horas e se andar a 40 km/h gastará 3 horas.

Note que quando o carro aumenta a sua velocidade, o tempo gasto por ele diminui. Portanto, neste caso a velocidade e o tempo são grandezas inversamente proporcionais, ou seja:

$$v \cdot t = 120 \cdot 1 = 60 \cdot 2 = 40 \cdot 3 = 120$$

Em que a constante de proporcionalidade é igual a 120.

Observação: Podemos analisar as relações de proporcionalidade entre duas grandezas de uma outra forma, mais simplificada.

Suponha que as grandezas **A**, **B**, **C** e **D** se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Vamos isolar a grandeza A:

$$A = \frac{B \cdot C}{D}$$

As grandezas do outro lado da equação (**B**, **C** e **D**) são diretamente proporcionais à grandeza isolada (**A**) se estiverem no numerador e inversamente proporcionais se estiverem no denominador. Além disso, se duas grandezas estiverem do mesmo lado da equação, elas serão diretamente proporcionais se estiverem divididas e inversamente proporcionais se estiverem multiplicando.

No caso da relação acima:

- B e C são diretamente proporcionais à A.
- D é inversamente proporcional à A.

- C e B são inversamente proporcionais.
- C e B são diretamente proporcionais à D.

Exemplo 11. A força centrípeta é a força resultante que puxa o corpo para o centro da trajetória em um movimento curvilíneo ou circular. O valor numérico dessa força é dado pela expressão:

$$F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

Em que **F_{cp}** é a força centrípeta, **m** é a massa, **v** é a velocidade e **R** é o raio da curva.

I - A força centrípeta é diretamente proporcional à massa e à velocidade e inversamente proporcional ao raio da curva.

II - A massa e a velocidade são diretamente proporcionais ao raio da curva.

III - A massa e a velocidade são grandezas inversamente proporcionais.

Uma ferramenta muito utilizada na resolução dos problemas envolvendo duas ou mais grandezas proporcionais, para encontrar um valor desconhecido, é a regra de três. A base para a sua utilização é a propriedade fundamental das proporções, que nós vimos no início do capítulo. Entretanto, a regra de três será estudada com mais detalhes em um outro capítulo (Regra de três simples e composta).

Porcentagem

A porcentagem representa uma razão cujo denominador é igual a 100 e, assim como toda razão, indica a comparação de uma parte com o

todo. Por exemplo, para sermos aprovados no vestibular devemos acertar no mínimo 60% das questões, isso significa que a cada 100 questões devemos acertar no mínimo 60.

A porcentagem pode ser expressa de três formas:

- Porcentagem: $X\%$, lê-se por cento. A expressão por cento significa por cada cem.
- Fração: $\frac{X}{100}$ e
- Decimal: $0, X$.

Note que:

$$X\% = \frac{X}{100} = 0, X$$

Exemplo 12. Passe 75% para a forma de fração e para a forma decimal.

$$75\% = \frac{75}{100} = 0, 75$$

Então, a forma de fração é $\frac{75}{100}$ e a forma decimal é 0,75.

Exemplo 13. Escreva 0,06 na forma de porcentagem.

$$0, 06 = \frac{6}{100} = 6\%$$

Então, 0,06 na forma de porcentagem fica igual a 6%.

Note que para passar da forma decimal para porcentagem, basta multiplicar o número por 100.

Exercícios propostos

04. Escreva as porcentagens na forma decimal:

- a) 4%
- b) 0,25
- c) 157 %

05. Escreva os decimais na forma percentual:

- a) 0,36
- b) 1
- c) 0,005

Regras práticas

Vamos ver agora algumas regras que facilitam na hora de resolver os exercícios envolvendo porcentagem.

Regra 1: Um dos métodos utilizados para calcular a porcentagem ($X\%$) de uma quantidade determinada (A) consiste em transformar a porcentagem na forma de fração ou de número decimal e, em seguida, multiplicarmos esse número pela quantidade. Assim:

$$A' = \frac{X}{100} \cdot A \text{ ou } A' = 0, X \cdot A$$

Observação: Para calcular a porcentagem de um determinada quantidade também podemos utilizar a regra de três.

Regra 2: Quando queremos aumentar a quantidade A em $X\%$, devemos utilizar o seguinte método:

$$A' = \left(1 + \frac{X}{100}\right) \cdot A$$

Regra 3: E para diminuir a quantidade A em $X\%$, o método é similar ao utilizado na Regra 2, mas ao invés de somar, nós subtraímos. Vejamos:

$$A' = \left(1 - \frac{X}{100}\right) \cdot A$$

Exemplo 14. Quanto é 15% de 387?

Solução:

Vamos resolver utilizando a Regra 1:

Primeiro, temos que passar os 15% para a forma de fração ou decimal:

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15$$

Então:

$$\frac{15}{100} \cdot 387 = \frac{15 \cdot 387}{100} = \frac{5805}{100} = 58,05$$

$$\text{ou } 0,15 \cdot 387 = 58,05$$

Agora, vamos resolver esse mesmo exemplo utilizando a regra de três:

$$\begin{array}{rcl} 387 & - & 100\% \\ x & - & 15\% \end{array}$$

Multiplicando em cruz, temos que: $x = 58,05$.

Exemplo 15. Uma mercadoria que custava R\$2400 sofreu um aumento passando a custar R\$2700. A taxa de aumento foi de quantos por cento?

Solução:

Pelo enunciado temos que:

$A = 2000$ (preço inicial)

$A' = 2700$ (preço final, após o aumento)

Utilizando a Regra 2:

$$2700 = (1 + \frac{x}{100}) \cdot 2400$$

$$\frac{2700}{2400} = (1 + \frac{x}{100})$$

$$1,125 = 1 + \frac{x}{100}$$

$$\frac{x}{100} = 1,125 - 1 = 0,125$$

Passando 0,125 para a forma de porcentagem, temos que o aumento foi de 12,5%.

Exemplo 16. Um produto no valor de R\$2000 teve um desconto de 35%. Qual o valor após o desconto?

Solução:

Pelo enunciado temos que:

$A = 2000$ (preço inicial)

$$X = 35\% = \frac{35}{100} = 0,35$$

Utilizando a Regra 3:

$$A' = (1 - \frac{35}{100}) \cdot 2000$$

$$A' = (\frac{100}{100} - \frac{35}{100}) \cdot 2000$$

$$A' = \frac{65}{100} \cdot 2000$$

$$A' = 1300$$

O valor após o desconto foi de R\$1300,00.

Exemplo 17. Descontos sucessivos

Ao comprar um produto, o vendedor lhe oferece um desconto de 40% ou dois descontos sucessivos de 20% e 20%. Qual é o mais vantajoso para você?

Solução:

Primeiro, vamos calcular quanto seria o preço após o desconto de 40%; para isso, vamos utilizar a Regra 3:

$$A' = (1 - 0,40) \cdot P = 0,6 \cdot P$$

Então, com o desconto de 40% o preço do produto seria 0,6 vezes o preço inicial.

Agora, vamos ver quanto custaria o produto após os dois descontos sucessivos de 20%.

Neste caso, temos que calcular o desconto em cima do preço inicial e depois calcular o segundo desconto com base no resultado obtido, ou seja:

- Primeiro desconto de 20%:

$$A' = (1 - 0,20) \cdot P = 0,8 \cdot P$$

valor do produto após o aumento e após o desconto?

- Segundo desconto de 20%:

$$A' = (1 - 0,20) \cdot 0,8 \cdot P = 0,64 \cdot P$$

Então, com os dois descontos sucessivos de 20% o preço do produto seria 0,64 vezes o preço inicial.

Vamos supor que o preço inicial do produto seja igual a 100 ($P = 100$).

Então, para o desconto de 40%, o preço final será: $0,6 \cdot 100 = 60$; e para os dois descontos sucessivos de 20% será de: $0,64 \cdot 100 = 64$.

Portanto, o mais vantajoso, para quem está comprando, seria o desconto de 40%.

Note que em descontos sucessivos, devemos calcular o primeiro desconto sobre o valor inicial e sobre o resultado determinar o segundo desconto, e assim sucessivamente.

Exercícios propostos

06. Uma obra de arte foi revendida por R\$10.000, com prejuízo de 20% sobre o preço de compra. O objeto foi comprado por qual valor?

07. Os vendedores de uma loja recebem mensalmente um salário fixo no valor de R\$1200,00 e uma comissão de 6% referente ao valor total do que venderam no mês. Sendo assim, qual será o valor recebido por um vendedor que vendeu no mês R\$14000,00?

08. Em uma loja, um fogão custava R\$1500,00 e seu preço sofreu um aumento de 5%. Logo após o aumento a loja resolveu fazer uma promoção oferecendo um desconto de 3% no mesmo produto. Qual o

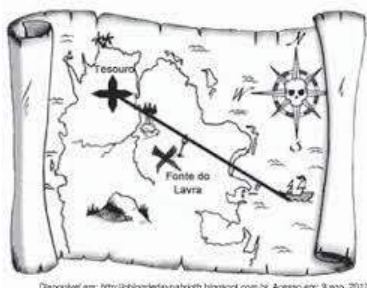
Exercícios

01. (EPCAR - 2017) Até a primeira quinzena do mês de março de 2017, o combustível comercializado nos postos de nosso país era uma mistura de 1 parte de etanol para 3 partes de gasolina. Considere esse combustível e um outro que apresenta a mistura de 4 partes de etanol para 9 partes de gasolina. Juntando-se os volumes iguais dos dois combustíveis, a nova relação de etanol para gasolina, nesta ordem, será:

- a)** $5/9$
b) $5/12$
c) $29/75$
d) $31/75$

02. (Enem - 2018) Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real. Certo mapa tem escala: 1 : 58.000.000.

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm. A medida real, em quilômetros, desse segmento de reta é:



- a)** 4408
- b)** 7632

- c)** 44080
- d)** 76316
- e)** 440800

03. (EPCAR - 2010) Numa turma de um cursinho, 40 % dos alunos são menores de idade. Com o objetivo de que somente metade dessa turma fosse composta por alunos maiores de idade, $x\%$ dos alunos maiores de idade foram remanejados para outra turma.

Sabendo-se que não houve mais mudança nessa turma, é correto afirmar que x é igual a:

- a) 20
b) 30
c) $33, \overline{1}$
d) $33, \overline{3}$

04. (EPCAR - 2010) Um comerciante vendeu 50% dos $\frac{3}{5}$ do seu estoque de pares de meia, com lucro de 30% sobre o custo. Como pretendia renovar o estoque, reduziu o preço de venda e acabou tendo um prejuízo de 10% sobre o custo com a venda dos pares que restavam em sua loja. É correto afirmar que, ao final do estoque, esse comerciante teve, sobre o custo, um:

- a) lucro de 2%
- b) lucro de 20%
- c) prejuízo de 2%
- d) prejuízo de 20%

05. (Colégio Embraer - 2019) Após completar o álbum da Copa América, Alex distribuiu todas as figurinhas repetidas que ainda tinha. Deu a quarta parte do total para Beto e a terça parte das figurinhas restantes para Caio. Em seguida, terminou a distribuição entregando as últimas, 14 figurinhas, para Denis. Na distribuição feita por Alex, Caio recebeu:

- a) 6 figurinhas
- b) 7 figurinhas
- c) 9 figurinhas
- d) 11 figurinhas.

06. (EPCAR - 2010) Em um certo período, o valor total da cesta básica de alimentos subiu 82% e o salário mínimo, nesse mesmo período, aumentou 30%.

Para que recupere o poder de compra da cesta básica de alimentos, o salário mínimo deverá ser aumentado em y%.

O valor de y, então, é tal que 20 está para y assim como 8 está para:

- a) 12
- b) 16
- c) 24
- d) 32

07. (Colégio Embraer - 2015) Em uma gráfica, quatro máquinas iguais, funcionando simultaneamente, gastam 1h 45 min para imprimir certo número de páginas de um livro. O número de máquinas iguais às primeiras necessárias para imprimir o mesmo número de páginas desse livro em uma hora será igual a:

- a) 5

- b) 6

- c) 7

- d) 8

08. (EPCAR - 2009) Um estudante preparando-se para o Exame de Admissão ao CPCAR, resolveu todas as N questões de uma prova. Ele acertou 8 das 18 primeiras e acertou $\frac{5}{6}$ das restantes. Sabe-se que o estudante acertou 75% do total de questões da prova. A quantidade de questões que ele errou nessa prova é um número compreendido entre:

- a) 5 e 10
- b) 10 e 15
- c) 15 e 20
- d) 20 e 25

09. (EPCAR - 2018) Elisa pretende comprar um computador que custa x reais. Ela possui 70% do valor total do computador e ainda vai ganhar de seus avós uma herança, que será totalmente repartida entre ela e suas irmãs Daniela e Lavínia. Nessa partilha, Elisa recebeu 0,2777... da herança, Daniela 1200 reais e Lavínia $\frac{7}{18}$ da herança. Ao fazer as contas do quanto possuía para comprar o computador, percebeu que ainda lhe faltava 200 reais para realizar a compra.

O valor de x do computador é, em reais, tal que o número de divisores naturais de x é:

- a) 18
- b) 20
- c) 22
- d) 24

10. (EsPCEEx - 2020) No ano de 2010, uma cidade tinha 100.000 habitantes. Nessa cidade, a população cresce a uma taxa de 20% ao ano. De posse dessa informação, a população dessa cidade em 2014 será de:

- a) 207.360 habitantes
- b) 100.160 habitantes
- c) 180.000 habitantes
- d) 172.800 habitantes
- e) 156,630 habitantes

GABARITO

- 1) C
- 2) A
- 3) D
- 4) A
- 5) B
- 6) B
- 7) C
- 8) D
- 9) D
- 10) A

Expressões Numéricas e Algébricas 1

Neste capítulo, utilizaremos as propriedades estudadas nos capítulos de Fatoração, Potenciação e Radiciação para resolver as expressões numéricas. Além disso, iremos aprender uma nova técnica para simplificar frações com raízes no denominador, chamada racionalização.

Expressões numéricas

As expressões numéricas são definidas como uma sequência de operações, envolvendo números reais, que devem ser efetuadas em uma ordem determinada, obtendo um número real como resultado.

Para garantir que o resultado de uma expressão numérica seja consistente, as operações devem ser realizadas obedecendo uma ordem:

- 1) Potenciação e radiciação.
- 2) Multiplicação e divisão.
- 3) Soma e subtração.

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 01. Resolva a expressão numérica a seguir:

$$\frac{6^2}{2} + 3,2$$

Para resolver a expressão, primeiro devemos realizar a operação de potenciação:

$$\frac{36}{2} + 3,2$$

Em seguida, a divisão:

$$18 + 3,2$$

Por fim, efetuamos a adição e obtemos o resultado:

$$18 + 3,2 = 21,2$$

Os parênteses () são utilizados para alterar a ordem em que as operações são realizadas. As operações entre parênteses tem prioridade, ou seja, devem ser resolvidas primeiro. Veja:

$$3 \cdot 4,1 - 7 = 12,3 - 7 = 5,3$$

$$3 \cdot (4,1 - 7) = 3 \cdot (-2,9) = -8,7$$

Em frações ou raízes com muitos termos, podemos considerar que o numerador, o denominador e o radicando estão entre parênteses. Isso significa que devemos primeiro resolver o numerador, o denominador e o radicando para calcular a expressão em uma fração ou raiz.

Exemplo 02. Resolva a seguinte expressão numérica:

$$\frac{\sqrt{12,4 + 3,6 + 1}}{5 - 3 \cdot 2} + 7$$

A expressão pode ser reescrita como:

$$\frac{(\sqrt{(12,4 + 3,6) + 1})}{(5 - 3 \cdot 2)} + 7$$

Resolvendo, seguindo a ordem de prioridades, temos:

$$\frac{(\sqrt{16 + 1})}{(5 - 6)} + 7$$

$$= \frac{(4 + 1)}{-1} + 7$$

$$= \frac{5}{-1} + 7$$

$$= -5 + 7 = 2$$

Embora menos utilizados, podem aparecer também os colchetes [] e as chaves { }. Neste caso, a ordem de preferência de resolução é:

- 1) Parênteses.
- 2) Colchetes.
- 3) Chaves.

Exemplo 03. Encontre o valor da seguinte expressão numérica:

$$\left[\frac{3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} + 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) - 4}{6 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} + 2} \right]^{-1} + 3$$

Primeiramente, iremos resolver as expressões internas entre parênteses:

$$\left[\frac{3 \cdot \frac{16}{9} + 8 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 4}\right) - 4}{6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 2} \right]^{-1} + 3$$

Agora, vamos realizar as operações seguindo as ordens de prioridade até chegar no resultado final:

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\frac{3 \cdot 16}{9} + \frac{8}{3 \cdot 4} - 4}{-\frac{6 \cdot 4}{3} + 2} \right]^{-1} + 3 \\ &= \left[\frac{\frac{16}{3} + \frac{2}{3} - 4}{-2 \cdot 4 + 2} \right]^{-1} + 3 \\ &= \left[\frac{\frac{16+2}{3} - 4}{-8 + 2} \right]^{-1} + 3 \\ &= \left[\frac{\frac{18}{3} - 4}{-6} \right]^{-1} + 3 \\ &= \left[\frac{6-4}{-6} \right]^{-1} + 3 \\ &= \left[\frac{2}{-6} \right]^{-1} + 3 \\ &= \frac{6}{-2} + 3 = -3 + 3 = 0 \end{aligned}$$

Expressões algébricas

As expressões algébricas são semelhantes às expressões numéricas, mas ao invés de apenas números, temos também variáveis envolvidas. Veja alguns exemplos de expressões algébricas.

Exemplo 04. $\frac{a + \sqrt{b}}{b + 2c}$

Exemplo 05. $\sqrt{(x + 2y)^2 - 8xy}$

Exemplo 06. $\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{q}}\right)^{-2} (pq)^{1/2}$

Para simplificar as expressões algébricas, devemos recorrer às técnicas de fatoração e produtos notáveis, estudadas em capítulos anteriores.

Vamos revisar alguns dos principais produtos notáveis que iremos utilizar neste capítulo.

a) Quadrado da soma ou diferença:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

b) Diferença de quadrados:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

c) Cubo da soma ou diferença:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

d) Diferença de cubos:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

e) Soma de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Exemplo 07. Simplifique a expressão algébrica a seguir, para $a \neq b$ e $a \neq -b$:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right)(2a^4 - 2b^4)}$$

Solução:

Primeiramente, iremos somar as frações entre parênteses, temos:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} &= \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

Pela diferença de quadrados:

$$2a^4 - 2b^4 = 2(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

Substituindo na expressão original, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 - b^2} \cdot 2(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)} \\ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2) \cdot 2(a^2 + b^2)} \\ = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} \end{aligned}$$

Como $a^2 + b^2 \geq 0$ para quaisquer a e b reais, não é necessário indicar o módulo ao simplificar a raiz quadrada:

$$\sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2$$

Valor numérico

O valor numérico de expressões algébricas é obtido quando substituímos as variáveis pelos seus valores numéricos e resolvemos a expressão numérica correspondente.

Quando uma questão pedir o valor numérico de uma expressão algébrica, é importante simplificá-la antes de substituir os valores numéricos; assim, evitamos cálculos desnecessários.

Exemplo 08. Obtenha o valor da expressão algébrica, para $x = 0,7$:

$$\frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} + \frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x^2 - 6x + 9}$$

Solução:

Substituir diretamente o valor de x na expressão acima pode ser bastante trabalhoso. Além disso, juntar as frações a um denominador comum não parece ajudar nesse exemplo também.

Então, vamos tentar simplificar cada fração individualmente:

Na primeira fração, para o numerador, vamos utilizar a soma de cubos:

$$\begin{aligned} x^3 + 8 &= x^3 + 2^3 \\ &= (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2) \\ &= (x + 2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

Substituindo o resultado na fração:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} &= \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4} \\ &= x + 2 \end{aligned}$$

Na segunda fração, temos um cubo perfeito (numerador) dividindo um quadrado perfeito (denominador):

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \\ = x^3 - 3 \cdot 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 3^2 \cdot x - 3^3 \\ = (x - 3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2 - 6x + 9 \\ &= x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 \\ &= (x - 3)^2 \end{aligned}$$

Assim:

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x-3)^3}{(x-3)^2}$$

$$= x - 3$$

Logo, a expressão algébrica original pode ser simplificada para:

$$x + 2 + x - 3 = 2x - 1$$

Para $x = 0,7$, o valor numérico é:

$$2 \cdot 0,7 - 1 = 0,4$$

Condição de existência

Em determinadas condições, temos que ter atenção na hora de obter os valores numéricos das expressões algébricas, em relação às suas variáveis.

Por exemplo, lembre-se de que não é possível dividir por zero ou extrair raízes de índice par de números negativos, entre os números reais.

Exemplo 09. Considere a seguinte expressão algébrica:

$$\frac{1}{x-2}$$

O denominador $x - 2$ deve ser diferente de zero. Logo, a expressão é definida para:

$$x \neq 2.$$

Exemplo 10. Na expressão:

$$\sqrt{x + 2y}$$

o radicando $x + 2y$ deve ser não-negativo, ou seja, maior ou igual

a zero. Logo, a expressão é definida para:

$$x + 2y \geq 0.$$

Para expressões assim é necessária uma condição de existência, ou seja, temos que estabelecer um conjunto de valores para os quais tal expressão é definida.

Exemplo 11. Determine a condição de existência da seguinte expressão algébrica:

$$\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{y-3}}{x^2 - 4y^2}$$

Solução:

Neste exemplo, temos que nos atentar em relação à raiz quadrada, presente no numerador, e ao denominador, ou seja, teremos duas condições de existência. Assim:

No primeiro caso, temos $x + 2$ dentro de raiz quadrada, então:

$$x + 2 \geq 0, \text{ ou seja, } x \geq -2.$$

Já no segundo caso, como temos $x^2 - 4y^2$ no denominador, a condição de existência é:

$$x^2 - 4y^2 \neq 0.$$

Sabendo que,

$$x^2 - 4y^2 = (x + 2y)(x - 2y),$$

Então:

$$x \neq 2y \text{ e } x \neq -2y.$$

Logo, a condição de existência da expressão algébrica é: $x \geq -2$, $x \neq 2y$ e $x \neq -2y$.

Exercícios resolvidos

01. (CN - 2016) Calcule o valor de

$$X = \left(\frac{\sqrt{1^{1256}} + 8943^0 + \frac{3125}{5^5} + \sqrt[7]{1}}{1,5 - 2^{-1} + (-1)^{2058}} \right)^{\sqrt[7]{\frac{3^{21} + 3^{23}}{10}}}$$

e assinale a opção correta:

a) 2^{16}

b) 2^{20}

c) 2^{24}

d) 2^{26}

e) 2^{27}

Resolução:

Primeiro, iremos calcular o expoente da expressão:

$$\begin{aligned} \sqrt[7]{\frac{3^{21} + 3^{23}}{10}} &= \sqrt[7]{\frac{3^{21}(1 + 3^2)}{10}} \\ &= \sqrt[7]{\frac{3^{21} \cdot 10}{10}} = \sqrt[7]{3^{21}} = 3^{\frac{21}{7}} = 3^3 = 27 \end{aligned}$$

Aplicando as propriedades da potenciação e radiciação, calculamos a base:

$$\begin{aligned} &\frac{1^{1256} + 8943^0 + \frac{3125}{5^5} + \sqrt[7]{1}}{1,5 - 2^{-1} + (-1)^{2058}} \\ &= \frac{1 + 1 + 1 + 1}{1,5 - 0,5 + 1} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Logo,

$$X = 2^{27}.$$

Portanto, a resposta correta é a **alternativa E**.

02. (EPCAR - 2011) Considere os números reais **a**, **b** e **x** tais que

$$a + b = x$$

$$a - b = x^{-1}$$

$$a \neq b \neq 0$$

O valor da expressão

$$Y = \frac{\frac{(a^2 + 2ab + b^2)(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)}}{\frac{a^2 - ab}{2a}}$$

é:

a) 2

b) $2x^2$

c) x^2

d) $x^2/2$

Resolução:

Iniciaremos calculando o valor do numerador de Y:

$$\begin{aligned} &\frac{(a^2 + 2ab + b^2)(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)} \\ &= \frac{(a+b)^2(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)(a-b)(a^2 + ab + b^2)} \\ &= a + b \end{aligned}$$

Substituindo na expressão original e simplificando-a, temos:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{a+b}{\frac{a^2 - ab}{2a}} = \frac{2a(a+b)}{a^2 - ab} = \frac{2a(a+b)}{a(a-b)} \\ &= \frac{2(a+b)}{a-b} = \frac{2x}{x^{-1}} = 2x^2 \end{aligned}$$

Portanto, a resposta correta é a **alternativa B**.

Exercícios propostos

01. Simplifique a expressão $\frac{x+y^{-1}}{x-y^{-1}}$ e dê o valor numérico dessa expressão quando $x = y = 3$.

02. (CN - 2006/Adaptada)

Considerando que $x^2 + y^2 - xy \neq 0$, simplifique a fração:

$$\frac{x(x^2+x-y)+y^2(y+1)}{x^2+y^2-xy}$$

03. (EPCAR - 2018/Adaptada)

Considerando a devida existência, fator e efetue as simplificações na fração:

$$\frac{-ab^2+b^2c+bc^2+ac^2-a^2c-a^2b}{a^2c+2abc+b^2c-a^3-2a^2b-ab^2}$$

Racionalização

Antes de surgir os computadores e calculadoras, muitas áreas do conhecimento, como a astronomia, dependiam de trabalhosos cálculos manuais.

Em particular, calcular manualmente o valor aproximado de frações com números irracionais no denominador, como $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, pode ser bastante complicado. Isso ocorre porque os números irracionais não possuem representação decimal finita. E, mesmo usando valores decimais aproximados, a divisão por números decimais é uma operação trabalhosa. Além disso, o uso de aproximações pode levar à propagação de erros nos cálculos, o que se torna um problema em aplicações práticas.

Felizmente, existe um artifício matemático que é utilizado para facilitar a resolução de equações que envolvam a divisão por números irracionais, que é a racionalização.

O processo de racionalização permite achar uma fração equivalente, que não tenha o problema da raiz no denominador da fração, ou seja, ela funciona transformando um denominador irracional em um racional.

Embora hoje tenhamos computadores e calculadoras para efetuar divisões por números irracionais com maior precisão, a racionalização segue sendo uma ferramenta importante para simplificar as expressões numéricas.

Agora iremos aprender os principais casos de racionalização, por meio de exemplos. Todos os casos são resolvidos usando o mesmo princípio: multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número, garantindo que as frações sejam equivalentes, ou seja, o valor da fração não se altera. O número escolhido para isso é chamado de conjugado ou fator racionalizante.

Exemplo 12. Racionalize o denominador da fração: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nesse caso, sabendo que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ é um número racional, podemos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$. Em outras palavras, vamos multiplicar a fração por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, o que mantém seu valor inalterado:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, racionalizando o denominador de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, obtemos $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Para fins de verificação prática, podemos conferir que o valor é o mesmo com o uso da calculadora, veja as figuras abaixo. No entanto, o

valor apresentado não deixa de ser uma aproximação, já que números irracionais não possuem representação decimal finita.

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{2})} = 0,7071067811865475$$

$$\sqrt[3]{2} \div 2 = 0,7071067811865475$$

O exemplo apresenta o caso mais simples, em que temos apenas uma raiz quadrada no denominador. Generalizando, temos que para racionalizar um denominador desse tipo ($\sqrt{a}$), multiplicamos o numerador e o denominador também por $\sqrt{a}$:

$$\frac{N}{\sqrt{a}} = \frac{N}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{N\sqrt{a}}{a}$$

Agora veremos alguns exemplos de como fazer racionalização em alguns casos especiais que envolvem índices não quadráticos ou com operações entre raízes.

Exemplo 13. Racionalize o denominador da fração $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$.

A princípio, poderíamos seguir a mesma estratégia do exemplo anterior e multiplicar, tanto o numerador, quanto o denominador por $\sqrt[3]{5}$. Entretanto, isso não vai funcionar, pois $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^2}$, que continua sendo um número irracional.

Nesse caso, para obter um número racional, precisamos que o expoente do radicando seja 3, para cancelar com o índice 3 da raiz. Ou seja, precisamos de um número x tal que:

$$\sqrt[3]{5} \cdot x = \sqrt[3]{5^3}$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{5^3}{5}} = \sqrt[3]{5^2}$$

Então, devemos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt[3]{5^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt[3]{5}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{25}}{5} \end{aligned}$$

Assim, quando a raiz apresentar um índice diferente de 2, o conjugado deve ter o mesmo índice da raiz. Entretanto, temos que encontrar o expoente do número interno que, quando, somado ao expoente do número inicial resulte em um valor igual ao índice da raiz.

De uma forma geral, para racionalizar um denominador da forma $\sqrt[n]{a^m}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$:

$$\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{N}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{N\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

Essa mesma ideia se aplica caso haja expoentes diferentes dentro da raiz, no denominador. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 14. Racionalize o denominador da fração $\frac{1}{\sqrt[4]{288}}$.

Primeiro, vamos decompor 288 em fatores primos:

$$288 = 2^5 \cdot 3^2$$

Assim, podemos extrair o fator 2 da raiz:

$$\sqrt[4]{288} = \sqrt[4]{2^5 \cdot 3^2} = 2\sqrt[4]{2 \cdot 3^2}$$

Agora, temos $2 \cdot 3^2$ dentro da raiz de índice 4. Para resolver, devemos multiplicar o numerador e o denominador pela raiz quarta de:

$$2^{4-1} \cdot 3^{4-2} = 2^3 \cdot 3^2.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{288}} &= \frac{1}{2\sqrt[4]{2 \cdot 3^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}}{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}}{2\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{8 \cdot 9}}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\sqrt[4]{72}}{12} \end{aligned}$$

Veremos agora um exemplo um pouco diferente dos vistos anteriormente.

Exemplo 15. Racionalize o denominador da fração: $\frac{1}{3 + \sqrt{2}}$.

Neste exemplo, ao invés de uma raiz somente, temos uma soma com uma raiz quadrada no denominador. Se multiplicarmos por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, não resolve o problema, pois ainda aparecerá um termo com $3\sqrt{2}$ no denominador.

Poderíamos pensar em usar o próprio denominador $(3 + \sqrt{2})$ como o fator racionalizante, mas também não resolveria, pois:

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2}) \\ = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2 = 11 + 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Note que, neste caso o problema foi o termo $2ab$ em $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, em que $a = 3$ e $b = \sqrt{2}$.

No entanto, lembre-se do seguinte produto notável, que resulta somente nos termos elevados ao quadrado:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Assim, se multiplicarmos a fração do exemplo por $3 - \sqrt{2}$, o novo denominador será:

$$(3)^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

Que é um número racional, conforme desejamos.

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 + \sqrt{2}} &= \frac{1}{3 + \sqrt{2}} \cdot \frac{3 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{3 - \sqrt{2}}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{3 - \sqrt{2}}{(3)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

Em geral, para racionalizar um denominador da forma $a + \sqrt{b}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $a - \sqrt{b}$, e vice-versa:

$$\begin{aligned} \frac{N}{a + \sqrt{b}} &= \frac{N}{a + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} \\ &= \frac{N(a - \sqrt{b})}{a^2 - b} \end{aligned}$$

É comum se referir à expressão $a - \sqrt{b}$ como o conjugado de $a + \sqrt{b}$, e vice-versa.

Exemplo 16. Racionalize o denominador da fração: $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

Para resolver esse exemplo, vamos utilizar o mesmo procedimento do Exemplo 15. Vamos multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$. Veja:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{5 + 2\sqrt{15} + 3}{5 - 3} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2} \\
 &= 4 + \sqrt{15}
 \end{aligned}$$

Os exemplos que vimos até agora são os principais casos de racionalização que aparecem nas provas. A seguir, veremos outros exemplos com formato diferente dos anteriores, mas que podem ser resolvidos de maneira análoga com o uso adequado de produtos notáveis.

Exemplo 17. Racionalize o denominador da fração $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

Esse caso é semelhante ao Exemplo 15, em que temos uma soma com raiz no denominador. Como temos uma raiz cúbica, podemos pensar em um produto notável em que apareçam cubos perfeitos. Sabemos que:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Assim, tomando $a = \sqrt[3]{2}$ e $b = 1$, podemos utilizar como fator racionalizante $a^2 - ab + b^2$, ou seja:

$$\begin{aligned}
 &(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} \cdot 1 + 1^2 \\
 &= \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1
 \end{aligned}$$

Por fim, racionalizando o denominador, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3+1} = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{2+1} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}
 \end{aligned}$$

Exemplo 18. Racionalize o denominador da fração $\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$.

Embora pareça complicado, note que o denominador é da forma $a^2 + ab + b^2$, com $a = \sqrt[3]{3}$ e $b = 1$. Sabendo que:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Podemos utilizar $a - b = \sqrt[3]{3} - 1$ como fator racionalizante:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}} &= \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{3}-1}{(\sqrt[3]{3})^3-1} = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}
 \end{aligned}$$

Exemplo 19. Racionalize o denominador da fração $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$.

Nesse caso, não temos de imediato um produto notável com fator $a - b + c$ e a^2 , b^2 e c^2 no resultado. Assim, vamos racionalizar o denominador “por partes”: ou seja, vamos eliminar uma das raízes de cada vez.

Considerando $a = \sqrt{3}$ e $b = \sqrt{2} - 1$, temos um denominador da forma $a - b$. Logo, vamos multiplicar o numerador e o denominador por $a + b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$ para obter $a^2 - b^2$ no denominador:

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1} &= \frac{3}{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)} \\
 &= \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2} \\
 &= \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2} \\
 &= \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3})^2-((\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}+1)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{3-(3-2\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}$$

Como temos $\sqrt{2}$ no denominador, para finalizar basta multiplicarmos numerador e denominador por $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} & \frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}+6}{4} \end{aligned}$$

Os exemplos mostrados anteriormente cobrem a maioria dos casos abordados em questões. Caso algum formato não seja familiar, tente pensar em alguma fatoração diferente ou racionalize “por partes” como no exemplo anterior.

Por fim, note que também podemos racionalizar os denominadores de expressões algébricas. Veja alguns exemplos:

1)

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{a} + \frac{\sqrt{b}}{b} = \frac{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}{ab}$$

2)

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2y}} = \frac{x\sqrt[3]{xy^2}}{xy} = \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{y}$$

3) Para $a > 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}} \\ &= \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a+1})^2-(\sqrt{a-1})^2} \\ &= \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{a+1-(a-1)} \\ &= \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{2} \end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

03. (PUC Campinas - 2017) Usando a tecnologia de uma calculadora pode-se calcular a divisão de 2 por $\sqrt[3]{4}$ e obter um resultado igual a:

a) $\sqrt{4}$

b) $\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt{4^2}$

Resolução:

Desejamos obter o valor de

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

Para racionalizar o denominador $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$, devemos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt[3]{2^{3-2}} = \sqrt[3]{2}$:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$$

Portanto, a resposta correta é a **alternativa D**.

04. (UFRGS) Sendo $n > 1$, a expressão:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

é equivalente a:

a) $\frac{n-\sqrt{n}}{n(n-1)}$

b) $\frac{\sqrt{n}-1}{n(n-1)}$

c) $\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

d) $\frac{\sqrt{n}}{n}$

e) $\frac{\sqrt{n}-n}{n+1}$

Resolução:

Observe que a alternativa C não tem o denominador racionalizado. A princípio, é uma resposta plausível, pois o seu denominador é igual ao produto dos denominadores da expressão do enunciado.

Vamos então inicialmente colocar as frações em um denominador comum:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1})} = \frac{1}{n+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

Descartamos então a alternativa C como resposta. Agora vamos racionalizar o denominador da expressão, multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado $n - \sqrt{n}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+\sqrt{n}} &= \frac{1}{n+\sqrt{n}} \cdot \frac{n-\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} = \frac{n-\sqrt{n}}{n^2-(\sqrt{n})^2} \\ &= \frac{n-\sqrt{n}}{n^2-n} = \frac{n-\sqrt{n}}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Portanto, a resposta correta é **alternativa A**.

05. (EPCAR - 2015) Analise as afirmativas seguintes e classifique cada uma delas em (V) verdadeira ou (F) falsa.

I. Se $A = \frac{5-5\sqrt{\frac{1}{2}}}{5-5^{\frac{1}{2}}}$, então $A \in \{(R - Q) \cap (R - Z)\}$.

II. O valor da expressão $\left[\frac{(0,001)^4 \cdot 100^7}{10^5} \right] \cdot (0,1)^{-4}$ é $100^{\frac{1}{2}}$.

III. Sendo $a \in R_+^*$, uma forma simplificada para a expressão $\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$ é a^{-4} .

A sequência correta é:

a) V - V - V

b) V - V - F

c) V - F - V

d) F - V - F

Resolução:

I. Temos que:

$$A = \frac{5-5\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$$

Racionalizando o denominador:

$$\begin{aligned}A &= \frac{5-5\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \\ &= \frac{5(1-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} \\ &= \frac{5(5+\sqrt{5}-\sqrt{5}(5+\sqrt{5}))}{5^2-(\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{5(5+\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5)}{5^2-(\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{5(-4\sqrt{5})}{20} = \frac{-4\sqrt{5}}{4} = -\sqrt{5}\end{aligned}$$

Logo, A é um número irracional, em outras palavras, $A \in (R - Q)$.

Como todo número inteiro é racional, temos que $Z \subset Q$. Além disso, todo número racional é também real: $Q \subset R$. Podemos afirmar que $(R - Q) \subset (R - Z)$, já que todo número que não é racional também não é inteiro. Podemos então afirmar que $(R - Q) \cap (R - Z) = (R - Q)$.

Em outras palavras, o conjunto $(R - Q) \cap (R - Z)$ dado pela questão

é equivalente ao conjunto dos números irracionais: $(R - Q)$.

Então podemos afirmar que $A \in \{(R - Q) \cap (R - Z)\}$ é verdadeira.

$$\text{II. } 100^{\frac{1}{2}} = (10)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 10$$

Convertendo decimais para potências de 10 e aplicando propriedades da potenciação, temos:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(0,001)^4 \cdot 100^7}{10^5} \right] \cdot (0,1)^{-4} \\ &= \left[\frac{(10^{-3})^4 \cdot (10^2)^7}{10^5} \right] \cdot (10^{-1})^{-4} \\ &= \left[\frac{10^{-12} \cdot 10^{14}}{10^5} \right] \cdot 10^4 \\ &= \frac{10^2 \cdot 10^4}{10^5} = 10 \end{aligned}$$

Logo, o valor da expressão é $100^{\frac{1}{2}}$, portanto é verdadeira.

III. Racionalizando, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}} &= \sqrt{\frac{a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}} = \sqrt{\frac{a \sqrt{a}}{a}} = \sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} \\ &= a^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Logo, a forma simplificada da expressão **não** é a^{-4} , ou seja, é falsa.

Logo, a sequência correta é V-V-F, que corresponde à alternativa **B**.

Exercícios propostos

04. (EMBRAER - 2017/Adaptada)

Quando $x = 3 + \sqrt{2}$, determine o valor numérico da expressão:

$$\frac{x+9+\sqrt{2}}{x-3}$$

05. (UNITAU/SP - 2014) Sendo a e b números reais, tais que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $b \neq \pm 1$, a expressão $\frac{a}{\sqrt[5]{b^3}}$ é igual a:

a) $\frac{a\sqrt[5]{b}}{b}$

b) $\frac{a\sqrt[5]{b^3}}{b}$

c) $\frac{a\sqrt[5]{b^4}}{b}$

d) $\frac{a\sqrt[5]{b^6}}{b}$

e) $\frac{a\sqrt[5]{b^2}}{b}$

Exercícios

01. (CN - 2016) Sejam as operações $\cdot$ e $\#$ definidas no conjunto dos inteiros positivos, tais que:

$$x \cdot y = 2^x + y \text{ e } x \# y = x^2 + xy - 1$$

Determine o sucessor do número resultante da expressão:

$$[(1\#3)^{1\#2}] \cdot [(1\#2)\#(2\#1)]$$

- a) 523
- b) 524
- c) 525
- d) 526
- e) 527

02. (EPCAR - 2016) O valor da expressão

$$\left(\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}} \right) \cdot \left(\frac{x^2 y + xy^2}{x^2 - y^2} \right)$$

em que, x e $y \in \mathbb{R}^*$ e $x \neq y$ e $x \neq -y$, é:

- a) -1
- b) -2
- c) 1
- d) 2

03. (EPCAR - 2019) Considere o conjunto de todos os valores de m

e n para os quais a expressão algébrica A , abaixo, está definida:

$$A = \frac{\frac{m^2}{n^2} - \frac{n^2}{m^2}}{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{m \cdot n} + \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{(m-n)^{-2}}{(m^2 - n^2)^{-1}}$$

Nesse conjunto, uma expressão algébrica equivalente a A é:

a) $m^2 + n^2$

b) $m^2 - n^2$

c) $\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$

d) $\frac{m^2 + n^2}{m - n}$

04. (EPCAR - 2007) Se $a \neq 0$, então:

$$\left(\frac{a}{a+y} + \frac{y}{a-y} \right) : \left(\frac{y}{a+y} - \frac{a}{a-y} \right) = -1$$

- a) para todos, exceto dois valores de y .
- b) só para dois valores de y .
- c) para todos os valores de y .
- d) para nenhum valor de y .

05. (EPCAR - 2017) Analise as proposições abaixo e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA):

I. Se $m = \frac{0,0001 \cdot (0,01)^2 \cdot 1000}{0,001}$, então $m = \frac{1}{100}$.

II. O número $(0,899^2 - 0,101^2)$ é menor do que $\frac{7}{10}$.

III. $\sqrt{(2^{\sqrt{2}+1})^{\sqrt{2}-1}} \cdot \sqrt[4]{4 \cdot \sqrt{(2^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}}}$ é irracional.

A sequência correta é:

- a) V-F-F
- b) V-F-V
- c) F-F-F
- d) F-V-V

06. (EPCAR - 2017) Simplificando as expressões:

$$A = \frac{\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \cdot x^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy}}$$

e

$$B = \frac{x^2 - xy}{2x}$$

nas quais $y > x > 0$, é correto afirmar que:

a) $\frac{A}{B} = 2^{-1}$

b) $\frac{B}{A} \in \mathbb{N}$

c) $A \cdot B > 0$

d) $A + B > 0$

07. (EPCAR - 2009) Considere os valores reais de a e b , $a \neq b$, na expressão:

$$p = \frac{(a+b)(2a)^{-1} + a(b-a)^{-1}}{(a^2+b^2)(ab^2-ba^2)^{-1}}$$

Após simplificar a expressão p e torná-la irredutível, pode-se dizer que $\sqrt[p]{p^{-1}}$ está definida para todo:

a) $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$

b) $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$

c) $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*$

d) $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$

08. (EPCAR - 2014) Considere as expressões abaixo em que $a \neq b$:

$$P = \frac{a^3 - b^3}{a^2\sqrt{a} - \sqrt{b}a^2 + ba\sqrt{a} - b\sqrt{b}a + b^2\sqrt{a} - b^2\sqrt{b}}$$

$$Q = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$$

Assim, tem-se $\frac{Q}{P}$ igual a:

a) $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

d) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

09. (EPCAR - 2019) Considere os números reais x, y e z , tais que:

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \quad \text{e} \\ z = \sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) \cdot (2 - \sqrt{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})})})}$$

Simplificando a expressão:

$$(x \cdot y \cdot z)^{-1} \cdot \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

obtem-se:

a) $2 - \sqrt{3}$

b) 1

c) $2 + \sqrt{3}$

d) $2\sqrt{3}$

10. (EPCAR - 2011) Se

$$x = 1,062 + \frac{[(-2)^{(2\sqrt{2}+1)}]^{(2\sqrt{2}-1)}}{64}$$

então x está compreendido entre:

a) -1 e -0,9

b) -0,9 e -0,8

c) -0,8 e -0,7

d) -0,7 e 0,6

GABARITO

- 1)D 2)A 3)A 4)A 5)A
6)C 7)D 8)D 9)C 10)A

Regra de Três Simples e Composta

Vimos nos capítulos anteriores que grandeza é tudo aquilo que pode ser medido, contado ou comparado. Além disso, existem duas relações importantes entre grandezas: elas podem ser diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Neste capítulo, estudaremos um método prático para determinar um valor desconhecido de uma grandeza, chamado de regra de três.

Regra de três simples

A regra de três é definida como um conjunto de procedimentos que são utilizados para a montagem correta da proporção e encontrar o valor desconhecido de uma grandeza. A regra de três pode ser de dois tipos: simples e composta.

A regra de três simples é utilizada quando temos duas grandezas, diretamente ou inversamente proporcionais, em que três valores são conhecidos e queremos encontrar o valor desconhecido. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 01. Ana foi à feira e comprou 2,5 kg de laranjas por 30 reais. Quanto ela pagaria ao comprar 1,5 kg do mesmo tipo de laranja?



Neste problema temos duas grandezas envolvidas: a quantidade de laranjas (em kg) e o preço total (em R\$). Dizemos que o preço é a grandeza-problema, pois é o valor desconhecido no problema. Vamos analisar a relação entre a quantidade de laranjas e o preço:

- Quanto maior a quantidade de laranjas, maior é o preço total pago.

- Em particular, se duplicar a quantidade de laranjas, o preço total também duplica. Se triplicar a quantidade, o preço também triplica, e assim por diante.

- Em outras palavras, a razão entre o preço total e a quantidade em kg de laranjas é constante. Nesse caso, essa razão é o preço do kg da laranja.

Portanto, a quantidade de laranjas e o preço total são grandezas diretamente proporcionais.

Chamando o preço de 1,5 kg de laranjas de **x**, podemos escrever as grandezas em uma tabela:

Laranjas (kg)	Preço total (R\$)
2,5	30
1,5	x

Como relacionar as grandezas do problema para encontrar o valor de **x**?

Para auxiliar na montagem da proporção, podemos escrever setas no mesmo sentido (para baixo) em

cada coluna, uma vez que são grandezas diretamente proporcionais:

Laranjas (kg)	Preço total (R\$)
↓ 2,5	↓ 30
1,5	x

Seguindo o sentido das setas, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{2,5}{1,5} = \frac{30}{x}$$

Agora, queremos encontrar o valor da grandeza desconhecida. Para isso, multiplicamos a proporção em cruz (ou em x), assim:

$$\begin{array}{cc} 2,5 & \times & 30 \\ 1,5 & \times & x \end{array}$$

$$2,5 \cdot x = 30 \cdot 1,5$$

$$x = \frac{30 \cdot 1,5}{2,5} \Rightarrow x = 18 \text{ reais}$$

Portanto, Ana pagaria R\$ 18 por 1,5 kg de laranjas. Conforme esperado, o preço pago por menos laranjas também foi menor.

Veja agora este outro exemplo.

Exemplo 02. Um ônibus foi de São José dos Campos a São Paulo em 1h40min, a 54 km/h. No trajeto de volta, percorrendo a mesma distância, a velocidade média foi de 36 km/h devido a um engarrafamento. Quanto tempo demorou a viagem de volta?



Neste caso, as grandezas envolvidas são o tempo e a velocidade, sendo o tempo a grandeza-problema. Analisando a relação entre as grandezas como no exemplo anterior:

- Quanto maior a velocidade média, menor o tempo de viagem. Da mesma forma, quanto maior o tempo de viagem, menor a velocidade média.

- Em particular, se duplicar a velocidade, o tempo se reduz pela metade. Se triplicar a velocidade, o tempo reduz a um terço, e assim por diante.

- Em outras palavras, o produto entre a velocidade média e o tempo de viagem é constante. Nesse caso, esse produto é a distância entre as duas cidades.

Portanto, a velocidade média e o tempo de viagem são grandezas inversamente proporcionais.

Como 1h40min correspondem a 100 min, temos a seguinte relação entre as grandezas:

Velocidade (km/h)	Tempo de viagem (min)
↓ 54	↑ 100
36	x

Atenção: como as grandezas agora são inversamente proporcionais, escrevemos as setas em sentidos opostos.

Assim, temos a seguinte proporção, seguindo o sentido das setas:

$$\frac{54}{36} = \frac{x}{100}$$

Para encontrar a grandeza desconhecida, podemos fazer igual o exemplo anterior: multiplicamos em cruz a proporção obtida. No caso de grandezas inversamente proporcionais, podemos igualar diretamente o produto das diferentes grandezas:

$$100 \cdot 54 = 36 \cdot x$$

$$x = \frac{100 \cdot 54}{36} \Rightarrow x = 150 \text{ min}$$

Portanto, a viagem de volta demorou 150 min, ou 2h30min. Conforme esperado, o tempo de viagem foi maior, dado que a velocidade média foi menor.

Exemplo 03. (EMBRAER - 2017) Uma máquina trabalha no recapeamento asfáltico de certa rodovia. Ela inicia o dia de trabalho com o tanque de combustível totalmente cheio de óleo diesel. Executa o trabalho em 3,25 km da rodovia e reabastece, sendo necessários 35 litros para encher o tanque. Em seguida, executa o trabalho em mais 5,2 km da rodovia, e fica com o tanque completamente vazio. A capacidade total, em litros, do tanque dessa máquina é igual a

- a) 64.
- b) 60.
- c) 58.
- d) 56.

Resolução:

Note que, quanto maior a quantidade de combustível consumida, maior o comprimento de rodovia que é asfaltado. Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

De acordo com o enunciado, são necessários 35 litros de combustível para asfaltar 3,25 km de rodovia. Além disso, com um tanque cheio é possível asfaltar 5,2 km. Considerando x a capacidade total do tanque, temos que:

Comprimento de rodovia (km)	Volume de combustível (L)
↓ 3,25	↓ 35
5,2	x

$$\frac{3,25}{5,2} = \frac{35}{x}$$

$$3,25 \cdot x = 35 \cdot 5,2$$

$$x = \frac{35 \cdot 5,2}{3,25} = 56 \text{ L}$$

A capacidade do tanque é de 56 litros. Então, a resposta correta é a **alternativa D**.

Exercícios Propostos

- 01.** Um litro de água do mar contém 25 gramas de sal. Então, para se obterem 50 kg de sal, qual a quantidade necessária de litros de água do mar?
- 02.** Sara preparou uma festa de confraternização para 40 pessoas e verificou, com base em sua experiência, que a comida era suficiente para 6 horas de festa. No entanto, chegaram 8 pessoas a mais

do que o previsto. Determine quantas horas durará a comida, supondo que cada pessoa consuma a mesma quantidade de comida.

03. (EPCAR - 2014) Um ônibus percorre, na estrada, 9 km com 1 litro de combustível. O motorista desse ônibus realizou uma viagem de 551 km. Ao sair do local de origem da viagem, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicava $\frac{6}{8}$ do tanque. Após o motorista percorrer 225 km, o ponteiro marcador de combustível do ônibus indicou $\frac{1}{2}$ tanque.

Com base nessa situação, é correto afirmar que, ao chegar no destino proposto, a quantidade de combustível restante no tanque do ônibus estava entre:

- a) 11 e 12 litros.
- b) 12 e 13 litros.
- c) 13 e 14 litros.
- d) 14 e 15 litros.

Note que duas grandezas podem não ser nem diretamente proporcionais, nem inversamente proporcionais. Por exemplo:

- O lado de um quadrado (ℓ) e a sua área (A). Temos que $A = \ell^2$. Um quadrado de lado 1 cm possui área 1 cm², ao duplicar o lado para 2 cm, a área não duplica, ela passa a ser 4 cm².

- A idade e a altura de um ser humano. Um jovem de 15 anos e 1,60 m, quando tiver o dobro da idade (30 anos), não terá o dobro da altura (3,20 m).

Nesses casos, não podemos aplicar a regra de três. A relação entre as grandezas deverá ser dada pelo enunciado da questão de alguma outra forma, seja por uma expressão algébrica, tabela ou gráfico. Entretanto, esse assunto não será abordado nesse capítulo.

Até agora, vimos como correlacionar duas grandezas, podendo ser diretamente ou inversamente proporcionais. Entretanto, há casos em que temos três ou mais grandezas envolvidas, e para resolver essas situações utilizaremos a regra de três composta.

Regra de três composta

Veja a situação a seguir:

20 operários, trabalhando 10 dias de 8 horas de trabalho, fazem 40 cadeiras. Quantos dias serão necessários para 10 operários produzirem 30 cadeiras, trabalhando 6 horas por dia?

Nesse caso, há quatro grandezas envolvidas: número de operários, dias de trabalho, horas de trabalho por dia e número de cadeiras produzidas. Assim, não podemos aplicar diretamente a regra de três simples.

Uma forma de resolver é adaptar o problema para que tenhamos apenas duas grandezas envolvidas. Na situação inicial, os operários trabalham 8 horas por dia por 10 dias. Logo, o número de horas trabalhadas por operário é $8 \cdot 10 = 80$ horas para cada operário.

Como são 20 operários ao todo, a quantidade de “horas totais” trabalhadas é $20 \cdot 80 = 1600$. Logo, 1600 horas totais de trabalho produzem 40 cadeiras.

Da mesma maneira, para 10 operários, x dias de trabalho e 6 horas de trabalho por dia, a quantidade de “horas totais” trabalhadas é $10 \cdot x \cdot 6 = 60x$. Nessa situação, são produzidas 30 cadeiras.

Assim, quanto maior o número de “horas totais” trabalhadas, maior o número de cadeiras produzidas. Logo, são grandezas diretamente proporcionais:

Número de cadeiras	“Horas totais” trabalhadas
 40	 1600
30	$60x$

$$\frac{1600}{60x} = \frac{40}{30}$$

$$1600 \cdot 30 = 40 \cdot 60x$$

$$x = \frac{1600 \cdot 30}{40 \cdot 60} \Rightarrow x = 20 \text{ dias}$$

Um método prático de resolver situações como essa, utilizando os dados do problema de forma mais direta, é a regra de três composta. Veja a resolução desse problema, aplicando este método:

O primeiro passo é listar as grandezas envolvidas em uma tabela e, depois, identificar a grandeza-problema, que no caso é os dias de trabalho. As outras grandezas são chamadas de grandezas auxiliares, que são o número de operários, horas de trabalho por dia e número de cadeiras produzidas.

Dias	Operários	Horas/dia	Cadeiras
10	20	8	40
x	10	6	30

Após listar e identificar as grandezas, precisamos descobrir se as grandezas auxiliares são diretamente ou inversamente proporcionais à grandeza-problema. Para isso, vamos comparar as grandezas duas a duas, considerando que as demais grandezas são mantidas constantes:

- Quanto maior o número de dias de trabalho, menor o número de operários necessários. Logo, essas são grandezas inversamente proporcionais.

- Quanto maior o número de dias de trabalho, menor o número de horas de trabalho necessárias por dia. Logo, são grandezas inversamente proporcionais.

- Quanto maior o número de dias de trabalho, maior o número de cadeiras produzidas. Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

Podemos indicar as relações entre a grandeza-problema e as demais utilizando setas, como feito na regra de três simples. Em que setas no mesmo sentido são diretamente proporcionais; e setas em sentidos opostos são inversamente proporcionais.

Considerando a seta para baixo para a grandeza-problema, temos que:

Dias	Operários	Horas/dia	Cadeiras
↓ 10	↑ 20	↑ 8	↓ 40
x	10	6	30

Por fim, escrevemos a proporção com a grandeza-problema de um lado e as demais do outro, colocando os valores no mesmo sentido apontado pelas setas. Em outras palavras, grandezas diretamente proporcionais mantêm o sentido, enquanto grandezas inversamente proporcionais invertem o sentido:

$$\frac{10}{x} = \frac{10}{20} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{40}{30}$$

Simplificando:

$$\frac{10}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2 \cdot 10 \Rightarrow x = 20 \text{ dias}$$

O resultado obtido foi igual ao do método utilizado anteriormente. A regra de três composta é especialmente prática em casos envolvendo quatro ou mais grandezas, nos quais o uso de regra de três simples seria demasiadamente complexo.

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 04. Uma indústria produz 2940 blocos de concreto em 7 dias, em um período de 6 horas diárias. Assinale a alternativa que apresenta quantos blocos essa indústria produziria em 15 dias se o período de trabalho fosse de 12 horas diárias, considerando o mesmo ritmo de trabalho.

a) 18.500 blocos.

b) 9.200 blocos.

c) 17.300 blocos.

d) 10.800 blocos.

e) 12.600 blocos.

Resolução:

Primeiro vamos identificar as grandezas:

Grandeza-problema: número de blocos.

Grandezas auxiliares: horas de trabalho por dia, dias de trabalho.

Agora, temos que definir a razão de proporcionalidade entre elas:

- Quanto maior o número de horas de trabalho por dia, maior o número de blocos produzidos. Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

- Quanto maior o número de dias de trabalho, maior o número de blocos produzidos. Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

Assim, temos a seguinte relação entre as grandezas:

Blocos	Horas/ dia	Dias
↓ 2940	↓ 6	↓ 7
x	12	15

Escrevendo a proporção, temos:

$$\frac{2940}{x} = \frac{6}{12} \cdot \frac{7}{15}$$

$$\frac{2940}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15}$$

$$7x = 2 \cdot 15 \cdot 2940$$

$$x = \frac{2 \cdot 15 \cdot 2940}{7} \Rightarrow x = 12600 \text{ blocos}$$

Logo, em 15 dias, com 12 horas diárias de trabalho, seriam produzidos 12600 blocos.

Resposta correta: **alternativa E**.

Exemplo 05. (EsPCEx) 5 operários fazem 30 pares de calçados em 6 dias, de 8 horas de trabalho. Quantos dias de 12 horas levarão 9 operários para fazer 90 pares, se a dificuldade do segundo trabalho está para a do primeiro, como 4 está para 5 e a habilidade dos operários, como 2 está para 3.

Resolução:

Vamos começar identificando as grandezas:

Grandeza-problema: dias de trabalho.

Grandezas auxiliares: número de operários (ops), horas de trabalho por dia (h/dia), número de pares de calçados produzidos (pares), dificuldade do trabalho (dif) e habilidade dos operários (hab).

Agora vamos fazer a relação de proporção entre as grandezas:

- Quanto maior o número de dias de trabalho, menor o número de operários necessários. Logo, são grandezas inversamente proporcionais.

- Quanto maior o número de dias de trabalho, menor o número de horas de trabalho necessárias por dia. Logo, são grandezas inversamente proporcionais.

- Quanto maior o número de dias de trabalho, maior o número de pares de calçados produzidos. Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

Note que “dificuldade” e “habilidade” são grandezas um pouco mais “abstratas” do que as demais.

Para conseguirmos resolver o problema, interpretamos o significado dessas grandezas da seguinte forma:

- um trabalho com o dobro de dificuldade requer o dobro do tempo;

- operários com o dobro de habilidade conseguem fazer o mesmo trabalho na metade do tempo.

Assim, quanto maior a dificuldade do trabalho, maior o número de dias de trabalho necessários. Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

Da mesma forma, quanto maior a habilidade dos operários, menor o número de dias de trabalho necessários. Logo, são grandezas inversamente proporcionais.

Colocando os dados em uma tabela e indicando as relações de proporcionalidade pelas setas:

Dias	Ops	h/dia	Pares	Dif	Hab
 6	 5	 8	 30	 5	 3
x	9	12	90	4	2

Escrevendo a proporção, temos:

$$\frac{6}{x} = \frac{9}{5} \cdot \frac{12}{8} \cdot \frac{30}{90} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

Simplificando:

$$\frac{6}{x} = \frac{9}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{9}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3x = 24$$

$$x = 8 \text{ dias}$$

São necessários 8 dias de trabalho para produzir 90 pares de calçados nas novas condições de trabalho.

06. (EPCAR - 2008) Um grupo A de 6 pedreiros e 8 ajudantes executou $\frac{4}{5}$ de uma obra em 12 dias, trabalhando 6 horas por dia. Por motivo de férias, o grupo A foi substituído por um grupo B de 8 pedreiros e 2 ajudantes que trabalharam 5 horas por dia para terminar a obra. Sabendo-se que a produção de 2 ajudantes equivale, sempre, à produção de 1 pedreiro e que não houve ausência de nenhum componente dos grupos de trabalho em nenhum dos dias, é correto afirmar que o grupo B:

a) ao substituir o grupo A, acarretou um atraso de 1 dia no tempo em que a obra teria ficado pronta, caso a mesma tivesse sido concluída pelo grupo A.

b) terminou a obra no tempo $t > 5$ dias.

c) gastaria mais de 21 dias se tivesse executado a obra inteira.

d) teria executado a parte feita pelo grupo A em menos de 15 dias.

Resolução:

Vamos iniciar calculando o número de pedreiros. Como 2 ajudantes equivalem a um pedreiro, podemos considerar, para fins de cálculo, que o grupo A tem $6 + \frac{8}{2} = 10$ pedreiros e

que o grupo B tem $8 + \frac{2}{2} = 9$ pedreiros.

Analisando as alternativas, vemos que são pedidas comparações entre os tempos de trabalho dos grupos A e B em situações distintas. Como base de comparação, vamos calcular o tempo em que cada grupo completaria $\frac{1}{5}$ da obra:

Grupo A: como o grupo A completou $\frac{4}{5}$ da obra em 12 dias, então completaria $\frac{1}{5}$ da obra 4 vezes mais rápido, ou seja, em 3 dias.

Grupo B: o tempo gasto pelo grupo é a grandeza-problema, x .

Relacionando as grandezas, temos que:

- Quanto maior o número de dias de trabalho, menor o número de horas de trabalho necessárias por dia. Logo, são grandezas inversamente proporcionais.

- Quanto maior o número de dias de trabalho, menor o número de operários necessários. Logo, são grandezas inversamente proporcionais.

Colocando esses dados na tabela:

Dias	Horas/dia	Pedreiros
3	6	10
x	5	9

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$3x = 12 \Rightarrow x = 4 \text{ dias}$$

Sabendo o tempo que cada grupo demoraria para completar $\frac{1}{5}$ da obra, podemos encontrar o tempo para completar $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{5}$, basta multiplicar por 4 e por 5, respectivamente:

Fração da obra	Grupo A (dias)	Grupo B (dias)
$\frac{1}{5}$	3	4
$\frac{4}{5}$	12	16
$\frac{5}{5}$	15	20

Podemos agora analisar as alternativas:

a) O grupo A teria finalizado a obra em 15 dias.

Com a substituição, a obra durou $12 + 4 = 16$ dias, ou seja, houve 1 dia de atraso. **Verdadeira.**

b) O grupo B terminou a obra em 4 dias. **Falsa.**

c) O grupo B gastaria 20 dias se tivesse realizado a obra inteira. **Falsa.**

d) O grupo B teria executado a parte feita pelo grupo A ($\frac{4}{5}$ da obra) em 16 dias. **Falsa.**

Portanto, a resposta correta é a **alternativa A.**

Exercícios Propostos

04. (EMBRAER - 2010/Adaptada) A fim de transportar a terra retirada de um terreno para a construção de um prédio e transportá-la para um mesmo aterro, serão utilizados caminhões com a mesma capacidade de carga. A tabela elaborada pela construtora relaciona

o volume de terra transportado, o tempo gasto no transporte e o número de viagens necessárias.

Volume (m^3)	Tempo (h)	Número de viagens
15	03	01
60	12	04
120	24	08

De acordo com a tabela, qual o tempo gasto e o número de viagens necessárias para a retirada de $300 m^3$ de terra?

05. Sabendo que para asfaltar 1 km de estrada, 30 homens gastaram 12 dias trabalhando 8 horas por dia. Quantos dias levariam vinte homens para asfaltar 2 km da mesma estrada, trabalhando 12 horas por dia?

06. (EPCAR - 2007/Adaptada) Trinta operários trabalhando 8 horas por dia, constroem 36 casas em 6 meses. Qual o número de dias que deverão ser trabalhados no último mês para que $\frac{2}{3}$ dos operários, trabalhando 2 horas a mais por dia, construam 0,75 das casas? Considere um mês igual a 30 dias.

Exercícios

01. (EMBRAER - 2012) Para atender várias encomendas de brigadeiros, Dona Joana fez x unidades na quarta-feira e, em cada um dos 3 dias seguintes, fez, respectivamente, a metade, o dobro e o triplo do número de unidades feitas na quarta-feira. Se ela utiliza duas latas de leite condensado para cada $0,5x$ brigadeiros, então para o número total de brigadeiros feitos nesses 4 dias foi necessário utilizar uma quantidade de latas de leite condensado igual a:

- a) 26.
- b) 24.
- c) 20.
- d) 18.

02. (EMBRAER - 2014) Certo relógio atrasa 25 segundos a cada 90 horas. Desse modo, é correto afirmar que, em 13 dias e meio, este relógio irá atrasar:

- a) 1 min 45 s.
- b) 1 min 30 s.
- c) 1 min 20 s.
- d) 1 min 15 s.

03. (ENEM - 2020) Um pé de eucalipto em idade adequada para o corte rende, em média, 20

mil folhas de papel A4. A densidade superficial do papel A4, medida pela razão da massa de uma folha desse papel por sua área, é de 75 gramas por metro quadrado, e a área de uma folha de A4 é 0,062 metro quadrado.

Nessas condições, quantos quilogramas de papel rende, em média, um pé de eucalipto?

- a) 4 301
- b) 1 500
- c) 930
- d) 267
- e) 93

04. (EPCAR - 2016) Duas máquinas A e B de modelos diferentes, mantendo cada qual sua velocidade de produção constante, produzem juntas n peças iguais, gastando simultaneamente 2 horas e 40 minutos. A máquina A funcionando sozinha, mantendo sua velocidade constante, produziria, em 2 horas de funcionamento, $\frac{n}{2}$ dessas peças.

É correto afirmar que a máquina B, mantendo sua velocidade de produção constante, produziria também $\frac{n}{2}$ dessas peças em:

- a) 40 minutos.
- b) 120 minutos.
- c) 160 minutos.
- d) 240 minutos.

05. (EPCAR - 2007) Um trem percorre certa distância, com velocidade constante. Se a velocidade aumentasse 20 km por hora, ele levaria 3 horas a menos, e, se diminuísse 20 km por hora, ele precisaria de 5 horas a mais. A distância percorrida é um número cuja soma dos algarismos é:

Disponível em:
<http://revistagalileu.globo.com>. Acesso em: 28
fev. 2013 (adaptado).

a) 3

b) 5

c) 6

d) 7

06. (EMBRAER - 2013) O Ártico é a vítima mais visível do aquecimento global. Segundo dados da Nasa, o aumento de 1,6 grau na temperatura média da região nos últimos 34 anos reduziu o volume de gelo no Ártico, que era de 33 000 km³ no inverno de 1979, para 22 000 km³ no inverno de 2013. (Veja, 11.09.2013)

Admita que a redução do volume de gelo seja diretamente proporcional ao aumento da temperatura média da região. Nesse caso, se o aumento na temperatura média da região tivesse sido de 2 graus nos últimos 34 anos, a redução no volume de gelo do Ártico teria sido igual, em km³, a

a) 13 750.

b) 12 250.

c) 11 750.

d) 11 500.

07. (EPCAR - 2006) Um tear eletrônico, trabalhando 5 horas por dia, produz 1200 peças em 3 dias. O número de horas que deverá trabalhar no 8º dia para produzir 1840 peças, se o regime de trabalho fosse 3 horas diárias, seria um número do intervalo:

a) [2, 3[

b) [4, 6[

c) [3, 4[

d) [1, 2[

08. (EPCAR - 2018) Uma prestadora de serviços combina um prazo de 9 dias, utilizando 12 máquinas, para executar certo trabalho. Ao final do quarto dia, 4 máquinas estragam, não sendo substituídas e não havendo interrupção do trabalho. As máquinas levam 3 dias para serem consertadas, retornando ao trabalho no dia seguinte. Para que seja cumprido o prazo combinado no início, a prestadora coloca, além das 12 máquinas, mais x máquinas iguais às primeiras. É correto afirmar que x é igual a:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

09. (EPCAR - 2005) Se x homens, trabalhando x horas por dia durante x dias, produzem x artigos, então, o número de dias necessário para que y homens, trabalhando y horas por dia produzam um número y de artigos é:

a) y^2/x b) x^2/y c) y^3/x^2 d) x^2/y^3

10. (EPCAR - 2014) Uma confecção de roupas foi contratada para confeccionar os agasalhos de todos os alunos do 1º ano EPCAR para o ano de 2014. O prazo que a confecção teve para a execução do trabalho foi de 4 dias. Para isso, o gerente da confecção utilizou 6 máquinas tipo α , cada uma trabalhando 6 horas por dia e todas com a mesma produtividade.

Ao final do terceiro dia, o gerente da fábrica verificou que somente $0,3\overline{3}$ de $\frac{9}{4}$ dos agasalhos estavam prontos. Sendo assim, substituiu, no início do quarto dia, as máquinas do tipo α por 3 outras do tipo β , cada uma trabalhando 8 horas por dia, e cada uma delas com o triplo da produtividade de uma máquina tipo α .

Se as 3 máquinas tipo β tivessem sido utilizadas desde o início, o serviço teria sido realizado em:

- a) 20 horas.
- b) 16 horas.
- c) 12 horas.
- d) 10 horas.

11. (EPCAR - 2011) Para a reforma do Ginásio de Esportes da EPCAR foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (segunda-feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10º dia, 4 operários foram dispensados. No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia e concluíram a reforma. Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folga em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é:

- a) domingo.
- b) segunda-feira.
- c) terça-feira.
- d) quarta-feira.

GABARITO

- 1) A
- 2) B
- 3) E
- 4) D
- 5) A
- 6) A
- 7) A
- 8) D
- 9) B
- 10) B
- 11) D

Juros Simples e Compostos

A Matemática Financeira estuda a variação do capital, como dinheiro e bens econômicos, ao longo do tempo, com aplicação prática voltada para empréstimos e investimentos em geral. Neste capítulo, estudaremos problemas envolvendo alguns conceitos desta área, tais como capital, montante e taxa de juros. Embora a maior parte das aplicações práticas no mercado financeiro envolva o uso de juros compostos, este capítulo terá como foco o assunto de juros simples, que é a parte essencialmente cobrada nas provas da EPCAR.

Conceitos iniciais

Antes de iniciarmos, vamos definir alguns conceitos principais, que são essenciais para o entendimento do conteúdo.

O capital ou capital inicial (**C**) é o valor inicial de um empréstimo, dívida ou investimento, ou seja, é a quantia que foi emprestada ou investida em uma aplicação.

No caso de um empréstimo, um certo valor é cobrado pelo uso da quantia emprestada. Esse valor é chamado de juros (**J**). De maneira análoga, no caso de um investimento em uma aplicação financeira, esse valor é acumulado como rendimento desta aplicação.

No geral, os juros dependem do capital inicial, do tempo transcorrido e de um valor percentual chamado de taxa de juros (**j**). Nas próximas seções, veremos como os juros podem variar ao longo do tempo, nos regimes de juros simples e juros compostos.

Por fim, temos o montante (**M**) que é a soma do capital inicial com os juros que incidem sobre ele. Em outras palavras, é o “capital final”. No caso de um empréstimo, por exemplo, seria o

valor total pago ao se devolver o dinheiro emprestado.

Matematicamente, temos:

$$M = C + J$$

Juros simples

No regime de juros simples, os juros acumulados a cada período são dados por um valor percentual do capital inicial, a taxa de juros (**j**). Em outras palavras, a cada período, o acréscimo nos juros é constante, independente do valor atual do montante.

Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 01. Uma pessoa toma um empréstimo de R\$ 2000,00, a uma taxa de juros simples de 2 % ao mês.

Nós temos que o capital inicial é:

$$C = 2000$$

E a taxa de juros é:

$$j = 2\% = 0,02$$

A cada mês, os juros acumulados são de 2% sobre o capital inicial de R\$ 2000,00, ou seja:

$$0,02 \cdot 2000 = 40$$

Portanto, após 1 mês, os juros serão de R\$ 40,00. Após 2 meses, acumulam-se mais R\$ 40,00, totalizando R\$ 80,00. Da mesma forma, após 3 meses, os juros são acrescidos de mais R\$ 40,00 e passam a valer $80,00 + 40,00 = 120,00$ reais.

A tabela a seguir mostra o valor acrescentado aos juros a cada mês e o valor total dos juros ao longo dos meses:

Tempo (meses)	Juros no mês (R\$)	Juros totais (R\$)
1	40	40
2	40	80
3	40	120
4	40	160
5	40	200

Note que, nos juros simples, o valor acrescentado a cada mês é sempre o mesmo, nesse caso é R\$ 40,00. Para obter o montante em cada mês, somamos os juros totais ao capital inicial de R\$ 2000,00. Veja como ficam os valores na tabela a seguir:

Tempo (meses)	Juros totais (R\$)	Montante (R\$)
1	40	2040
2	80	2080
3	120	2120
4	160	2160
5	200	2200

A partir do exemplo anterior podemos fazer uma generalização. Considerando um capital C aplicado a uma taxa de juros simples j , a cada período são acumulados $C \cdot j$ de juros. Ou seja, após t períodos, o valor dos juros é dado por:

$$J = C \cdot j \cdot t$$

Para obter o montante, basta somar o capital inicial com os juros:

$$M = C + J = C + C \cdot j \cdot t$$

$$M = C + C \cdot j \cdot t$$

Colocando C em evidência, temos a expressão do montante no regime de juros simples:

$$M = C \cdot (1 + j \cdot t)$$

Note que temos quatro variáveis envolvidas: o montante, o capital, a taxa de juros e o tempo transcorrido. Em geral, problemas envolvendo juros simples fornecem de alguma forma três dessas variáveis e perguntam o valor da variável restante.

Além disso, embora no exemplo anterior tenhamos usado apenas valores inteiros de t , também é possível que o tempo transcorrido assuma valores fracionários. Por exemplo, suponha uma taxa de juros simples de 12% ao ano durante 6 meses, ou seja, $j = 0,12$ e $t = \frac{6}{12} = 0,5$. Alternativamente, no caso de juros simples, uma taxa de 12% ao ano equivale a uma taxa de 1% ao mês.

Vejamos alguns exercícios resolvidos.

Exercícios resolvidos

01. Qual o valor do capital que, aplicado a uma taxa de juros simples de 1,5 % ao mês durante 6 meses, resulta um montante de R\$ 10.000,00?

Resolução:

Foram dados o valor do montante ($M = 10000$), da taxa de juros ($j = 1,5\% = \frac{1,5}{100} = 0,015$) e do tempo transcorrido ($t = 6 \text{ meses}$), desejamos saber qual o capital inicial necessário para que isso ocorra. Então, para juros simples, temos que:

$$M = C(1 + j \cdot t)$$

$$10000 = C(1 + 0,015 \cdot 6)$$

$$10000 = C \cdot 1,09$$

$$C = \frac{10000}{1,09} \approx 9174,31$$

Logo, o capital inicial deve ser de R\$ 9174,31.

02. (EMBRAER - 2019) Kleber recebeu uma bonificação de determinado valor, e aplicou todo dinheiro recebido a juro simples, à taxa de 1,2% ao mês, durante 8 meses. Se o valor recebido de juros, ao final da aplicação, foi igual a R\$ 1.920,00,

então o valor total do bônus recebido por Kleber foi igual a:

a) R\$ 30.000,00.

b) R\$ 25.000,00.

c) R\$ 20.000,00.

d) R\$ 15.000,00

Resolução:

Nesse caso, foi nos dado o valor dos juros, da taxa de juros, do tempo transcorrido e dos juros acumulados:

$$J = 1920$$

$$j = 1,2\% = \frac{1,2}{100} = 0,012$$

$$t = 8 \text{ meses}$$

E pede-se o valor do bônus recebido, ou seja, o capital inicial da aplicação. Para juros simples, temos que:

$$J = C \cdot j \cdot t$$

Então:

$$1920 = C \cdot 0,012 \cdot 8$$

$$C = \frac{1920}{0,012 \cdot 8} = \frac{1920}{0,096} = 20000$$

Portanto, o valor total do bônus recebido inicialmente por Kleber foi igual a R\$ 20.000,00.

A resposta correta é a **Alternativa C**.

Exercícios Propostos

01. Ana solicitou um empréstimo de R\$ 5000,00. Após 5 meses, pagou R\$ 6000,00 de volta e quitou a dívida. Qual a taxa de juros simples aplicada sobre o empréstimo, ao mês e ao ano?

02. (EPCAR - 2012/Adaptada) Sr. José tinha uma quantia x em dinheiro e aplicou tudo a juros simples de 5% ao

ano. Terminado o primeiro ano, reuniu o capital aplicado e os juros e gastou $\frac{1}{3}$ na compra de material para construção de sua casa.

O restante do dinheiro ele investiu em duas aplicações: colocou $\frac{5}{7}$ a juros simples de 6% ao ano e o que sobrou a juros simples de 5% ao ano, recebendo assim, 700 reais de juros relativos a esse segundo ano.

Qual a quantia x que o Sr. José tinha antes da aplicação?

Juros compostos

Em aplicações práticas no mercado financeiro, é mais frequente o uso de juros compostos. Nesse regime, os juros a cada período são aplicados sobre o montante do período anterior, e não sobre o capital inicial, como no caso de juros simples.

Vamos ver como ficam os juros e o montante a cada mês do **Exemplo 01**, agora sob juros compostos.

Segundo o exemplo, o empréstimo é de R\$ 2000,00 e a uma taxa de juros de 2 % ao mês.

No primeiro mês, os juros de 2% são aplicados sobre o montante anterior, nesse caso o próprio capital inicial de R\$ 2000,00. Assim, os juros nesse mês serão de:

$$0,02 \cdot 2000 = 40$$

O valor dos juros aplicados no primeiro mês é de R\$ 40,00, assim como no caso de juros simples e o montante passa a ser de R\$ 2040,00. Entretanto, a partir do segundo mês podemos ver a diferença entre os dois regimes de juros.

No segundo mês, os juros de 2% são aplicados sobre o montante de R\$ 2040,00 e não sobre o capital inicial de R\$ 2000,00. Assim, os juros nesse mês serão de:

$$0,02 \cdot 2040 = 40,8$$

Ou seja, o valor dos juros aplicados no segundo mês aumentou em relação ao valor do mês anterior. Assim, o montante agora passa a ser de:

$$2040 + 40,80 = 2080,80$$

Da mesma forma, no terceiro mês, os juros de 2% são aplicados sobre o montante de R\$ 2080,80:

$$0,02 \cdot 2080,80 \approx 41,62$$

Novamente, note que o valor dos juros aplicados aumentou em relação aos meses anteriores. Isso ocorre porque temos “juros aplicados sobre juros anteriores”, por isso se chama juros compostos.

Veja mais alguns valores dos juros por mês e do montante na tabela a seguir:

Tempo (meses)	Juros por mês (R\$)	Montante (R\$)
1	40	2040
2	40,80	2080,80
3	41,62	2122,42
4	42,44	2164,86
5	43,30	2208,16

Observação: Nesse caso, se desejássemos saber o valor total dos juros a cada mês, poderíamos subtrair do montante o capital inicial.

Agora, vamos encontrar uma fórmula para o montante em juros compostos, assim como fizemos no caso de juros simples.

Considere um capital C e uma taxa de juros compostos j . Após um período, como os juros são aplicados inicialmente sobre o capital, o montante é dado por:

$$M_1 = C + J = C + C \cdot j = C(1 + j)$$

Após dois períodos, os juros passam a ser aplicados sobre o montante M_1 . Assim, o novo montante passa a ser:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot j = M_1(1 + j)$$

Substituindo o valor de M_1 , temos:

$$M_2 = C(1 + j)(1 + j) = C(1 + j)^2$$

Após três períodos, temos os juros aplicados sobre o montante M_2 , assim:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot j = M_2(1 + j)$$

$$M_3 = C(1 + j)^2(1 + j) = C(1 + j)^3$$

De forma geral, para t períodos transcorridos, o montante a juros compostos é dado por:

$$M = C(1 + j)^t$$

Juros Simples x Juros Compostos

Na tabela abaixo temos os valores do montante a cada mês, a juros simples e a juros compostos, para um mesmo

capital inicial de R\$ 2000 e uma mesma taxa de juros de 2 %:

Tempo (meses)	Montante simples (R\$)	Montante composto (R\$)
0	2000	2000
1	2040	2040
2	2080	2080,80
3	2120	2122,42
4	2160	2164,86
5	2200	2208,16

Note que, como o valor dos juros aumenta a cada mês no regime de juros compostos, o montante aumenta mais rapidamente a juros compostos do que a juros simples.

Dizemos que, em juros simples, o montante cresce linearmente com o tempo, pois é uma função do primeiro grau na variável t . Já em juros compostos, como temos a variável t no expoente, dizemos que o montante cresce exponencialmente.

Em geral, para problemas envolvendo juros compostos, utilizamos ferramentas como equações exponenciais e logaritmos, assuntos de ensino médio que não fazem parte do escopo da prova da EPCAR. Assim, nos exercícios resolvidos e nos exercícios propostos no fim do capítulo não será necessário o uso de tais conceitos.

Exercícios resolvidos

03. (ENEM) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1,03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá:

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que

as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Resolução:

Como o enunciado menciona que “as rentabilidades (...) incidem sobre o valor do período anterior”, os investimentos são realizados em regime de juros compostos. Nesse contexto, a rentabilidade é o aumento percentual do montante em relação ao capital inicial, dado por:

$$\frac{M-C}{C} = \frac{C(1+j)^t - C}{C} = (1+j)^t - 1$$

Para o investimento A, temos $j = 0,03$ ao mês e $t = 12$ meses. Usando os dados da tabela, a rentabilidade anual será de:

$$(1 + 0,03)^{12} - 1 = 1,03^{12} - 1 \\ \approx 1,426 - 1 = 0,426 = 42,6\%$$

Para o investimento B, o enunciado já forneceu a rentabilidade anual: 36 %.

Para o investimento C, temos $j = 0,18$ ao semestre e $t = 2$ semestres. A rentabilidade anual então é de:

$$(1 + 0,18)^2 - 1 = 1,18^2 - 1 \\ \approx 1,39 - 1 = 0,39 = 39\%$$

Logo, deve ser escolhido o investimento A, que possui rentabilidade anual maior do que as dos investimentos B e C. Note que a rentabilidade por período é

proporcional à duração do período. Nessas condições, a juros compostos, o investimento com menor período (maior frequência de capitalização) é mais vantajoso.

Portanto, a resposta correta é a **alternativa C**.

Exercício proposto

03. (UPE - Adaptado) Dan deve uma importância C em um determinado cartão de crédito. Ele resolve não utilizar mais esse cartão e pagar mensalmente 30% do valor da fatura. Se o cartão cobra juros de 12% ao mês, lançados sobre o saldo devedor, antes de enviar a fatura, quanto Dan deve ao cartão após 10 meses? Observação: Deixe a resposta em função de C .

Exercícios

01. (EMBRAER - 2017) Berenice comprou uma geladeira nova, de preço igual a P reais. Pagou 20% desse valor no ato da compra, e o restante, acrescido de 5% a título de juros, em uma parcela única 3 meses após a data da compra. Se o valor da parcela única foi de R\$ 1.680,00, então o valor total que Berenice gastou na compra dessa geladeira foi igual a:

- a) R\$ 2.000,00.
- b) R\$ 2.080,00.
- c) R\$ 2.100,00.
- d) R\$ 2.240,00.

02. (FGV - 2016) Ronaldo aplicou seu patrimônio em dois fundos de investimentos, A e B. No período de um ano ele teve um rendimento de R\$ 26250,00 aplicando 75% de seu patrimônio em A e 25% em B.

Sabendo que o fundo B rendeu uma taxa de juro anual 20% superior à de A, então, se tivesse aplicado 100% do patrimônio em A, teria recebido:

- a) R\$ 25 200,00
- b) R\$ 25 000,00
- c) R\$ 25 600,00
- d) R\$ 24 800,00
- e) R\$ 25 400,00

03. (EMBRAER - 2017) Abel tomou um empréstimo de R\$ 10.000,00, a ser pago acrescido de juro simples de 1% ao mês. Três meses após, ele fez um pagamento de R\$ 5.800,00, que incluiu os juros devidos até aquele momento mais a parte do valor emprestado. Um mês após esse

pagamento, ele fez um segundo pagamento e liquidou todo o seu débito. O valor do segundo pagamento foi de:

- a) R\$ 3.980,00.
- b) R\$ 4.242,00.
- c) R\$ 4.545,00.
- d) R\$ 5.600,00.

04. (EPCAR - 2013) Gabriel aplicou R\$ 6500,00 a juros simples em dois bancos. No banco A, ele aplicou uma parte a 3% ao mês durante $\frac{5}{6}$ de um ano; no banco B, aplicou o restante a 3,5% ao mês, durante $\frac{3}{4}$ de um ano. O total de juros que recebeu nas duas aplicações foi de R\$ 2002,50. Com base nessas informações, é correto afirmar que:

- a) é possível comprar um televisor de R\$ 3100,00 com a quantia aplicada no banco A.
- b) o juro recebido com a aplicação no banco A foi menor que R\$ 850,00.
- c) é possível comprar uma moto de R\$ 4600,00 com a quantia recebida pela aplicação no banco B.
- d) o juro recebido com a aplicação no banco B foi maior que R\$1110,00.

05. (EPCAR - 2020) Uma pessoa aplicou 60000 reais durante o ano de 2018. Parte desse dinheiro aplicou no investimento P e a outra parte no investimento Q.

No final de 2018, retirou o dinheiro das duas aplicações e verificou que, somando os dois valores, não obteve lucro nem prejuízo.

O investimento P rendeu 10%, mas, sobre o rendimento, foi cobrada uma taxa de 10%; já o investimento Q deu prejuízo de 12,6%.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que:

a) a razão entre o valor aplicado em Q e o valor aplicado em P é $\frac{5}{8}$.

b) com o que essa pessoa recebeu do investimento Q, no final de 2018, seria possível comprar um carro de 23000 reais.

c) a diferença entre o maior e o menor valor aplicados, em reais, é maior que 11000 reais.

d) essa pessoa aplicou mais de 32000 reais no investimento P.

06. (IBMEC/SP) Jair tem três opções de pagamento na compra de uma máquina no valor de 100 mil reais, que são:

I. à vista com 4% de desconto;

II. em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra;

III. em duas prestações mensais iguais com desconto de 2%, vencendo a primeira no ato da compra.

Como Jair dispõe dos 100 mil reais para a compra, antes de tomar a decisão, ele verificou que é possível conseguir uma aplicação financeira no seu banco com rendimentos líquidos mensais de 2%. Dessa forma, comparando as três opções ao final de dois meses, a melhor das três é a:

a) I, com vantagem de R\$ 1121,60 sobre a pior opção.

b) I, com vantagem de R\$ 964,80 sobre a pior opção.

c) II, com vantagem de R\$ 482,50 sobre a pior opção.

d) II, com vantagem de R\$ 236,40 sobre a pior opção.

e) III, com vantagem de R\$ 180,20 sobre a pior opção.

07. (EPCAR - 2011) Lucas e Mateus ganharam de presente de aniversário as quantias x e y reais, respectivamente, e aplicaram, a juros simples, todo o dinheiro que ganharam, da seguinte forma:

1) Mateus aplicou a quantia y durante um tempo que foi metade do que esteve aplicado a quantia x de Lucas.

2) Mateus aplicou seu dinheiro a uma taxa igual ao triplo da taxa da quantia aplicada por Lucas.

3) No resgate de cada quantia aplicada, Lucas e Mateus receberam o mesmo valor de juros.

Se juntos os dois ganharam de presente 516 reais, então $x - y$ é igual a:

a) R\$ 103,20

b) R\$ 106,40

c) R\$ 108,30

d) R\$ 109,60

08. (EPCAR - 2006) Dois sócios, x e y , que montaram uma firma e que têm retirada mensal de acordo com o capital inicial de cada um, combinaram que a soma das retiradas totalizaria R\$ 5.000,00. Após 6 meses, y passou a receber por mês mais 15% por ter adquirido algumas

cotas de x que, conseqüentemente, passou a receber $\frac{1}{10}$ a menos.

Sabendo-se que, mesmo após a mudança, o total da retirada mensal permaneceu e que x sempre economizou $\frac{1}{12}$ do que recebia, enquanto y sempre economizou 12,5%, é INCORRETO afirmar que:

- a) a economia mensal de ambos era a mesma nos primeiros 6 meses.
- b) x passou a receber menos de R\$ 2.800,00 após 6 meses.
- c) a diferença entre as duas retiradas caiu para 40% com a mudança.
- d) a economia mensal de x diminuiu R\$ 30,00 com a alteração das retiradas.

09. (EPCAR - 2007) Com os $\frac{7}{8}$ da metade do valor da herança que Carlos recebeu, ele adquiriu um lote. Com $\frac{1}{3}$ do restante ele liquidou suas dívidas e o valor que sobrou foi dividido em partes iguais aplicadas como a seguir: a 1ª parte foi aplicada na poupança com rendimento de 0,5% ao mês; e a 2ª foi aplicada em ações onde, ao fim de 15 dias, ele havia perdido 40% do valor dessa aplicação.

Ao fim dos 15 dias subsequentes, Carlos conseguiu recuperar 50% do que foi perdido, ficando com um capital equivalente a 48.000 reais na 2ª parte aplicada. Com base nisso, é INCORRETO afirmar que:

- a) o valor total dessa herança seria suficiente para comprar uma casa avaliada em 300.000 reais, caso não comprasse o lote nem liquidasse suas dívidas.

- b) o lote adquirido custou menos de 150.000 reais.

- c) o rendimento da poupança no primeiro mês foi superior a 200 reais.

- d) considerando o mês de 30 dias, ao final do primeiro mês, a soma das partes aplicadas e seus rendimentos totalizavam 108.000 reais.

10. (EPCAR - 2007) Ao desfazer uma sociedade, dois sócios A e B fizeram a retirada de suas partes que eram diretamente proporcionais a 1 e 3. O sócio A aplicou, então, o valor de sua retirada à taxa de 50% ao ano. Já o sócio B aplicou a sua parte à taxa de 25% ao ano e $\frac{2}{3}$ do montante que recebeu após 12 meses foi igual a 150.000 reais. Pode-se afirmar que:

- a) a diferença entre os rendimentos dos sócios A e B, após 12 meses, é, em milhares de reais, um número do intervalo $[8, 15]$.

- b) a soma dos capitais retirados por A e B é igual ao montante que o sócio B conseguiu após 12 meses.

- c) o rendimento obtido pelo sócio A é igual a 30% do rendimento do sócio B.

- d) o capital retirado pelo sócio A e o rendimento conseguido pelo sócio B são valores iguais.

11. (EPCAR - 2008) Dois capitais a e b , $a > b$, cuja diferença entre os mesmos é igual aos $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{8}$ de R\$ 4.000,00 foram aplicados às taxas de juros simples de:

- 20% ao ano, o capital maior; e
- 30% ao ano, o capital menor.

Após 257 dias de aplicação, o investidor solicitou resgate do maior valor aplicado e mais os juros das duas aplicações, que naquela data representavam valores iguais.

Sabendo-se que o ano comercial possui 360 dias e que em qualquer dia do ano que o investidor resgatasse as aplicações ele receberia o rendimento proporcional ao tempo de aplicação, é correto afirmar que:

- a)** o valor total aplicado é menor que R\$ 900,00.
- b)** se os dois capitais só fossem resgatados ao final do primeiro ano, eles teriam rendido, juntos, $\frac{1}{4}$ de seu valor.
- c)** o capital menor corresponde a 60% do capital maior.
- d)** após o resgate do maior valor aplicado e dos juros das duas aplicações, se for mantida a aplicação do capital menor, à mesma taxa, após meio ano, ele renderá um valor correspondente a 10% do capital maior.

GABARITO

- 1) B
- 2) B
- 3) C
- 4) C
- 5) D
- 6) A
- 7) A
- 8) D
- 9) D
- 10) A
- 11) D

Expressões Numéricas e Algébricas II

No capítulo de Expressões Numéricas e Algébricas I, nós aprendemos técnicas para simplificar frações com raízes no denominador. Agora, neste capítulo, estudaremos mais uma técnica importante para resolver expressões numéricas: simplificação de radicais duplos. Tratam-se de expressões com radicais “dentro” de outro radical, cuja simplificação não é necessariamente imediata. Neste capítulo também usaremos fatoração e produtos notáveis para simplificar essas expressões.

Introdução

Observe a seguinte expressão:

$$N = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

Podemos afirmar que N é um número racional? Ou N é um número irracional?

Uma expressão com todas essas raízes quadradas, definitivamente, parece ser um número irracional.

No entanto, não podemos afirmar com certeza que a soma de dois números irracionais será irracional. Por exemplo, os números $a = 2 + \sqrt{3}$ e $b = 2 - \sqrt{3}$ são ambos irracionais, mas a soma deles é um número racional:

$$a + b = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

Além disso, também não podemos afirmar que um número “cheio de raízes quadradas” é, necessariamente, um número irracional. Observe o número real P a seguir:

$$P = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2}}}$$

Dentro da expressão de P temos a raiz de um quadrado perfeito:

$\sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$. Então, podemos simplificar:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2}}} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2}} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{4}} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} \\ P &= 2 \end{aligned}$$

Logo, P é um número racional..

Diante disso, voltemos ao exemplo inicial envolvendo o número N . Veja o que acontece ao calcular o valor de N com auxílio de uma calculadora:

$$\sqrt{(11 + 6 \times \sqrt{2})} + \sqrt{(11 - 6 \times \sqrt{2})} = 6$$

Esse resultado nos sugere que N é um número racional, mas lembre-se de que calculadoras trabalham com aproximações ao lidar com números irracionais. Logo, não podem ser utilizadas para uma demonstração rigorosa.

Como podemos provar, então, que N é de fato um número racional? Poderíamos fazer da mesma forma que fizemos anteriormente para os números $a + b$ e P ? É o que veremos a seguir.

Radical duplo

Para provar que N é um número racional, vamos tentar simplificá-lo. Para isso, vamos por partes, começando com $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

Para entender como isso pode ser feito, observe o que acontece quando elevamos ao quadrado alguns números da forma $A \pm \sqrt{B}$, utilizando o produto notável $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Exemplo 01. $1 + \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{2})^2 &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2 - \sqrt{3})^2 &= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Exemplo 02. $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

Note que os resultados foram outros números que possuem o mesmo formato: $A \pm \sqrt{B}$. Olhando de cara para os números $3 + 2\sqrt{2}$, $7 - 4\sqrt{3}$ e $2 + \sqrt{3}$, a princípio não parece que podem ser fatorados como quadrados perfeitos, mas acabamos de mostrar que eles podem sim. Como estamos lidando com números positivos, então, podemos afirmar que:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Expressões como $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$, $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ e $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ são conhecidas como radicais duplos.

As expressões com radicais duplos podem ser simplificadas quando contêm um quadrado perfeito dentro da raiz quadrada.

Novamente, voltemos ao exemplo inicial do capítulo. Desejamos simplificar a seguinte expressão:

$$N = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

Iniciaremos pelo primeiro termo: $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

Para simplificar essa expressão, temos que escrever $11 + 6\sqrt{2}$ na forma: $a^2 + 2ab + b^2$.

Observe que, nos exemplos anteriores, o termo $2ab$ é aquele que apresenta uma raiz quadrada no resultado. Isso ocorre porque, ao calcular $a^2 + b^2$, as raízes quadradas presentes em a ou b se cancelam, obtendo um número inteiro. Assim, queremos achar números a e b tais que:

$$a^2 + b^2 = 11 \quad 2ab = 6\sqrt{2}$$

Note que $6\sqrt{2} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$. Como queremos escrever esse termo na forma $2ab$, podemos então tomar $a = 3$ e $b = \sqrt{2}$. Como:

$$a^2 + b^2 = 3^2 + (\sqrt{2})^2 = 11,$$

encontramos os números que estávamos procurando.

Assim, podemos simplificar o radical duplo usando a fatoração $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} = 3 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Para simplificar o outro termo ($\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$), podemos usar a mesma ideia, uma vez que mudou apenas o sinal dentro do radical duplo.

Entretanto, quando temos uma subtração dentro do radical, devemos tomar cuidado para que o resultado seja um número positivo:

$$\begin{aligned}\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} = |3 - \sqrt{2}|\end{aligned}$$

Como 3 e $\sqrt{2}$ são positivos, podemos comparar os números pelos seus quadrados: $9 > 2$, ou seja, $3^2 > (\sqrt{2})^2$. Assim, $3 > \sqrt{2}$ e $3 - \sqrt{2} > 0$, ou seja, podemos afirmar que: $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$.

Agora, temos condições de responder à pergunta do início do capítulo. Então, N é um número racional e igual a 6:

$$N = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

$$N = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 3 + 3 = 6$$

Podemos encontrar o valor de N utilizando uma outra abordagem, que é elevar a expressão ao quadrado e depois simplificá-la:

$$N = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$$

$$N^2 = (\sqrt{11 + 6\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{11 - 6\sqrt{2}})^2$$

$$N^2 = 11 + 6\sqrt{2} + 11 - 6\sqrt{2}$$

$$+ 2\sqrt{(11 + 6\sqrt{2})(11 - 6\sqrt{2})}$$

$$N^2 = 22 + 2\sqrt{11^2 - (6\sqrt{2})^2}$$

$$N^2 = 22 + 2\sqrt{121 - 72} = 22 + 2\sqrt{49}$$

$$N^2 = 22 + 2 \cdot 7 = 36$$

$$N > 0$$

$$\Rightarrow N = 6$$

Nas próximas seções, iremos consolidar o que foi visto na seção anterior, apresentando dois métodos práticos para simplificar radicais duplos: a soma e produto e a fórmula de transformação.

Soma e produto

Ao simplificar o radical $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ na seção anterior, vimos que a resposta seria da forma $a + b$, onde a e b são as soluções do seguinte sistema:

$$a^2 + b^2 = 11 \quad 2ab = 6\sqrt{2}$$

Entretanto, parece um sistema complicado de resolver toda vez que quisermos simplificar um radical duplo.

Vejamos uma forma mais prática de encontrar o mesmo resultado.

Vamos transformar o radical duplo na soma de radicais simples: $\sqrt{p} + \sqrt{q}$. Isso significa que dentro do radical vamos encontrar algo da forma:

$$\begin{aligned}\sqrt{p} + \sqrt{q} &= \sqrt{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \\ &= \sqrt{p + q + 2\sqrt{pq}}\end{aligned}$$

Ou seja, se escrevermos o radical duplo como $\sqrt{A + 2\sqrt{B}}$, então basta encontrar dois números p e q cuja soma é A e o produto é B :

$$\begin{aligned}\sqrt{A + 2\sqrt{B}} &= \sqrt{p} + \sqrt{q} \\ \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$A = p + q \text{ e } B = pq$$

Isso também vale para radicais duplos da forma $\sqrt{A - 2\sqrt{B}}$, mas o resultado será do tipo $\sqrt{p} - \sqrt{q}$ (com $p > q$, para garantir que a raiz quadrada seja positiva).

Exemplo 03. Transforme o radical $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ na soma de dois radicais simples.

Reescrevendo na forma $\sqrt{A + 2\sqrt{B}}$, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{11 + 2 \cdot 3\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{11 + 2\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{18}}\end{aligned}$$

Precisamos agora encontrar dois números cuja soma seja 11 e cujo produto seja 18.

Vamos pensar nas formas de escrever 18 como um produto e verificar se a soma dos fatores dá 11:

- $18 = 1 \cdot 18 \Rightarrow 1 + 18 = 19$
- $18 = 2 \cdot 9 \Rightarrow 2 + 9 = 11$ (ok!)

Existem outras formas de escrever o produto, mas iremos parar porque já encontramos os números p e q , que são 2 e 9.

Então a resposta é:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2},$$

Note que a resposta é igual à encontrada anteriormente:

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$$

Exemplo 04. Transforme o radical $\sqrt{7 - \sqrt{40}}$ na soma de dois radicais simples.

Para escrever o radical na forma $\sqrt{A - 2\sqrt{B}}$, para simplificar, podemos tirar o fator 4 de dentro da raiz:

$$\begin{aligned}\sqrt{7 - \sqrt{40}} &= \sqrt{7 - \sqrt{4 \cdot 10}} \\ &= \sqrt{7 - \sqrt{4}\sqrt{10}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\end{aligned}$$

Agora, precisamos encontrar dois números cuja soma seja 7 e o produto seja 10. Testando as possibilidades:

- $10 = 1 \cdot 10 \Rightarrow 1 + 10 = 11$
- $10 = 2 \cdot 5 \Rightarrow 2 + 5 = 7$ (ok!)

Assim, os números que procuramos são 2 e 5. Entretanto, qual deve ser a resposta correta: $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ ou $\sqrt{5} - \sqrt{2}$?

Lembre-se de que o resultado da raiz quadrada deve ser positivo.

Como $5 > 2$, então $\sqrt{5} > \sqrt{2}$.

Logo:

$$\sqrt{7 - \sqrt{40}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

Fórmula de transformação

O método de soma e produto é bastante útil, mas pode não ser tão prático para simplificar radicais duplos como $\sqrt{4 + \sqrt{15}}$. Nesse caso, precisaríamos reescrevê-lo como:

$$\sqrt{4 + \frac{2}{2}\sqrt{15}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{\frac{15}{4}}}$$

Assim, precisaríamos encontrar dois números cuja soma seja 4 e o produto seja 15/4?

É possível encontrar a resposta dessa forma, mas ao contrário dos exemplos anteriores que envolvia apenas números inteiros, poderia ser mais trabalhoso e demorado.

Para resolver de forma prática casos como esse, iremos encontrar uma fórmula pronta para transformar radicais duplos em radicais simples.

O processo para encontrar a fórmula não é o mais importante aqui, mas sim a sua aplicação prática para a simplificação de radicais duplos.

Buscaremos generalizar o procedimento feito na seção anterior.

Desejamos escrever o radical duplo $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ como a soma de radicais simples $\sqrt{p} + \sqrt{q}$, em que A, B, p e q são números racionais positivos e B não é um quadrado perfeito. Assim, temos que:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{p} + \sqrt{q}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$A + \sqrt{B} = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$$

$$A + \sqrt{B} = p + q + 2\sqrt{pq}$$

Note que cada lado da equação possui uma parte racional e uma parte irracional. Podemos, então, igualar essas partes entre si:

$$p + q = A \quad 2\sqrt{pq} = \sqrt{B}$$

$$\Rightarrow p + q = A \quad pq = \frac{B}{4}$$

Lembre-se de que A e B são valores dados pelo problema. Assim, temos um sistema nas variáveis p e q , muito parecido com o que encontramos na seção anterior.

Note que conhecemos a soma (A) e o produto ($B/4$) entre p e q . Podemos, então, afirmar que p e q são as raízes da seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0$$

Portanto, podemos encontrar as raízes pela fórmula de Bháskara e chamar uma delas de p e a outra de q :

$$p = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}, \quad q = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Chamando $\sqrt{A^2 - B}$ de C e substituindo na expressão $\sqrt{p} + \sqrt{q}$, chegamos à fórmula de transformação do radical duplo:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$C = \sqrt{A^2 - B}$$

Para $\sqrt{A - \sqrt{B}}$, o procedimento é análogo. Neste caso, temos a mesma fórmula com sinal negativo entre os radicais simples à direita:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Para que a fórmula gere de fato uma expressão com radicais simples e não dois novos radicais duplos, C deve ser um número racional. Em outras palavras, $A^2 - B$ deve ser um quadrado perfeito. Além disso, pela condição de existência da raiz quadrada, devemos ter que $A^2 - B > 0$.

Exemplo 05. Vamos utilizar a fórmula para simplificar o radical duplo visto na seção anterior: $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

Reescrevendo na forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{11 + \sqrt{36 \cdot 2}} \\ &= \sqrt{11 + \sqrt{72}}\end{aligned}$$

Temos que $A = 11$, $B = 72$ e $C = \sqrt{11^2 - 72} = \sqrt{121 - 72} = \sqrt{49} = 7$

Aplicando na fórmula de transformação:

$$\begin{aligned}\sqrt{A + \sqrt{B}} &= \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \\ \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}} \\ &= \sqrt{9} + \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Assim, encontramos de forma mais simples o mesmo resultado obtido por soma e produto.

Exemplo 06. Transforme o radical $\sqrt{4 + \sqrt{15}}$ na soma de dois radicais simples.

Vamos utilizar a fórmula de transformação para resolver o exemplo “problemático” do início da seção.

Temos que $A = 4$, $B = 15$ e $C = \sqrt{4^2 - 15} = \sqrt{16 - 15} = \sqrt{1} = 1$.

Substituindo na fórmula de transformação:

$$\begin{aligned}\sqrt{A + \sqrt{B}} &= \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \\ \sqrt{4 + \sqrt{15}} &= \sqrt{\frac{4+1}{2}} + \sqrt{\frac{4-1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Note que $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{2}$ somados dão 4, e o seu produto é igual a $\frac{15}{4}$, assim como indicado pelo método da soma e produto.

Racionalizando o resultado, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} \\ &= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

01. Transforme os seguintes radicais na soma de dois radicais simples:

a) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$

d) $\sqrt{11 - \sqrt{21}}$

e) $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$

02. Qual o valor da expressão $\sqrt{51 + 14\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$?

Raízes cúbicas

Nas seções anteriores, vimos como simplificar radicais duplos da forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Como poderíamos proceder para simplificar radicais duplos envolvendo raízes cúbicas, como $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}}$, ou ainda raízes n-ésimas?

Poderíamos tentar deduzir uma fórmula geral, mas isso não é tão simples quando se trata de raízes cúbicas. Procedendo de forma análoga à seção anterior, as contas se tornariam bastante complexas.

Como proceder nesses casos então?

Vamos novamente usar a fatoração e procurar cubos perfeitos dentro da raiz cúbica, ou seja, vamos procurar reescrever o que está dentro da raiz na forma de um destes produtos notáveis:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exemplo 06. Transforme o radical $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$ na soma de dois radicais simples.

Começamos imaginando que tipo de número elevado ao cubo poderia ter $10 + 6\sqrt{3}$ como resultado.

Note o que acontece quando elevamos $a + b\sqrt{3}$ ao cubo:

$$\begin{aligned} & (a + b\sqrt{3})^3 \\ &= a^3 + 3a^2(b\sqrt{3}) + 3a(b\sqrt{3})^2 + (b\sqrt{3})^3 \\ &= a^3 + 3a^2b\sqrt{3} + 3a \cdot 3b + b^3 \cdot (3\sqrt{3}) \\ &= a^3 + 9ab + (3a^2b + 3b^3)\sqrt{3} \end{aligned}$$

Encontramos, assim como nos casos anteriores, uma parte racional ($a^3 + 9ab$) e uma parte irracional ($(3a^2b + 3b^3)\sqrt{3}$).

Comparando com o resultado desejado ($10 + 6\sqrt{3}$), temos:

$$a^3 + 9ab = 10 \quad 3a^2b + 3b^3 = 6$$

Parece um sistema difícil de resolver, mas podemos rapidamente encontrar a solução desejada com algumas observações.

Note que podemos simplificar a segunda equação para:

$$a^2b + b^3 = 2$$

Temos que b^3 somado com outro termo deve ser igual a 2. Como estamos procurando por soluções positivas, uma vez que estamos calculando a raiz cúbica de um número positivo, então b^3 deve ser menor do que 2.

Note, então, que se b for igual a 2, b^3 já vai ser 8, o que não é possível! Logo, o único valor inteiro positivo viável é $b = 1$. Substituindo, encontramos o valor de a :

$$a^2 \cdot 1 + 1^3 = 2 \Rightarrow a^2 + 1 = 2$$

$$a^2 = 1$$

$$a > 0 \Rightarrow a = 1$$

Perceba que $a = 1$ e $b = 1$ também satisfazem a primeira equação:

$$1^3 + 9 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \text{ (ok!)}$$

Assim, fizemos a suposição de que a resposta seria da forma $a + b\sqrt{3}$ e encontramos $a = 1$ e $b = 1$. Portanto:

$$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

As raízes de índice ímpar podem ser negativas, se o radicando for também negativo. Por exemplo:

$$\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$$

Nesse caso, tanto o radicando quanto a raiz cúbica são números negativos.

Por fim, uma dica para simplificar radicais duplos com raiz de índice par em geral, tais como $\sqrt[4]{A \pm \sqrt{B}}$.

Note que:

$$\sqrt[4]{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}}$$

Assim, no caso de uma raiz quarta, podemos aplicar duas vezes a transformação de um radical duplo com raiz quadrada.

Raízes de índice 5 ou maior não costumam ser abordadas em questões, devido à alta complexidade do resultado.

Veja, por exemplo, os valores relativamente grandes que aparecem ao se calcular $(1 + \sqrt{2})^5$:

$$(1 + \sqrt{2})^5 = 41 + 29\sqrt{2}$$

No entanto, para abordar esses casos, poderíamos usar estratégias semelhantes às vistas nessa seção: pensar em produtos notáveis ou em casos simples $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3} \dots)$ como possíveis respostas.

Exercícios Propostos

03. (CN/Adaptada) Determine o resultado mais simples para a expressão:

$$\sqrt[4]{(\sqrt{48} + 7)^2} + \sqrt[4]{(\sqrt{48} - 7)^2}.$$

Exercícios resolvidos

01. (EPCAR) Sendo x e y números naturais, com $x > y$, a expressão

$$\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - y^2}}$$

equivale a:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

b) $\sqrt{x + y} + \sqrt{y}$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x - y}$

d) $\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$

e) $2\sqrt{x + y} + 2\sqrt{x - y}$

Resolução:

Note que a expressão está na forma $\sqrt{A + 2\sqrt{B}}$. Assim, podemos resolver usando soma e produto: em que a soma dos números é $2x$ e o produto é $x^2 - y^2$.

Note que podemos fatorar a diferença de dois quadrados:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Então, o produto entre $x + y$ e $x - y$ é $x^2 - y^2$, como desejado.

Agora veja quanto vale a soma:

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

A soma vale $2x$, conforme estávamos procurando. Logo, os números desejados são $x + y$ e $x - y$, e a resposta do problema é:

$$\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - y^2}} = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$$

Alternativamente, podemos também resolver usando a fórmula de transformação de radical duplo.

Colocando o radical duplo na forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - y^2}} \\ &= \sqrt{2x + \sqrt{4x^2 - 4y^2}} \end{aligned}$$

Temos $A = 2x$, $B = 4x^2 - 4y^2$ e

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{(2x)^2 - (4x^2 - 4y^2)} \\ &= \sqrt{4x^2 - 4x^2 + 4y^2} = \sqrt{4y^2} = 2y. \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da transformação:

$$\begin{aligned} \sqrt{A + \sqrt{B}} &= \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \\ &= \sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - y^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2x+2y}{2}} + \sqrt{\frac{2x-2y}{2}} \\ &= \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \end{aligned}$$

Portanto, a resposta correta é a **alternativa D**.

02. (IME - 2003) Demonstre que

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

é um número inteiro múltiplo de 4.

Resolução:

Vamos escrever os radicais como a soma de radicais simples, começando por $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$.

Assumindo que o resultado seja da forma $a + b\sqrt{2}$, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} &= a + b\sqrt{2} \\ 20 + 14\sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a^3 + 3a^2b\sqrt{2} + 3a(b\sqrt{2})^2 + (b\sqrt{2})^3 \\ &= a^3 + 3a^2b\sqrt{2} + 3a \cdot 2b + b^3 \cdot (2\sqrt{2}) \\ &= (a^3 + 6ab) + (3a^2b + 2b^3)\sqrt{2} \end{aligned}$$

Comparando as partes racional e irracional, temos:

$$a^3 + 6ab = 20 \quad 3a^2b + 2b^3 = 14$$

Sabendo que a e b são inteiros e positivos, vamos testar diferentes valores de a na primeira equação:

- $a = 1$:

$$a^3 + 6ab = 20$$

$$1^3 + 6 \cdot 1 \cdot b = 20$$

$$6b = 19 \Rightarrow b = \frac{19}{6}$$

Não é o valor de a , pois b não é inteiro.

- $a = 2$:

$$a^3 + 6ab = 20$$

$$2^3 + 6 \cdot 2 \cdot b = 20 \Rightarrow 8 + 12b = 20$$

$$12b = 12 \Rightarrow b = 1$$

Verificando a segunda equação:

$$3a^2b + 2b^3 = 14$$

$$3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^3 = 12 + 2 = 14 \text{ (ok!)}$$

Os valores procurados são $a = 2$ e $b = 1$, portanto:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

O procedimento para $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ seria análogo, resultando em um sinal negativo entre os termos:

$$\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

Calculando a soma entre os termos:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \\ &= 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4 \end{aligned}$$

Logo, o número em questão é igual a 4, que é um número inteiro e múltiplo de 4, como queríamos demonstrar.

Exercícios

01. (CMBH - 2016) O valor da expressão $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ é:

- a) um múltiplo de 3.
- b) um número irracional.
- c) um múltiplo de 5.
- d) um quadrado perfeito.
- e) um número primo.

02. (ITA - 2005) Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:

- a) $x \in]0, 2[$.
- b) x é racional.
- c) $\sqrt{2}x$ é irracional.
- d) x^2 é irracional.
- e) $x \in]2, 3[$.

03. (EsFCEX - 2019) O número irracional $p = \sqrt{7 - \sqrt{24}}$ pode ser escrito sob a forma de radicais simples.

Considerando a afirmativa acima, avalie as asserções e a relação proposta entre elas.

I. O valor de p na forma de radicais simples é $\sqrt{6} - 1$.

II. Em algumas expressões com radicais duplos, a fatoração pode ser desenvolvida por meio de uma equivalência com a expressão $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

A respeito dessas asserções, assinale a alternativa correta.

a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa da I.

b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa da I.

c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

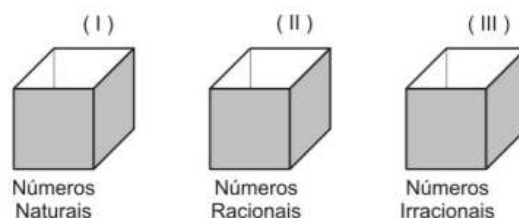
d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

e) As asserções I e II são proposições falsas.

04. (EPCAR - 2018) Sejam A e B os valores das expressões numéricas a seguir:

$$A = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}} \quad B = \frac{(0,00001)^2 \cdot (0,01)^{-3}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-1}}$$

Cada um desses valores pode ser colocado em uma das caixas a seguir, conforme a especificação de cada uma, a saber:



Dessa forma, podemos afirmar que uma combinação correta para os valores A e B e as caixas (I), (II) e (III) é, respectivamente:

a) A (II) e B (I)

b) A (I) e B (III)

c) A (III) e B (II)

d) A (I) e B (II)

05. (CN - 1990) O denominador da fração irredutível resultante da racionalização de

$$\frac{1}{6\sqrt{50-5\sqrt{75}}-\sqrt{128-16\sqrt{48}}}$$

é:

a) 11

b) 22

c) 33

d) 44

e) 55

06. (CN - 2011) O número real $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ é igual a:

a) $5 - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

c) $3 - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{13 - 3\sqrt{3}}$

e) 2

07. (CMRJ - 2007) Sendo

$$A = \sqrt{17 - 2\sqrt{30}} - \sqrt{17 + 2\sqrt{30}}$$

o valor de $(A + 2\sqrt{2})^{2007}$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

08. (EsPCEEx - 2017) O número real

$$\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}$$

pertence ao conjunto:

a) $[-5, -3)$

b) $[-3, -1)$

c) $[-1, 1)$

d) $[1, 3)$

e) $[3, 5)$

09. (CN - 2003) Se

$$a = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

e

$b = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$, então $a + b$ é igual a:

a) $\sqrt{10}$

b) 4

c) $2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{5} + 1$

e) $\sqrt{3} + 2$

10. (CN - 2004) Um aluno resolvendo uma questão de múltipla escolha chegou ao seguinte resultado

$\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}}$, no entanto as opções estavam em números decimais e pedia-se a mais próxima do valor encontrado para resultado, e, assim sendo, procurou simplificar esse resultado, a fim de melhor estimar a resposta. Percebendo que o radicando da raiz de índice 4 é quarta potência de uma soma de dois radicais simples, conclui, com maior facilidade, que a opção para a resposta foi:

a) 3,00

b) 3,05

- c) 3,15
- d) 3,25
- e) 3,35

GABARITO

- 1) E
- 2) B
- 3) B
- 4) D
- 5) B
- 6) B
- 7) A
- 8) D
- 9) D
- 10) C

Sistemas de Numeração e Sistemas Métricos

O sistema de numeração decimal é que permite a representação dos números e as suas operações, sendo a base para que possamos entender o sistema métrico e as suas conversões. O sistema métrico, por sua vez, permite a mensuração padronizada de unidades como comprimento, área, volume etc. Neste capítulo faremos uma revisão sobre o sistema de numeração utilizado nos dias atuais e veremos sobre o sistema de medida métrico, múltiplos e submúltiplos de uma medida e as conversões entre elas.

Sistemas de Numeração

Um sistema de numeração, ou sistema numeral, é um sistema em que um conjunto de números são representados por numerais de uma forma consistente.

Atualmente, o sistema de numeração utilizado por nós é o sistema de numeração decimal.

O sistema de numeração decimal é composto por símbolos, chamados de algarismos, são eles:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Sendo que cada algarismo pode representar um valor diferente dependendo da posição que ele ocupar.

Vejamos algumas propriedades importantes do sistema decimal:

1) Utilizando apenas os dez algarismos podemos escrever qualquer número natural, ou seja, todos os outros números são formados pela união desses algarismos, considerando a posição relativa de cada um deles.

Note que para cada posição, o número admite um valor.

Veja os exemplos:

No numeral 33, o primeiro 3 tem valor de 30 e o segundo equivale a 3, sendo o número formado pela soma de $30 + 3$.

No numeral 437, o 4 tem valor de 400 e o 3 equivale a 30 e o 7 representa o 7 mesmo, e o número é formado pela soma de $400 + 30 + 7$.

2) O sistema decimal é de base 10, uma vez que os agrupamentos são feitos de 10 em 10.

No caso dos exemplos anteriores, para o número 33, temos três grupos de 10 unidades e mais 3 unidades. E no número 437, temos quatro grupos de 100 unidades (100 unidades = 10 grupos de 10 unidades), três grupos de 10 unidades e mais 7 unidades.

3) O sistema decimal é multiplicativo, porque um algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vezes o valor posicional que teria se estivesse ocupando o lugar desse outro. Por exemplo, no número 33, o primeiro 3 tem valor de 30 e o segundo tem valor de 3.

Agora que revisamos sobre o sistema de numeração decimal, veremos sobre os sistemas de medidas, em que são um conjunto de unidades de medidas que mantêm algumas relações entre si. O sistema métrico é o mais conhecido e utilizado em todo o mundo.

Sistema Métrico

Imagine que você quer saber a distância até um parque e pergunta essa informação para Ana. Então, ela responde:

— A distância é 2.

Como assim a distância é 2? 2 o quê? 2 milímetros? 2 metros? 2 quilômetros? 2 jardas?

Perceba que não tem como você saber qual é a distância se a Ana responder só “2”. Por isso, a unidade de medida é muito importante.

Para medir distâncias podemos utilizar várias unidades de medida diferentes, como o milímetro, metro, quilômetro e jarda.

Agora, imagine que em vez da resposta anterior, a Ana respondesse:

— A distância é de 20000 pés de Ana.

Você também estranharia muito se ouvisse essa resposta, isso porque não estamos acostumados com a unidade de medida “pés de Ana”.

Que loucura seria se todos resolvessem medir as distâncias com o tamanho de seus pés! Todo mundo responderia algo diferente para a mesma distância!! Para consertar isso, surgiu o SI (Sistema Internacional de Unidades), que padroniza as unidades de medida. Então, agora ninguém mais vai usar uma unidade diferente da outra! No

SI, foi adotado o metro como unidade de comprimento padrão.

Já sabemos que a unidade de medida padrão do SI é o metro. Mas imagine se a Ana simplesmente seguisse esse padrão e respondesse:

— A distância é de 2000 metros.

Essa resposta continua estranha.

Precisaremos apresentar os múltiplos e submúltiplos para ajudar Ana.

Múltiplos e Submúltiplos

Os múltiplos do metro são as unidades várias vezes maiores que o metro. São usados para medir distâncias grandes. Os principais múltiplos são:

1 decâmetro = 10 metros

1 hectômetro = 100 metros

1 quilômetro = 1000 metros

Então, seria muito melhor se a Ana respondesse:

— A distância é de 2 quilômetros.

Ainda temos os submúltiplos, que são várias vezes menores que o metro. São usados para medir distâncias pequenas. Os principais são:

1 decímetro = $\frac{1}{10}$ de metro

1 centímetro = $\frac{1}{100}$ de metro

1 milímetro = $\frac{1}{1000}$ de metro

Todas essas unidades podem ser representadas por símbolos, como mostra a tabela a seguir:

Unidade	Sigla
milímetro	mm
centímetro	cm
decímetro	dm
metro	m
decâmetro	dam
hectômetro	hm
quilômetro	km

Conversão entre múltiplos e submúltiplos

Agora que sabemos tantas unidades, vamos aprender a transformar uma unidade em outra. Como exemplo, vamos converter um decâmetro em um hectômetro. Para isso, basta resolver a regra de três:

$$1 \text{ dam} : 10 \text{ m}$$

$$1 \text{ hm} : 100 \text{ m}$$

Com a multiplicação em cruz:

$$100 \cdot 1 \text{ dam} = 10 \cdot 1 \text{ hm}$$

$$1 \text{ hm} = 10 \text{ dam}$$

Com o mesmo raciocínio, é possível concluir que:

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$$

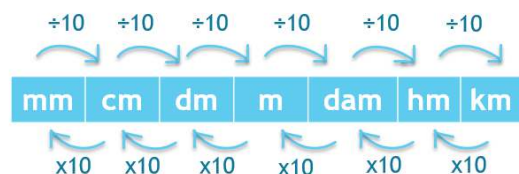
$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$$

$$1 \text{ dam} = 10 \text{ m}$$

$$1 \text{ hm} = 10 \text{ dam}$$

$$1 \text{ km} = 10 \text{ hm}$$

Note que, cada unidade vale sempre 10 vezes a unidade menor seguinte. Então, para a conversão entre duas unidades quaisquer, podemos usar o seguinte diagrama:



Para colocar em prática, vamos resolver alguns exemplos:

Exemplo 01. Converta 100 m em:

a) dm

b) dam

c) cm

d) hm

Resolução:

a) Pelo diagrama, de metro para decímetro, multiplicamos por 10.

$$100 \text{ m} = 100 \cdot 10 \text{ dm} = 1000 \text{ dm}$$

b) Pelo diagrama, de metro para decâmetro, dividimos por 10.

$$100 \text{ m} = \frac{100}{10} \text{ dam} = 10 \text{ dam}$$

c) Pelo diagrama, de metro para centímetro, multiplicamos por 10 duas vezes. Ou seja, multiplicamos por $10^2 = 100$.

$$100 \text{ m} = 100 \cdot 100 \text{ cm} = 10000 \text{ cm}$$

d) Pelo diagrama, de metro para hectômetro, dividimos por 10 duas vezes. Ou seja, dividimos por $10^2 = 100$.

$$100 \text{ m} = \frac{100}{100} \text{ hm} = 1 \text{ hm}$$

Exemplo 02. Converta 975000 mm em km.

Resolução:

Pelo diagrama, de mm para km, dividimos por 10 seis vezes. Ou seja, dividimos por 10^6 .

$$975000 \text{ mm} = \frac{97500}{10^6} \text{ km} = 0,975 \text{ km}$$

Exercícios Propostos

01. Converta 500 m em:

- a)** milímetros
- b)** centímetros
- c)** quilômetros

02. Converta para decâmetros:

- a)** 45 m
- b)** 2700 mm
- c)** 77 km
- d)** 160 hm
- e)** 0,003 cm

Conversão entre outras unidades

Algumas vezes, você vai precisar trabalhar com outras unidades, que não são o metro e seus múltiplos e submúltiplos, por exemplo: jarda,

polegada, léguas. Nesses casos, a conversão é feita com uma regra de três. Vamos resolver um exemplo para um melhor esclarecimento.

Exemplo 03. Sabendo que 1 yd (jarda) = 0,944 m, converta 2,832 m em yd.

Resolução:

Basta fazer a regra de três:

$$0,944 \text{ m} : 1 \text{ yd}$$

$$2,832 \text{ m} : x \text{ yd}$$

Multiplicando em cruz:

$$x \cdot 0,944 = 2,832 \cdot 1$$

$$x = 3$$

Portanto, 2,832 m é igual a 3 yd.

Exercício Proposto

03. Sabe-se que uma polegada equivale a 2,54 cm. Então, quantas polegadas correspondem a 0,02286 km?

Área e Volume

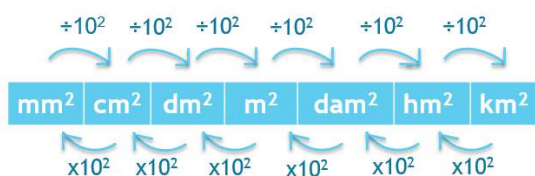
A partir de agora, vamos trabalhar com outras grandezas além de distância.

Começando pela área, sua unidade no Sistema Internacional é o metro quadrado (m^2).

Ela também possui seus múltiplos e submúltiplos, como mostra a tabela a seguir:

Unidade	Sigla
milímetro quadrado	mm ²
centímetro quadrado	cm ²
decímetro quadrado	dm ²
metro quadrado	m ²
decâmetro quadrado	dam ²
hectômetro quadrado	hm ²
quilômetro quadrado	km ²

A conversão entre seus múltiplos e submúltiplos pode ser feita com base no diagrama a seguir:



Note que, para as unidades de área, o padrão muda em relação ao comprimento. Neste caso, multiplicamos ou dividimos por 100.

Exemplo 04. Quantos hm² são 40.000.000 dm²?

Resolução:

Para a conversão, divide-se por 10² três vezes. Ou seja, divide-se por (10²)³ = 10⁶.

$$40.000.000 \text{ dm}^2 = \frac{40.000.000}{10^6} = 40 \text{ hm}^2$$

Exercícios Propostos

04. Converter para hectômetro quadrado:

a) 23 m²

b) 0,005 km²

c) 3450000 cm²

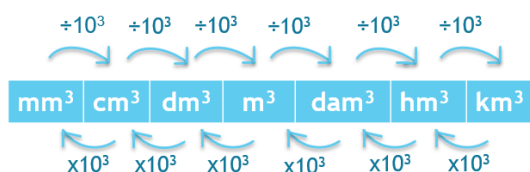
d) 0,045 dam²

Já para volumes, a unidade de medida no SI é o metro cúbico (m³). Seus múltiplos e submúltiplos são:

Unidade	Sigla
milímetro cúbico	mm ³
centímetro cúbico	cm ³
decímetro cúbico	dm ³
metro cúbico	m ³

decâmetro cúbico	dam^3
hectômetro cúbico	hm^3
quilômetro cúbico	km^3

Nas unidades de volume, há um novo padrão, cada unidade vale 1000 vezes a unidade menor seguinte. A conversão entre seus múltiplos e submúltiplos é feita como a seguir:



Observação: O decímetro cúbico (dm^3) também pode ser chamado de litro (l).

Exemplo 05. Converta 3 m^3 em litros.

Resolução:

Lembrando que $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$, para a conversão, multiplica-se o volume por 10^3 .

$$3 \text{ m}^3 = 3 \cdot 10^3 \text{ dm}^3$$

$$3000 \text{ dm}^3 = 3000 \text{ l}$$

Exercícios Propostos

05. Converta para litros:

- a) 1 m^3
- b) $0,00008 \text{ km}^3$
- c) 750000 mm^3

d) 66 dam^3

e) 13 cm^3

06. Converta 5 m^3 em:

a) km^3

b) hm^3

c) mm^3

d) dm^3

e) ml

f) dal

g) kl

07. Mostre que 1 cm^3 e 1 ml representam o mesmo volume.

Prefixos

Prefixos são “pedaços de palavras” que são acrescentadas antes de outra palavra. Não parece, mas nesse capítulo nós vimos vários prefixos. São eles:

mili-, centi-, deci-, deca-, hecto-, quilo-

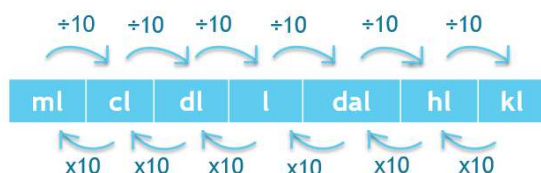
Os seus símbolos são, respectivamente:

m, c, d, da, h, k

Ao acrescentar esses prefixos em uma unidade de medida, podemos criar seus múltiplos e submúltiplos, assim como os do metro. Por exemplo, vamos criar os múltiplos e submúltiplos do litro:

Unidade	Sigla	Valor
mililitro	ml	$\frac{1}{1000}$ de litro
centilitro	cl	$\frac{1}{100}$ de litro
decilitro	dl	$\frac{1}{10}$ de litro
litro	l	1 litro
decalitro	dal	10 litros
hectolitro	hl	100 litros
quilolitro	kl	1000 litros

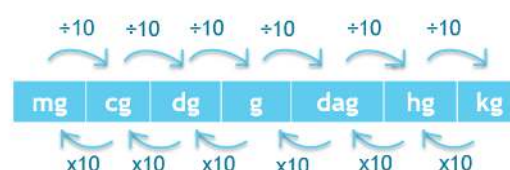
O aumento e a diminuição causados pelo sufixo sempre é o mesmo para todas as unidades. Então, a conversão entre esses múltiplos e submúltiplos é apresentado a seguir:



Vamos analisar outro exemplo, a unidade de massa grama (g).

Seus múltiplos e submúltiplos, assim como a conversão entre eles é apresentado a seguir:

Unidade	Sigla
miligrama	mg
centigrama	cg
decigrama	dg
grama	g
decagrama	dag
hectograma	hg
quilograma	kg



A unidade oficial de massa, no SI, é o quilograma. Ainda, $1000 \text{ kg} = 1 \text{ ton}$ (uma tonelada).

Tempo

As principais unidades de tempo que usamos no dia a dia possuem uma conversão diferente das que vimos até agora. Observe a seguir:

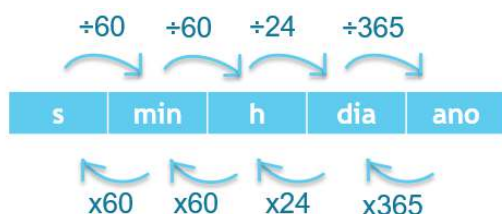
$$1 \text{ minuto (min)} = 60 \text{ segundos (s)}$$

$$1 \text{ hora (h)} = 60 \text{ minutos}$$

$$1 \text{ dia} = 24 \text{ horas}$$

$$1 \text{ ano} = 365 \text{ dias}$$

Então, para conversões de unidades de tempo, basta seguir o seguinte diagrama:



Exemplo 06. Quantos segundos tem:

a) um dia

b) um ano

Resolução:

a) Para converter um dia em segundos, basta multiplicar por $24 \times 60 \times 60$.

$$1 \text{ dia} = 1 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

b) Para converter um ano em segundos, basta pegar o resultado do item **a)** (equivalente a um dia) e multiplicar por 365

$$1 \text{ ano} = 365 \cdot 1 \text{ dia}$$

$$365 \cdot 86400 \text{ s} = 31.536.000 \text{ s}$$

Exercícios Propostos

08. Converta para minutos

a) 240 s

b) 5,25 h

c) 1 dia

d) 2 anos

e) 7200 s

09. Converta 1 ano bissexto em:

a) segundos

b) minutos

c) horas

d) dias

10. Converta 72 km/h em m/s.

Exercícios

01. (UERJ - 2018) Onça e libra são unidades de massa do sistema inglês. Sabe-se que 16 onças equivalem a uma libra e que 0,4 onças é igual a x libras. O valor de x é igual a:

- a) 0,0125
- b) 0,005
- c) 0,025
- d) 0,05

02. (ENEM - 2016) O ato de medir consiste em comparar duas grandezas de mesma espécie. Para medir comprimentos existem diversos sistemas de medidas. O pé, a polegada e a jarda, por exemplo, são unidades de comprimento utilizadas no Reino Unido e nos Estados Unidos. Um pé corresponde a $\frac{1200}{3937}$ metros ou doze polegadas, e três pés são uma jarda.

Uma haste com 3 jardas, 2 pés e 6 polegadas tem comprimento, em metro, mais próximo de:

- a) 1,0
- b) 3,5
- c) 10,0
- d) 22,9
- e) 25,3

03. (CM Manaus - 2010) Um avião fez o percurso entre Belém-PA e Brasília-DF em 2 horas, 22 min e 35 segundos. Se ele chegou a Brasília às 10 horas da manhã, o seu horário de partida de Belém foi:

- a) 6 horas, 38 minutos e 35 segundos.
- b) 6 horas, 37 minutos e 25 segundos.

- c) 7 horas, 38 minutos e 35 segundos.
- d) 7 horas, 22 minutos e 25 segundos.
- e) 7 horas, 37 minutos e 25 segundos.

04. (EPCAR - 2013) Analise as proposições abaixo.

I) Uma jarra cheia de leite pesa 235 dag; com $\frac{3}{4}$ de leite a jarra pesa 19,5 hg. O peso da jarra com $\frac{5}{8}$ de leite é y gramas

II) Com $\frac{3}{4}$ de $0,6$ da metade de 1 lata que comporta 20 L de tinta, um pintor consegue pintar uma área de 16 m². Para pintar uma área 25% menor, são necessários 0,003 m³ de tinta.

III) Um pedreiro prepara uma mistura com 1 kg de cimento e 600 ml de água. Em seguida, ele aumenta em 50% a quantidade de cimento e mexe até ficar homogênea a mistura, obtendo 1800 ml dessa mistura. Se a densidade da água é 1g/ml, então a densidade do cimento é igual a 1,25 kg/l.

Tem-se que:

- a) apenas I é verdadeira
- b) apenas I e II são falsas
- c) apenas II é falsa
- d) I, II e III são verdadeiras

05. (EPCAR - 2023) Antes de falecer, o Senhor Antônio deixou em seu testamento a divisão de sua fazenda para seus quatro filhos. Depois da morte do Senhor Antonio, ao abrir o testamento, os filhos se depararam com o seguinte documento:



A fazenda tem o formato retangular e os quatro lotes A, B, C e D também são retangulares. Se as marcações deixadas no testamento pelo Senhor Antônio forem respeitadas, então a área x destinada ao filho Damião, é igual a:

- a) 192 dam²
- b) 2,04 hm²
- c) 21600 m²
- d) 0,0228 km²

06. (EPCAR - 2011) Um reservatório d'água na forma de um paralelepípedo reto de base quadrada e cuja altura é metade do lado da base, está com 80% de sua capacidade máxima ocupada. Se fosse preciso acabar de encher esse reservatório seriam necessários 500 baldes iguais cheios d'água com capacidade de 12800 ml cada. Com base nesses dados, é correto afirmar que a altura da água que há neste reservatório:

- a) é exatamente 15 dm
- b) é exatamente 1600 mm

- c) NÃO passa de 145 cm
- d) está a 0,5 m de atingir seu máximo

07. (UFRGS - 2017) Na última década do século XX, a perda de gelo de uma das maiores geleiras do hemisfério norte foi estimada em 96 km³. Se 1 cm³ de gelo tem massa de 0,92 g, a massa de 96 km³ de gelo, em quilogramas, é

- a) $8,832 \cdot 10^{12}$
- b) $8,832 \cdot 10^{13}$
- c) $8,832 \cdot 10^{14}$
- d) $8,832 \cdot 10^{15}$
- e) $8,832 \cdot 10^{16}$

08. (EPCAR - 2010) A "Avenida Euclidiana", retilínea, tem 190 m de comprimento e 0,5 dam de largura em toda a sua extensão. Para asfaltá-la, são necessários 380 kg de asfalto.

Pretende-se asfaltar a "Avenida Pitagórica", também retilínea, cuja largura é 100 cm maior que a largura da "Avenida Euclidiana", onde será necessário utilizar 930 kg do mesmo asfalto (mesma espessura).

Se o comprimento da "Avenida Pitagórica" é x dm, então, a soma dos algarismos de x é igual a:

- a) 22
- b) 23
- c) 24
- d) 25

09. (UEMA - 2022) O cultivo do solo é essencial para a prática da agricultura como forma de produção de alimentos. Existem, no Brasil, cooperativas que promovem

agricultura familiar e economia solidária com papel fundamental na vida de milhares de famílias. Por meio do incentivo e da valorização, muitos agricultores familiares conseguem alavancar suas produções. Uma das formas de medidas das terras de plantações é a unidade hectare.

Considere uma família que fez um plantio de 15 hectares de terras para o cultivo de bananas. Nessas condições, a medida, em quilômetros quadrados, corresponde a:

- a) $10 \cdot 10^4$
- b) $15 \cdot 10^{-2}$
- c) $15 \cdot 10^{-4}$
- d) $15 \cdot 10^{-1}$

10. (ENEM - 2022) Ao escutar a notícia de que um filme recém-lançado arrecadou, no primeiro mês de lançamento, R\$ 1,35 bilhão em bilheteria, um estudante escreveu corretamente o número que representa essa quantia, com todos os seus algarismos.

O número escrito pelo estudante foi:

- a) 135 000,00
- b) 1 350 000,00
- c) 13 500 000,00
- d) 135 000 000,00
- e) 1 350 000 000,00

GABARITO

- 1) C
- 2) B
- 3) E
- 4) D
- 5) C
- 6) B
- 7) B
- 8) B
- 9) B
- 10) E