



APOSTILA DE MATEMÁTICA

APOIO:



**PREFEITURA
SÃO JOSÉ DOS CAMPOS**

Sumário

Apostila de Matemática

1. Prefácio.....	2
2. Conjuntos numéricos.....	6
3. Expressões numéricas.....	9
4. Operação com números decimais.....	14
5. Múltiplos e divisores.....	17
6. Decomposição em Fatores Primos.....	20
7. MDC e MMC.....	23
8. Frações.....	27
9. Razão e Proporção.....	34
10. Grandezas Proporcionais.....	42
11. Regra de 3.....	45
12. Porcentagem.....	52
13. Cálculo Algébrico.....	58
14. Fatoração e Produtos notáveis.....	63
15. Potenciação.....	67
16. Radiciação.....	73
17. Racionalização.....	79
18. Equações do 1º grau.....	84
19. Sistemas do 1º grau.....	92
20. Equações do 2º grau.....	96
21. Inequações do 1º grau.....	106
22. Juros simples e Juros compostos.....	109
23. Ângulos.....	114
24. Triângulos e quadriláteros.....	122
25. Teorema de Pitágoras.....	132
26. Semelhança e Teorema de Tales.....	136
27. Trigonometria Básica.....	143
28. Polígonos.....	156
29. Introdução à circunferência.....	162
30. Calculando volumes.....	168

Olá caro(a) estudante,

Primeiramente, parabéns por sua aprovação no CASD. Você passou por um processo seletivo bastante difícil e foi vitorioso. Contudo, esse é o primeiro passo para a conquista de um sonho que, tenha certeza, está mais próximo do que você possa imaginar. Por isso, vamos iniciar juntos essa jornada até a sua mão ser eternizada nas paredes do CASD!



Como ponto de partida, o curso de Nivelamento busca, como o próprio nome diz, levar todos e todas para um nível em comum. Contudo, não pense que esse momento será apenas para ensinar assuntos “fáceis”. Vocês verão que o nível de dificuldade crescerá gradativamente. E mesmo os assuntos mais fundamentais serão abordados de forma mais formal e madura.

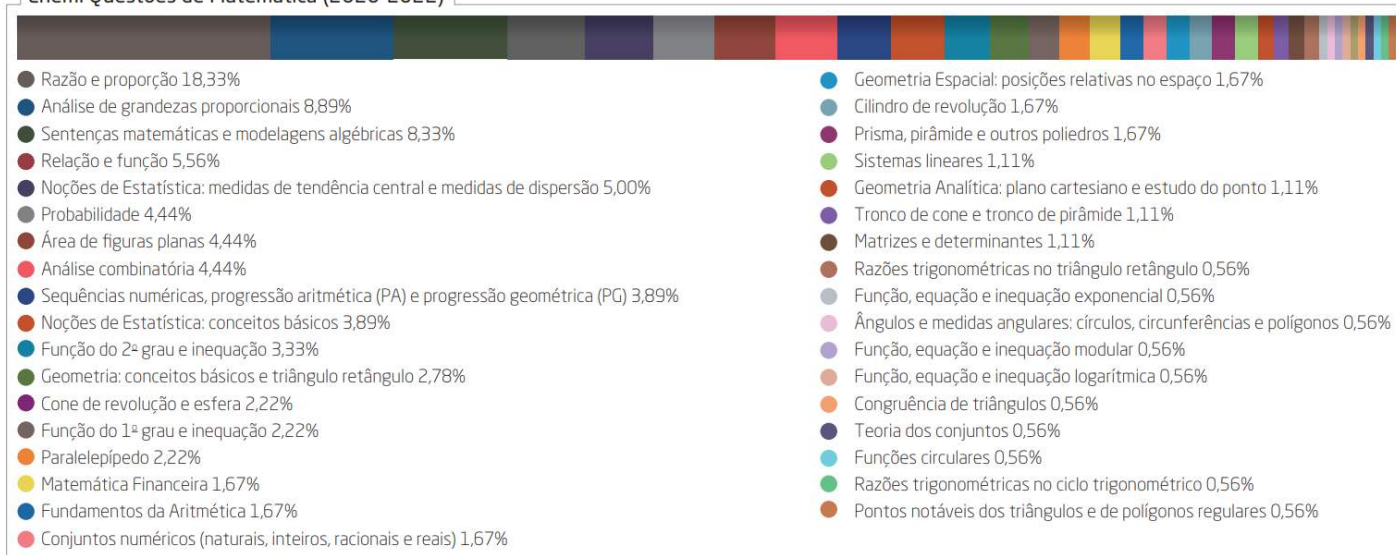
Essa passagem pelo “básico” tem como objetivo principal garantir que os conceitos mais fundamentais estejam bem consolidados, pois isso facilitará muito quando assuntos mais complexos forem eventualmente ministrados.

Como diz o ditado chinês: 博拉卡斯德. Traduzindo para vocês: *um prédio não se sustenta sem uma base consolidada*. E digo mais: é no “básico” onde mora grande parte das questões dos próprios vestibulares.

Veja, por exemplo, a análise estatística abaixo. Ela mostra a porcentagem de questões que caíram no ENEM nos últimos anos. Os três assuntos mais recorrentes somam 35,55% das questões. Como a prova do ENEM tem 45 questões por área, essa porcentagem representa cerca de 16 questões. E o mais interessante? Esses três assuntos são diretamente abordados no curso de Nivelamento!

Estatística do mapa de conteúdos

Enem: Questões de Matemática (2020-2022)



Fonte: Elaborado pelo Poliedro Sistema de Ensino com base nas provas do Enem dos anos de 2020 a 2022.

Além disso, em outros vestibulares, como FUVEST, UNICAMP e UNESP, ainda que a incidência direta desses temas seja menor, eles exigem que essa base que tanto falo esteja extremamente sólida. Por isso, valorize este momento inicial e, além disso, aproveite para começar a desenvolver sua estratégia de estudo.

A rotina de estudos de um vestibulando é como uma maratona. No início, pode parecer que há bastante tempo até a prova, mas, conforme o ano avança, a carga de conteúdo e o ritmo de revisões aumentam significativamente. No início do ano, pode parecer que dedicar muito tempo a matérias básicas ou revisar conteúdos simples não é tão importante. No entanto, construir bons hábitos e estratégias agora será o que garantirá sua constância quando o tempo estiver mais escasso e a pressão maior.

Por isso, aqui vão algumas dicas gerais para ajudá-lo nesse processo:



Conheça o Albertinho, mascote do CASD (olha como é fofo 🥰)

DICAS DE ESTUDOS

Durante as aulas

- ❖ Você precisa de três itens essenciais: **Anotação, caderno e apostila**
- ❖ Copiar auxilia no aprendizado, na memorização e a manter a concentração (ou seja, não dormir rs). Além disso, ajuda para as provas dissertativas.
- ❖ Sempre traga a apostila do dia!
- ❖ Evite tirar fotos da lousa ou copiar cadernos de colegas. É o ato de escrever que fixa o conteúdo.
- ❖ Capriche, mas sem exageros. Todo mundo ama aquele caderno cheio de Lettering e canetas coloridas, mas lembre-se sempre do equilíbrio.
- ❖ Seu caderno será um guia resumido dos principais pontos do ano. Por isso, tente ao máximo criar esse bom costume.

Plano de Estudos

- ❖ Ajuste seu cronograma conforme sua rotina, considerando deslocamentos, refeições e descanso.
- ❖ Tentar alocar um tempo mínimo por semana por professor. Exemplo: 1 hora por professor, por semana.
- ❖ Alguns precisam de menos tempo: pule para o próximo. O que sobrar de tempo vai para matérias que demandam mais. Intercale matérias!
- ❖ Estude a matéria dada antes de rever o professor, mas não precisa ser no mesmo dia.
- ❖ Toda semana recomeça do zero (não fique pensando muito lá na frente) - metas semanais e se precisar, metas diárias.

Como e onde estudar?

- ❖ Escolha um local calmo, como sua casa ou a escola, e mantenha o ambiente organizado.
- ❖ Comece pelas anotações e folhas de apoio antes de avançar para exercícios, em ordem crescente de dificuldade.
- ❖ Use livros apenas para complementar informações ou tirar dúvidas.
- ❖ Matéria atrasada? Apenas quando passar mais de uma semana sem estudar o conteúdo de um professor.
- ❖ Lembre-se: se você não fez todos os exercícios para casa, não está necessariamente com matéria atrasada. Às vezes não é necessário fazer tudo para entender o conteúdo (que é o principal).

Erros comuns para evitar

- ❖ Evite distrações desnecessárias. Coloque o celular no modo avião enquanto estuda.
- ❖ Não passe tempo excessivo em uma única matéria. Saiba a hora de parar e mudar de foco.
- ❖ Não foque apenas no que gosta ou no que tem dificuldade. O segredo é o equilíbrio.
- ❖ Professores diferentes podem exigir diferentes volumes de tarefas. Lembre-se de priorizar suas necessidades gerais, não apenas as individuais de cada disciplina.
- ❖ Cuidado com excessos. Sabemos o quão complicado pode se tornar manter uma rotina saudável com um cursinho (+vida pessoal). Mas sempre mantenha em mente: **equilíbrio**. Por exemplo, dormir 4 horas por dia pode dar uma sensação de evolução a curto prazo, mas quanto tempo esse ritmo se manterá?

Simulados

- ❖ É uma etapa essencial para uma evolução rápida. Teremos um momento para falar só dele, mas desde já, mantenha em mente sua importância!
- ❖ Será aos sábados de tarde.

Algumas dicas pontuais

- ❖ Exatas: Não desista diante de dificuldades iniciais. Pratique! Faça muitos exercícios, e estabeleça um tempo-limite (mínimo de 3 minutos e máximo de 10 por questão).
- ❖ Evite perder tempo criando resumos extensos ou "passando a limpo" o caderno. Seja objetivo.
- ❖ Cursos extras: podem não ser a escolha mais eficiente (Curso de Youtube, por exemplo). Podem gerar um excesso de informação e apenas causar mais confusão.
- ❖ Se precisar de ajuda, peça orientação para nossa equipe ou colegas mais experientes.

Esta é uma jornada de crescimento pessoal e acadêmico. Muitos erros serão cometidos, e isso é completamente normal. Qualquer um que passou por algum período de cursinho irá listar uma série de atitudes que eles teriam feito diferente. Mas lembre-se, a rotina perfeita não existe, e nem é necessário que exista para que o sucesso no vestibular chegue.

Por isso, tome essas dicas como apenas um direcionamento, pois no final das contas a construção dessa rotina de estudos própria para você depende, claro, de você. Pode parecer óbvio, mas mantenha em mente que o **autoconhecimento** é a peça chave que move todos esses fundamentos apresentados acima.

Esperamos que tenhamos um ótimo ano juntos!

Bora CASDVest 🧡💙🧡💙

Conjuntos Numéricos

A finalidade deste capítulo é apresentar um pouco sobre os vários conjuntos numéricos, suas características e simbologias. Ao final do capítulo, o leitor será capaz de:

- Conseguir determinar de qual conjunto pertence um elemento
- Entender conceitos de união, intersecção entre conjuntos.

Conjuntos Numéricos

O estudo dos conjuntos numéricos é de fundamental importância haja vista que nos assuntos posteriores não será explicado as características dos conjuntos com o qual estão trabalhando. Mas antes da gente te ensinar sobre eles, é importante ter em mente que os conjuntos são divididos por **semelhança** entre os números presentes neles. Por exemplo, se eu digo que o grupo A tem apenas números positivos, o número -1 não pode estar dentro desse grupo A, mas os números 3 e 4 sim, entendeu?

Os conjuntos numéricos a serem explanados serão:

→ Números naturais(N)

- ✓ São os números positivos
- ✓ 1, 2, 3, 4, 5....

→ Números inteiros(Z)

- ✓ São os números naturais + os negativos
- ✓ ...-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4....

→ Números Racionais(Q)

- ✓ Aqui estão incluídos os inteiros + os decimais infinitos e PERIÓDICOS (Quando a parte decimal se repete)
- ✓ 0,333333333
- ✓ ...-1, -1/2, 0, 1,2, 3/2
- ✓ Podem ser expressos em forma de fração (uma razão)

→ Números Irracionais(I)

- ✓ Aqui estão os números que não são racionais, ou seja, os

decimais infinitos e não periódicos

- ✓ 3,213232....
- ✓ $\sqrt{2} = 1,41421356....$
- ✓ $\pi = 3,141592....$
- ✓ **Não** podem ser expressos em forma de fração.

→ Números Reais(R)

- ✓ Pode ser qualquer um dos números que vimos até agora

Para facilitar a visualização de como um conjunto contém os outros, segue a figura 1.

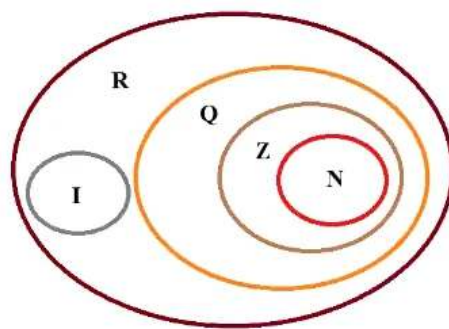


Figura 1: Conjuntos Numéricos trabalhados (Fonte: todamateria.com.br).

Simbologias Importantes

É super importante a gente ter a noção de alguns símbolos utilizados com frequência, sendo eles:

- $\in$ = Pertence
- $\notin$ = Não Pertence
- $\emptyset$ = Vazio
- $A \subset B$ = A está contido em B
- $A \supset B$ = A contém B
- $\forall$ = Para todo
- $A \cup B$ = A união B (O que A **ou** B têm em comum)
- $A \cap B$ = A intersecção B (O que A **e** B têm em comum)

Exemplo

Seja $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4,7,8\}$. Determine $C = A \cap B$ e $D = A \cup B$.
 $C = \{2,4\}$

$$D = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$

Intervalos Numéricos

Essa parte é muito importante, ela está presente em vários outros assuntos da matemática. Basicamente é sobre o intervalo em que um número pode estar. Tá meio vago? Vem com a gente. Imagina que eu digo que um número inteiro está **entre** 2 e 5. Você concorda que ele só pode ser 2, 3, 4, 5? Se ele fosse 6, ele não atenderia ao pré-requisito que eu estabeleci de estar entre 2 e 5. A maneira correta de expressar isso é assim:

$$\rightarrow x \in \mathbb{Z} / 2 \leq x \leq 5$$

Traduzindo para o português:

$\rightarrow$ x pertence aos inteiros TAL QUE x está entre 2 e 5, ou seja, o conjunto {2, 3, 4, 5}.

Para Saber Mais

1. Números Complexos

$\rightarrow$ Além dos conjuntos apresentados até aqui, existem também os números complexos, que são, não se assustem, raízes de números negativos!

$\rightarrow$ O que é um número complexo?

$$\checkmark i = \sqrt{-1}$$

Logo, a equação

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i$$

$\rightarrow$ Você se lembra dos números irracionais? Os números complexos são representados de forma semelhante.

$$\checkmark N = a + bi$$

$\checkmark$ a = parte real do número N

$\checkmark$ b = parte imaginária do número N

Levando-se em conta a existência desse conjunto mais geral que os números reais, temos a seguinte representação:

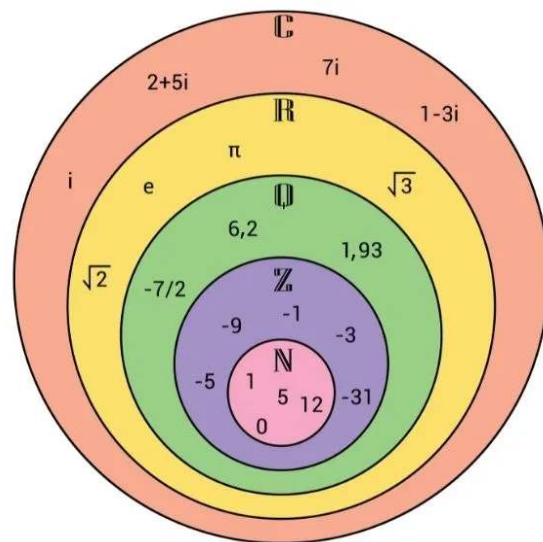


Figura 2: Conjuntos Numéricos completo (Fonte: <https://www.preparaenem.com/matematica/conjuntos-numericos-suas-operacoes.htm>).

Exercícios

Fixação

- Responda se o número é racional ou irracional
 - $\sqrt{2}$
 - $\frac{2}{3}$
 - $\sqrt{9}$
- Se $x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 3$, Quais são os possíveis valores de x?
- Seja $A = \{3, 4, 6\}$ e $B = \{5, 7, 8\}$, Qual são os conjuntos $C = A \cap B$ e $D = A \cup B$?

De Olho no Vestibular

- (CEFET - CE) É unitário o conjunto:
 - $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 1\}$
 - $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 0\}$
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$
 - $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$
 - $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < 2x < 4\}$
- (UFOP - MG) A respeito dos números $a = 0,499999...$ e $b = 0,5$, é correto afirmar:

- a) $b = a + 0,011111$
b) $a = b$
c) a é irracional e b é racional
d) $a < b$
(DICA: Lembre-se de dízimas periódicas e não periódicas.)

3. (UEL - PR) Observe os seguintes números:

I. 2,212121...

II. 3,212223...

III. $\pi/5$

IV. 3,1416

V. $\sqrt{-4}$

Assinale a alternativa que identifica os números irracionais:

- a) I e II.
b) I e IV.
c) II e III.
d) II e V.
e) III e V.
4. (IFAL - 2019) Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ e o conjunto $B = \{3,4,5,6,7\}$. O conjunto que representa $A \cap B$ será dado por:
- a) $\{1,2,3\}$
b) $\{1,2,3,4,5\}$
c) $\{3,4,5\}$
d) $\{1,2,6,7\}$
e) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

Gabarito

Fixação

1. irracional, racional, racional
2. $\{-1,0,1,2,3\}$
3. $C = \emptyset$ (conjunto vazio)
 $D = \{3,4,5,6,7,8\}$

De Olho no Vestibular

1	2	3	4		
E	B	C	C		

Referências Bibliográficas

[1] Conjuntos Numéricos em: <https://www.todamateria.com.br/conjuntos-numericos/>. Acesso em: 19 Julho. 2023.

[2] Conjuntos Numéricos em . Disponível em: <https://blogdoenem.com.br/conjuntos-numericos/>. Acesso em: 19 Julho. 2023.

Expressão numérica

Não despreze esse assunto. Esta matéria é muito recorrente na prova do ENEM, por exemplo! Ao longo deste capítulo você vai aprender:

- Quais operações são comutativas;
- Qual ordem seguir quando tenho muitas operações diferentes.

Adição

Imaginemos que Hellen está fazendo compras no shopping Vale Sul e resolveu somar mentalmente seus gastos. Assim, ela realizou a seguinte operação:

$$R\$ 18,00 + R\$ 40,00 + R\$ 32,00 = R\$ 90,00$$

- A operação realizada chama-se **adição**
- Os números 18, 40 e 32 são as **parcelas**
- O resultado 90 é chamado **soma**

Agora vamos realizar a mesma operação, trocando a ordem das duas primeiras parcelas:

$$40 + 18 + 32 = 90$$

Como podemos perceber, encontramos o mesmo resultado, essa é a propriedade comutativa da adição e pode ser enunciada da seguinte maneira:

A ordem das parcelas não altera a soma

Agora, na adição anterior, vamos associar as duas últimas parcelas antes de somar:

$$\begin{aligned} 40 + 18 + 32 &= \\ &= 40 + (18 + 32) = \\ &= 40 + 50 = 90 \end{aligned}$$

Também encontramos o mesmo resultado, essa é a propriedade associativa da adição, que podemos enunciar:

Na adição de três ou mais números naturais, a soma não depende do modo como as parcelas são associadas para efetuar o cálculo

Veja como poderia ser feita, de outra maneira, a adição do exemplo anterior:

$$18 + 40 + 32 =$$

Somar as duas primeiras parcelas

$$= (18 + 40) + 32 =$$

Decompor a última parcela

$$= 58 + (30 + 2) =$$

Trocar a ordem das duas últimas parcelas

$$= (58 + 2) + 30 =$$

Associar as duas primeiras parcelas e somar.

$$= 60 + 30 = 90$$

A prática da decomposição é muito útil na hora que efetuamos a adição de números maiores, pois, como pudemos ver no exemplo acima, ela nos permite chegar em somas aparentemente mais “fáceis” de se fazer mentalmente.

Subtração

Hellen continuou a comprar e para pagar um sapato de R\$ 37,00, entregou uma cédula de R\$ 50,00 para a vendedora. Quanto ela receberá de troco?

Para responder essa pergunta, efetuamos a seguinte operação:

$$R\$ 50,00 - R\$ 37,00 = R\$ 13,00$$

- A operação realizada chama-se **subtração**
- O primeiro termo 50 é o **minuendo**
- O segundo termo 37 é o **subtraendo**
- O resultado 13 é chamado **resto** ou **diferença**

Ao receber seu troco, para conferir se estava correto, Hellen realizou uma adição, veja:

$$R\$ 13,00 + R\$ 37,00 = R\$ 50,00$$

Observe que a diferença é o número que devemos somar ao subtraendo para obter o minuendo. Daí, podemos escrever a relação fundamental da subtração:

minuendo - subtraendo = diferença

diferença + subtraendo = minuendo

Assim, para verificar se uma subtração está correta, podemos fazer uma adição. Por isso, dizemos que a adição e a subtração são operações inversas.

Multiplicação

Numa partida de futsal contra o time de Caçapava, o time de São José dos Campos havia feito 2x0 com sete minutos de jogo.

No intervalo, a quantidade de gols da água já havia duplicado.

Ao fim do jogo, São José havia marcado o triplo de gols em relação ao placar do intervalo. Quantos gols São José fez nesse jogo?

Para responder essa pergunta, efetuamos a seguinte operação:

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

- A operação realizada chama-se **multiplicação**
- Os números 2, 2 e 3 são os **fatores**
- O resultado 12 é chamado **produto**

Observação:

Outro símbolo utilizado para multiplicação de dois números é o "x". Todavia, em expressões, para evitar uma possível confusão com a variável x, opta-se pela utilização do ".".

Agora, vamos realizar a mesma operação, trocando a ordem dos dois últimos fatores:

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

Como podemos perceber, encontramos o mesmo resultado, essa é a propriedade comutativa da multiplicação. Enunciada da seguinte maneira:

A ordem dos fatores não altera o produto

Agora, na multiplicação anterior, vamos associar as duas últimas parcelas antes de multiplicar:

$$2 \times 3 \times 2 = 2 \times (3 \times 2) = 2 \times 6 = 12$$

Também encontramos o mesmo resultado, essa é a propriedade associativa da multiplicação, que podemos enunciar:

O produto não depende do modo como os fatores são associados para efetuar o cálculo

Observação:

Divisão, Potenciação e Radiciação são outras operações básicas da Matemática que serão estudadas em detalhe nos próximos capítulos.

Elementos Neutros:

Um número é dito elemento neutro para uma operação se ele não modifica qualquer outro número pela ação dessa operação.

No caso da adição e da subtração, o elemento neutro é o zero. Isso significa que, se adicionarmos ou subtraírmos zero de qualquer número natural, o resultado da operação é o próprio número.

Exemplos:

- $7 + 0 = 7$
- $0 + 9 = 9$
- $5 - 0 = 5$

Na multiplicação, o elemento neutro é o um.

Exemplos:

- $2 \times 1 = 2$
- $1 \times 3 = 3$

Propriedade Distributiva:

Para obter o produto de um número natural por uma soma (ou diferença) de números naturais, podemos multiplicar esse número pelos termos da soma (ou diferença) e adicionar (ou subtrair) os resultados obtidos.

Essa é a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (ou subtração).

Podemos representar essa propriedade simbolicamente. Sendo a , b e c números naturais, podemos escrever:

- ✓ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- ✓ $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Exemplos:

- $8 \cdot (3 + 4) = 8 \cdot 7 = 56$
- $8 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 56$

Expressão numérica

Além das propriedades das operações que vimos até aqui, é preciso conhecer as regras adequadas para a resolução de expressões numéricas.

Expressão numérica é uma expressão que envolve números e operações.

Efetuada as operações de uma expressão numérica, obtemos um único número, denominado valor da expressão numérica.

No cálculo de uma expressão numérica, as operações indicadas devem ser efetuadas na seguinte ordem:

- 1º) multiplicações e divisões;**
- 2º) adições e subtrações.**

Exemplos:

- $7 + 5 \cdot 3 = 7 + 15 = 22$
- $98 - 12 \cdot 3 = 98 - 36 = 62$

Se, em uma mesma expressão numérica, houver multiplicação e divisão (ou adição e subtração) adjacentes, devemos efetuar as operações na ordem em que aparecem.

Exemplos:

- $15 + 12 - 10 = 27 - 10 = 17$
- $98 - 12 \cdot 3 + \frac{36}{3} = 98 - 36 + \frac{36}{3} = 98 - 36 + 12 = 62 + 12 = 74$

Se tentarmos calcular essa expressão de outra maneira, o resultado poderá ser diferente. Por isso é necessário estabelecer uma ordem para calcular a expressão.

Para que isso aconteça, em algumas expressões aparecem sinais de associação. Os sinais de associação utilizados em Matemática são os parênteses (), os colchetes [] e as chaves { }.

As operações devem ser resolvidas nesta ordem:

1º) a expressão contida nos parênteses ().

2º) a expressão contida nos colchetes [].

3º) a expressão contida nas chaves { }.

Exemplos:

- $5 + \frac{(12+3)}{3} = 5 + \frac{15}{3} = 10$
- $\frac{[(11+12) \cdot 3 - 9]}{15} = \frac{[23 \cdot 3 - 9]}{15} = \frac{[69 - 9]}{15} = \frac{60}{15} = 4$
- $\frac{\{15 - [2 \cdot (9 - 3)]\}}{3} = \frac{\{15 - [2 \cdot 6]\}}{3} = \frac{\{15 - 12\}}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Em caso de ocorrerem expressões numéricas que apresentem operações de potenciação ou radiciação, essas deverão ser efetuadas antes da multiplicação e da divisão. Veja um exemplo:

$$(5^2 \times 6 \times 2^2) \times 3 = (25 \times 6 \times 4) \times 3$$

$$(25 \times 24) \times 3 = 600 \times 3 = 1800$$

Exercícios

Fixação

1. Quando Laerte nasceu, o pai dele tinha 28 anos. Atualmente, Laerte tem 18 anos. Determine a soma das idades de Laerte e de seu pai hoje.
2. Em uma subtração,
 - a. o minuendo é 789 e o subtraendo é 498. Determine o resto.
 - b. o subtraendo é 4738 e o resto é 149. Determine o minuendo.
 - c. o minuendo é 1001 e o resto é 956. Determine o subtraendo.
3. Sabendo que $a \cdot b = 60$, responda:
 - a. Qual o valor de $b \cdot a$? Por quê?
 - b. Qual o valor de $1 \cdot a \cdot b$? Por quê?
 - c. Qual o valor de $a \cdot (b \cdot 5)$? Por quê?

4. De acordo com a sentença abaixo, escreva uma expressão e determine o seu valor: "Somei 127 com 356 e subtraí o resultado de 1000".

5. Sérgio pensou em um número. A seguir, adicionou 10 ao número. Depois, subtraiu 13 do resultado anterior, obtendo 12. Em que número Sérgio pensou?

6. Calcule o valor da expressão:
 $27 + 18 - 3 \cdot 10$

7. Calcule o valor da expressão:
 $13 - 3 \cdot 4 + \frac{14}{2}$

8. Calcule o valor da expressão:
 $12 + \frac{20-8}{4} - 3 \cdot \frac{444}{444}$

9. Calcule o valor da expressão:
 $3 \cdot (7 - 4) + 2 \cdot (5 + 2)$

10. Calcule o valor da expressão:
 $11 + \frac{4 \cdot (2+3)}{2}$

11. Calcule o valor da expressão:
 $123 - \frac{30 - (5 \cdot 4 - 2)}{2}$

12. Calcule o valor da expressão:

$$25 - [37 - (15 + 12) + 2 \cdot (3 + 2)]$$

13. Calcule o valor da expressão:

$$55 + 2 \cdot \left[12 + 3 \cdot (2 + 6) + \frac{19}{7 - 2 \cdot (2 + 1)} \right]$$

14. Calcule o valor da expressão:

$$71 - \{58 - [44 - (29 - 14)]\}$$

15. Calcule o valor da expressão:

$$45 + 2 \cdot \{35 + 3 \cdot [25 + 4 \cdot (15 - 5) - 6] - 7\} - 8$$

16. Calcule o valor da expressão:

$$27 - \left\{ 49 + \frac{3 \cdot [2 + 2 \cdot (4 + 5)]}{5 \cdot [5 - (9 - 5) + 2]} + 2 \cdot [4 - (34 - 25) + 10] \right\}$$

17. Coloque parênteses nas expressões, de modo a obter os resultados indicados:

a. $72 + 60 \div 12 - 8 = 87$

b. $10 - 2 \cdot 3 + 1 = 25$

c. $9 - 3 - 2 \cdot 6 - 3 = 21$

De Olho no Vestibular

18. Durante o planejamento de uma viagem de negócios, um empresário fez cotações de preços com cinco companhias aéreas, representadas por A, B, C, D e E. Sabe-se que, tanto para a ida como para a volta, ele deseja adquirir a passagem, a marcação antecipada do assento, o direito para despachar duas bagagens e um kit de lanches. A tabela apresenta, para cada companhia aérea, o preço cobrado pela passagem, pela marcação do assento, pelo despacho de uma bagagem e pelo kit de lanches.

Companhia	Passagem (R\$)	Assento (R\$)	Bagagem (R\$)	Lanches (R\$)
A	450	30	60	15
B	400	35	75	20
C	450	35	50	15
D	500	30	40	10
E	425	25	60	25

Considere que os preços indicados na tabela são diretamente proporcionais ao número de unidades contratadas dos respectivos serviços. Além disso, considere que as cinco companhias aéreas analisadas atendem os seus passageiros com padrões de qualidade similares. Com base nessas informações, a companhia aérea mais vantajosa financeiramente para o empresário é a

- A.
- B.
- C.
- D.
- E.

19. Uma pessoa chega ao hotel no qual fez uma pré-reserva com diária no valor de R\$ 210,00. Como a confirmação da reserva não foi feita, quando chegou ao hotel não havia quarto disponível. Dessa forma, o recepcionista apresentou-lhe algumas opções de hotéis com diárias mais baratas, mas localizados a certa distância desse hotel, conforme apresentado.

H1: diária de R\$ 180,00 e distância de 7 km;

H2: diária de R\$ 200,00 e distância de 1,6 km;

H3: diária de R\$ 199,00 e distância de 4,5 km;

H4: diária de R\$ 190,00 e distância de 1,5 km;

H5: diária de R\$ 205,00 e distância de 1,2 km.

Para se locomover até um outro hotel, essa pessoa utiliza um táxi que cobra R\$ 2,50 por quilômetro rodado mais taxa fixa de R\$ 6,00.

Sua escolha será em função do menor custo, composto pelo valor da diária mais a locomoção de táxi.

O hotel escolhido foi o

- a. H1.
- b. H2.
- c. H3.
- d. H4.
- e. H5.

Gabarito

01) 64 anos.

02) a) 291

b) 4887

c) 45

03) a) 60. Propriedade Comutativa da Multiplicação.

b) 60. 1 é Elemento Neutro da Multiplicação.

c) 300. Propriedade Associativa da Multiplicação.

04) Expressão: $1000 - (127 + 356)$; Valor: 517

05) 15

06) 15

07) 8

08) 12

09) 23

10) 21

11) 117

12) 5

13) 165

14) 42

15) 447

16) - 36

17) a) $72 + 60 \div (12 - 8) = 87$

b) $(10 - 2) \cdot 3 + 1 = 25$

c) $9 - (3 - 2 \cdot 6 - 3) = 21$

18) 35 unidades.

19) 110

Referências Bibliográficas

[1] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. Matemática: Compreensão e Prática. 6º Ano, Moderna. São Paulo, 1ª Ed. 2009.

[2] BIGODE, Antonio José Lopes; Matemática Hoje é Feita Assim. 8ª Série, FTD. São Paulo, 2000.

[3] MATERIAL de Nivelamento. CASDVestibulares. São José dos Campos, 2010.

De Olho no Vestibular

18	19				
E	D				

Operações com números Decimais

Vamos aprender neste capítulo a trabalhar com as operações mais importantes com os números decimais, sendo elas:

- Somar e subtrair decimais
- Multiplicar e dividir decimais
- BIZU FORTÍSSIMO para trabalhar com números decimais

Introdução

Números decimais são os famosos “números quebrados”, por exemplo, quando você vai comprar uma balinha por 50 centavos, é R\$0,50, e 0,5 é um número decimal, fácil né?!

Eles têm uma importância fundamental em várias partes das exatas, mas enfim, vamos começar logo com as operações!!

Operação de soma e subtração

A soma de números decimais é muito parecida com a soma de números inteiros, perceba a semelhança:

$$\begin{array}{r} 1 \\ +12 \\ +19 \\ \hline 31 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ +1,2 \\ +1,9 \\ \hline 3,1 \end{array}$$

Basicamente a ideia é a mesma, vou somando os números da direita para a esquerda e sempre que a soma for maior ou igual a 10 eu coloco a quantidade de dezenas no próximo da esquerda, como ocorreu no exemplo acima, $9+2=11$, desceu o 1 da unidade e subiu o 1 das dezenas para a próxima soma, e as vírgulas permanecem alinhadas uma abaixo da outra.

Para a subtração a semelhança com números inteiros é enorme, observe:

$$\begin{array}{r} 364 \\ -153 \\ \hline 211 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,64 \\ -1,53 \\ \hline 2,11 \end{array}$$

Logo, basta ir subtraindo termo a termo como você já sabia para números inteiros. Viu como não é nada demais?

Uma outra coisa que é interessante se atentar é que zeros depois da vírgula não alteram o número, ou seja, $5,2 = 5,20 = 5,200...$

Isso é importante pois caso você some um número inteiro com um decimal, ou um número decimal que tem mais casas decimais do que o outro, fica mais fácil de enxergar a soma dessa forma, olha só:

$$\begin{array}{r} 3,52 \\ - 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,52 \\ - 2,00 \\ \hline 1,52 \end{array}$$

Essas são as dicas para a soma e subtração de números decimais, agora com toda certeza você vai arrasar nas questões.

Produto de números decimais

Aqui tem um bizu muito bom para multiplicar números decimais, mas antes lembre-se que zeros depois da vírgula não fazem diferença, ou seja, 13,20 é a mesma coisa que 13,2 ok? Agora vamos fazer para o bizu:

- 3,25 tem 2 números depois da vírgula, 4,2 tem 1 número depois da vírgula:
 - ➔ Você multiplica os dois números como se fossem inteiros:
 - ✓ $325 \times 42 = 13650$
 - ➔ E bota a vírgula de tal forma que depois dela tenha a soma da quantidade de números depois da vírgula do 1º e do 2º números. Vamos com calma:
 - ✓ $2 + 1 = 3$
Ou seja, o número resultado da multiplicação tem que ter 3 números depois da vírgula, ou seja:
 - ✓ $3,25 \times 4,2 = 13,650$
 - ✓ Ou pode ser escrito como 13,65.

- 7,25 tem 2 dígitos depois da vírgula, 3,32 tem 2 dígitos depois da vírgula:
 - ➔ $725 \times 332 = 240700$
 - ➔ $2 + 2 = 4$
 - ➔ $7,25 \times 3,32 = 24,0700$
 - ➔ Ou seja, $7,25 \times 3,32 = 24,07$

Viu como é simples o produto entre decimais?

Divisão de números decimais

Na divisão entre números decimais é importante se atentar a regra já citada antes, que os zeros depois da vírgula não fazem diferença, ou seja, $5 = 5,0 = 5,0000 \dots$

Aqui é fundamental tal regra, pois para deixar a divisão simples e sempre o mesmo passo-a-passo, deixaremos os números sempre com a mesma quantidade de dígitos depois da vírgula

1. $3,52 \div 2$

→ Perceba que o 3,52 tem 2 números depois da vírgula e o 2 não tem nenhum, vamos corrigir isso:

✓ $2 = 2,00$

→ Agora que os dois têm a mesma quantidade de números depois da vírgula, basta multiplicar os dois por cem e fazer a divisão de 352 por 200, já que eles são equivalentes, perceba:

✓ $(3,52 / 2,00) \times 1$

✓ $(3,52 / 2,00) \times (100/100)$

✓ $352/200$

→ E a divisão de números inteiros você já aprendeu, mas não custa nada fazer aqui né? vamos lá:

$$\begin{array}{r} 352 \quad | \quad 200 \\ - 200 \quad | \quad 1,76 \\ \hline 1520 \\ - 1400 \\ \hline 1200 \\ - 1200 \\ \hline 0 \end{array}$$

Viu como não tem nenhum segredo? Aposto que agora você consegue mandar ver nas questões, vamos nessa!

Resumo

No caso de divisão siga sempre o seguinte passo-a-passo:

1) **Deixe os números com a mesma quantidade de casas decimais**

2) **Transformar eles em números inteiros retirando as vírgulas**

3) **Fazer a divisão de números inteiros como você já aprendeu**

Para saber mais

O bizu irado para trabalhar com números decimais é transformar tudo para base 10, deixa eu te mostrar:

→ $3,43 = 343 \times 10^{-2}$

→ $4,2 = 42 \times 10^{-1}$

Perceba que a ideia por trás disso é tornar os números inteiros e poder ir trabalhando em cima deles, já que operações com eles já estamos cansados de fazer. Outro detalhe importante é que as operações de soma e subtração os expoentes dos 10 devem ser iguais, vamos para os exemplos:

→ $3,43 + 4,2 = 343 \times 10^{-2} + 420 \times 10^{-2}$
 $= 763 \times 10^{-2} = 7,63$

→ $3,43 \times 4,2 = 343 \times 10^{-2} \times 42 \times 10^{-1}$
 $= (343 \times 42) \times (10^{-2} \times 10^{-1}) = 14406 \times 10^{-3}$
 $= 14,406$

Legal essa maneira de enxergar os números decimais né?

Exercícios

Fixação

1.) Calcule:

- $3,25 + 7$
- $4,56 + 3,21$
- $5,6 + 2,43$
- $4 \times 6,3$
- $24,2 / 3,2$
- $(2 \times 3,3) / (0,75 \times 4)$
- $(7 + 2,4) \times (3 - 1,1)$
- $18,4 / 9,2$

2.) Rafael é um padeiro de sucesso e vendeu 2 pães por um total de R\$32,52, quanto vale cada pão de Rafael?

3.) Luciana emprestou para seu cunhado R\$44,30, ele, um mal pagador, pagou no 1º mês R\$14,20, no 2º R\$25,05, quanto falta ele pagar no 3º mês para quitar a dívida e Luciana poder ficar tranquila?

De Olho no Vestibular

1.) (Enem/2021) É comum as cooperativas venderem seus produtos a diversos estabelecimentos. Uma cooperativa láctea destinou 4 m³ de leite, do total produzido, para análise em um laboratório da região, separados igualmente em 4000 embalagens de mesma capacidade.

Qual o volume de leite, em mililitro, contido em cada embalagem?

- a) 0,1
- b) 1,0
- c) 10,0
- d) 100,0
- e) 1 000,0

2.) (Enem 2011) — segunda aplicação) Toda a esfera visível ao longo do ano, nos hemisférios celestes Norte e Sul, está dividida em 88 partes, incluindo, cada uma delas, um número variável de estrelas. A unidade de medida utilizada pelos astrônomos para calcular a área de uma constelação é o grau quadrado. Algumas constelações são imensas, como Eridano, o rio celeste, localizada no hemisfério celeste Sul e ocupa uma área de 1138 graus quadrados. Em contraponto, a constelação Norma, localizada no mesmo hemisfério, não passa de 165 graus quadrados.

Capozzoli, U. Origem e Evolução das Constelações. Scientific American Brasil. Nº 2. 2010.

Em um mapa do hemisfério celestial feito em uma escala de 1:1000, as constelações Eridano e Norma ocuparão, respectivamente, uma área, em graus quadrados, de

- A) 0,1138 e 0,0165.
- B) 0,1138 e 0,165.
- C) 1,138 e 0,165.
- D) 11 380 e 1 650.
- E) 1 138 000 e 165 000.

3.) (Enem PPL 2015) Um granjeiro detectou uma infecção bacteriológica em sua criação de 100 coelhos. A massa de cada coelho era de, aproximadamente, 4 kg. Um veterinário prescreveu a aplicação de um antibiótico, vendido em frascos contendo 16 mL, 25 mL, 100 mL, 400 mL ou 1 600 mL. A bula do antibiótico recomenda que, em aves e coelhos, seja administrada uma dose única de 0,25 mL para cada quilograma de massa do animal. Para que todos os coelhos recebessem a dosagem do antibiótico recomendada pela bula, de tal maneira que não sobrasse produto na embalagem, o criador deveria comprar um único frasco com a quantidade, em mililitros, igual a

- A) 16.
- B) 25.
- C) 100.
- D) 400.
- E) 1 600.

Gabarito

Fixação

1.
 - a. 10,25
 - b. 7,77
 - c. 8,03
 - d. 25,2
 - e. 7,5625
 - f. 2,2
 - g. 17,86
 - h. 2
2. R:16,26
3. R:R\$5,05

De Olho no Vestibular

1	2	3			
E	C	C			

Referências Bibliográficas

- [1] Operações com decimais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/operacoes-com-numeros-decimais/>>.. Acesso em: 6 julho. 2023.
- [2] Exercícios sobre números decimais - Mundo Educação. Disponível em: <<https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-numeros-decimais.htm>>. Acesso em: 8 jul. 2023.

Múltiplos e Divisores

A finalidade deste capítulo é apresentar o conceito de divisão e produto entre números naturais. Ao final do capítulo, você será capaz de:

- identificar múltiplos e divisores de um certo número natural
- realizar divisões entendendo o significado do resto
- citar os critérios de divisibilidade por cada número natural

Divisão Euclidiana

Primeiramente vamos relembrar quais são os números naturais, foco dos estudos deste capítulo. Estes são, simplesmente, os números positivos e inteiros, isto é, que não são “quebrados” ou não possuem “vírgula”. Veja os exemplos:

→ São números naturais:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e assim por diante.

→ Não são números naturais:

0.3 e -2 são exemplos de números não naturais.

A divisão de um número natural por outro número natural é chamada de **divisão euclidiana**. Esta operação funciona da seguinte forma: Ao dividirmos um número “D” por outro “d”, iremos obter a seguinte relação:

$$D = d \cdot q + r$$

Nesta equação, cada letra representa os seguintes termos:

D: Dividendo, o número a ser dividido.

d: Divisor, o número que irá dividir.

q: Quociente, o valor que deixa o produto “ $d \cdot q$ ” mais próximo possível de “D”, mas sem ultrapassá-lo.

r: Resto, o valor restante, que “completa” para o produto “ $d \cdot q$ ” se igualar a “D”

Vale ressaltar que: $q > r \geq 0$

Utilizando o famoso esquema de divisão, os termos D, d, q, e r ficam esquematizados da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} D \overline{)d} \\ r \quad q \end{array} \Rightarrow D = q \cdot d + r$$

Veja alguns exemplos abaixo dessa representação de uma divisão:

→ Divisão do número 20 por 3

$$20 = 3 \cdot 6 + 2$$

Perceba que $3 \cdot 6 = 18$ e $3 \cdot 7 = 21$, logo, 6 é o valor que torna o produto por 3 mais próximo de 20, sem ultrapassá-lo. Para igualar $3 \cdot 6$ com 20, precisamos somar 2, logo temos que $q = 6$ e $r = 2$.

→ Divisão do número 10 por 15

$$10 = 15 \cdot 0 + 10$$

→ Divisão do número 5 por 5

$$5 = 5 \cdot 1 + 0$$

→ Divisão do número 15 por 3

$$15 = 3 \cdot 5 + 0$$

Uma divisão é chamada de **exata**, ou melhor, dizemos que **D** é **divisível** por **d**, quando o resto da divisão é 0.

$$r = 0$$

Nos exemplos acima, 15 é divisível por 3, e 5 é divisível por 5.

Múltiplos Naturais

Uma vez que vimos sobre divisões exatas, podemos dar sequência e entender um pouco mais sobre os múltiplos e divisores de um número.

Com o resto de uma divisão sendo 0, podemos simplificar a expressão da seguinte forma:

$$D = d \cdot q$$

Estudaremos primeiramente os múltiplos de um número. Quais são os múltiplos de 45?

Um múltiplo natural de um número é o produto deste número por um natural qualquer.

Na prática é muito mais fácil de entender! Veja a tabela a seguir, que mostra alguns múltiplos de 3:

$\times$	0	1	2	3
3	0	3	6	9

OBS: Existem infinitos múltiplos de qualquer número. Na tabela anterior mostramos apenas os primeiros 4 múltiplos de 3.

Perceba que para obter os múltiplos apenas multiplicamos 3 por algum outro valor inteiro.

Seja D um múltiplo natural de d , conseguimos então escrever aquela relação:

$$D = d \cdot q$$

Onde q é um número natural.

Logo, perceba que quando falamos sobre divisão exata, múltiplos e divisores estamos tratando do mesmo assunto, mas com abordagens diferentes!!!

Divisores Naturais

O estudo dos divisores trata-se apenas de uma outra forma de enxergar essa relação " $D = d \cdot q$ ".

Um número é divisor de outro quando o resto da divisão é zero.

Veja, 6 é um divisor de 72 ? Para isso, basta efetuar a divisão e verificar se o resto é nulo ou não:

$$\begin{array}{r} 72 \overline{) 6} \\ 0 \ 12 \end{array}$$

$$72 = 6 \cdot 12$$

Como o resto é zero, 6 é um divisor de 72.

Mas como conectamos este assunto de divisores com os múltiplos? Ora, veja que

as duas frases a seguir são equivalentes e querem dizer a mesma coisa!

72 é um múltiplo de 6

6 é divisor de 72.

OBS: Frases como "72 é divisível por 6" e "6 é um fator de 72" também são equivalentes às duas frases anteriores.

Crítérios de Divisibilidade

Existem algumas maneiras e "macetes" de descobrir se um número é divisível por outro que são mais fáceis do que o método padrão, que é realizar a divisão e verificar se o resto é zero. Iremos apresentar agora as mais famosas!

→ Critério de Divisibilidade por 2:

Para verificar se 2 é divisor de algum número, basta ver se este **é par ou não**. Logo:

4 é divisível por 2, pois é par, mas 7 não é, pois é ímpar.

→ Critério de Divisibilidade por 3:

Para verificar se 3 é divisor de algum número, iremos **somar os algarismos** deste número e verificar se o resultado é divisível por 3 ou não realizando a divisão. Logo:

123 é divisível por 3, pois $1+2+3 = 6$, e 6 é divisível por 3.

44 não é divisível por 3, pois $4+4 = 8$, e 8 não é divisível por 3.

→ Critério de Divisibilidade por 4:

Para verificar se 4 é divisor de algum número, iremos verificar se o **número formado pelos últimos dois algarismos da direita** é divisível por 4. Logo:

116 é divisível por 4, pois 16 é.

123 não é divisível por 4, pois 23 não é.

→ Critério de Divisibilidade por 5:

Para verificar se 5 é divisor de algum número, basta verificar se o número **termina em 0 ou em 5**. Logo:

110 é divisível por 5, mas 233 não é.

→ Critério de Divisibilidade por 6:

Para verificar se 6 é divisor de número, basta verificar se ele é **divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo**.

Logo, 222 é divisível por 6, pois ele é par e a soma de seus algarismos, $2+2+2=6$ é divisível por 3.

→ Critério de Divisibilidade por 9:

Para verificar se 9 é divisor de algum número, iremos **somar os algarismos** deste número e verificar se o resultado é divisível por 9 ou não realizando a divisão. Logo:

234 é divisível por 9, pois $2+3+4 = 9$, e 9 é divisível por 9.

442 não é divisível por 9, pois $4+4+2 = 10$, e 10 não é divisível por 9.

→ Critério de Divisibilidade por 10:

Para verificar se 10 é divisor de algum número, basta verificar se o número **termina em 0**. Logo:

30 é divisível por 10, mas 31 não é.

Exercícios

- Escreva o quociente e o resto das seguintes divisões:
 - 15 dividido por 3
 - 17 dividido por 4
 - 34 dividido por 5
 - 4 dividido por 18
 - 21 dividido por 21
- Escreva os 4 primeiros múltiplos de 7.
- Determine dois múltiplos consecutivos de 4, cuja soma deles seja 36.

OBS: São exemplos de múltiplos consecutivos: 36 e 40, pois são 4 vezes 9 e 4 vezes 10.

- Considere os números: 21, 32, 41, 55, 126, 384, 570, 2541 e 7920. Pergunta-se:
 - Quais deles são divisíveis por 1?
 - Quais deles são divisíveis por 2?
 - Quais deles são divisíveis por 3?
 - Quais deles são divisíveis por 4?
 - Quais deles são divisíveis por 5?

- Um número de quatro algarismos é representado por: $123n$

Determine os valores de n para que esse número seja divisível por:

- 2
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
- O número 3192 é múltiplo de 7? Depois de 3192, qual é o próximo número natural divisível por 7?

Gabarito

Fixação

1	2	3	4	5	6	7
*	0, 7, 14 e 21	16 e 20	-	-	Sim, 3199	-

- 5 e 0
 - 4 e 1
 - 6 e 4
 - 0 e 4
 - 1 e 0
-
-
- Todos.
 - 32, 126, 384, 570, 7920;
 - 21, 126, 384, 570, 2541, 7920;
 - 32, 384, 7920;
 - 55, 570, 7920;
- 0, 2, 4, 6 e 8.
 - 0, 3, 6 e 9.
 - 2 e 6.
 - 0 e 5.
 - 0 e 6.

Referências Bibliográficas

[1] A Utilização de Potências no Cotidiano. Disponível em:

<<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/a-utilizacao-potencias-no-cotidiano.htm>>. Acesso em: 23 ago. 2022.

[2] 17 exercícios de potenciação com gabarito comentado. Disponível em:

<<https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-potenciacao/>>. Acesso em: 23 ago. 2022.

Decomposição em fatores primos

A finalidade deste capítulo é fomentar a ideia de decompor os números em fatores primos:

- Aprender o que são números primos.
- entender como um número pode ser decomposto em primos.

Introdução

Os números primos têm esse nome não por serem números familiares mas por serem os primeiros a serem trabalhados. Estudados desde a época do grande matemático Pitágoras, são números que acompanham a matemática desde seus primórdios, aparecendo em importantes trabalhos como os "Elementos de Euclides" em 300 A.C.

Aqui será dada uma importância grande para esses números, devido a propriedades muito interessantes que eles possuem, vamos juntos entender melhor elas!

O que são números primos

Números primos são ditos os números que **são divisíveis somente por 1 e por eles mesmos**. Perceba, ser divisível significa que aquele número é dividido por outro e o resultado é um número exato, por exemplo:

→ 4 é divisível por 2, já que:

✓ $4/2 = 2$

✓ 2 é um número exato!

→ 4 não é divisível por 3, já que:

✓ $4/3 = 1,3333...$

✓ 1,333... Não é um número exato!!

Então, em resumo, um número primo só tem divisão exata por 1 e por ele mesmo, qualquer outro número que divida o resultado não será exato. Vamos ver alguns exemplos de números primos:

→ 2 é primo pois só é divisível por 1 e por ele mesmo.

→ 5, 7, 11 e 13 são exemplos de números primos pois só são divisíveis por 1 e por eles mesmos.

Agora que já sabemos o que são números primos, vamos ver um pouco mais sobre decomposição em fatores primos.

Decomposição de números em fatores primos

Decompor números é algo bem intuitivo, pense no que te lembra a palavra decompor. Quebrar, dividir, né?! Então, a ideia central é pegar o número e dividir ele em outros números. Espera aí que se ficou confuso olha o exemplo abaixo que vai ficar mais claro:

→ O número 4 pode ser decomposto em

✓ $4 = 4 \times 1 = 2 \times 2$

→ O número 8 pode ser decomposto em

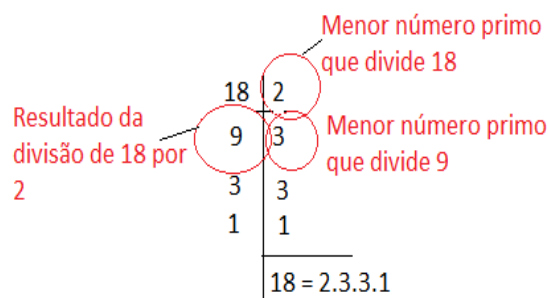
✓ $8 = 8 \times 1 = 4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2$

→ O número 16 pode ser decomposto em

✓ $16 = 16 \times 1 = 8 \times 2 = 4 \times 4 = 4 \times 2 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Perceba que cada número pode ser quebrado de várias formas diferentes e todas elas são iguais. Porém, na matemática o que faz mais sentido é **quebrar o número em multiplicação apenas de números primos**, haja vista que a propriedade dos primos em serem divididos somente por 1 e por eles mesmos ajuda muito na fatoração de números grandes. Para fazer essa fatoração o segredo é sempre tentar **dividir o número pelo menor primo possível**, observe:

→ Vamos fatorar o 18:



→ Ao fatorar o 18 a ideia é ir dividindo sempre pelo menor primo

possível, no primeiro o menor foi o 2, deu resultado 9. Repetindo o processo, o menor número primo que divide 9 é o 3, e assim sucessivamente. Ao final foi obtido que o 18 é dividido pelos números primos 2, 3 e 1, podendo ser escrito pela multiplicação dos números primos que dividiram 18, ficando:

$$\rightarrow 18 = 2 \times 3 \times 3 \times 1 = 2 \times 3^2$$

Exemplos

1. Decomponha o número 38

O menor primo que divide 38 é 2

$$\checkmark 38 / 2 = 19$$

O menor primo que divide 19 é 19

$$\checkmark 19 / 19 = 1$$

Portanto, 38 pode ser fatorado como

$$\checkmark 38 = 19 \times 2$$

2. Decomponha o número 79

O menor primo que divide 79 é 79

$\checkmark$ Portanto, 79 só é divisível por 1 e por ele mesmo, sendo 79 primo.

Para Saber Mais

1. Como saber se um número grande é primo ou não?

$\rightarrow$ Observe a questão 2, ela deu um trabalhão... A gente foi tentando dividir por todos os primos até perceber que nenhum dividia, sobrando apenas o 79.

$\rightarrow$ Imagina agora se fosse o número 313? Seria necessário testar se é divisível por todos os primos até chegar no próprio 313 e perceber que nenhum outro dividiria ele, e assim descobrindo que ele era primo, olha que trabalhão, né?

$\rightarrow$ Mas vem com a gente que vamos te ensinar um **BIZU** massa pra diminuir esse trabalho, se liga!!!

$\rightarrow$ Invés de testar a divisão de todos os primos até o número, basta testar a divisão de **todos os primos até a raiz do número**, se não dê certo, esse número é primo

$\checkmark$ No caso do 79 basta testar se 79 é divisível pelos primos até o primo menor ou igual a raiz de 79

$$\checkmark \sqrt{79} = 8,88$$

$\checkmark$ 2,3,5,7 (Primos a serem testados)

$\checkmark$ Tá vendo como diminui o trabalho? Esse bizu é muito útil!

Exercícios

Questões

- Decomponha e diga se o número é primo ou não:
 - 18
 - 36
 - 313
 - 47
- Diga qual número tem a decomposição:
 - $3^3 \times 2^3$
 - $2^4 \times 5^2$
- Qual o valor de x, sabendo que $2^x \times 5 = 1280$.
- Qual desses números é primo:
 - 312
 - 56
 - 109
 - 21
- (Ufes-2002) O número $N = 2002^2 \times 2000 - 2000 \times 1998^2$ é igual a:
 - 2×10^6
 - 4×10^6
 - 16×10^6
 - 32×10^6

Gabarito

1	2	3	4	5
-	-	-	C	D

- 2×3^2
 - $2^2 \times 3^2$
 - Primo

2. d. Primo
- a. 216
b. 400

3. $x = 8$

Referências Bibliográficas

[1] Questões sobre Produtos Notáveis/Fatoração: Aritmética - Para o Enem e Vestibular. Disponível em: <<https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-vestibular/matematica/aritmetica/fatoracao-e-produtos-notaveis.php>>. Acesso em: 13 jun. 2023.

MDC e MMC

Introdução

Conhecendo a fatoração completa de um número natural, podemos tirar conclusões a respeito de sua divisibilidade, seus divisores, e saber se ele é ou não múltiplo de outro número. Observe que, por meio da fatoração completa do número 60, podemos chegar a algumas conclusões:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

- I. 60 é múltiplo de 15, pois $3 \cdot 5$ é 15, que é fator de 60.
- II. 60 é divisível por 12, pois $2^2 \cdot 3$ é 12, que é fator de 60.
- III. 60 não é divisível por 21, pois 21 é $3 \cdot 7$, e 7 não é fator de 60.

Para concluir os fatos acima, nos baseamos nos seguintes enunciados:

Um número é divisível por outro (múltiplo), quando contém **todos** os fatores primos desse outro número com expoentes **iguais** ou **maiores**

Exemplos:

- 12 é divisor de 72.

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

O número 12 tem fatores primos comuns ao número 72, com expoentes menores.

- 40 não é divisor de 70.

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

O número 40 tem fatores primos comuns ao número 70; entretanto o fator 2 do número 40 tem expoente superior ao expoente do fator 2 do número 70.

- 252 é divisível por 18.

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

252 contém todos os fatores primos de 18 (com expoentes iguais ou maiores).

- 2520 não é divisível por 54.

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$54 = 2 \cdot 3^3$$

Embora 2520 contenha todos os fatores primos de 54, um deles (3) tem expoente menor que o apresentado no mesmo fator primo do número 54.

Máximo Divisor Comum (MDC)

Consideremos os números 12, 18 e 24 e os conjuntos dos seus respectivos divisores naturais.

$$D(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$D(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

$$D(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

Observe que os números 1, 2, 3 e 6 são os divisores naturais dos três números ao mesmo tempo. Dizemos que esses são os divisores comuns de 12, 18 e 24.

Nota-se que 6 é o maior divisor comum dos números 12, 18 e 24, o que pode ser indicado assim:

$$\text{m.d.c.}(12, 18, 24) = 6$$

Então, podemos definir:

Define-se **máximo divisor comum (MDC)** de dois ou mais números naturais diferentes de zero como sendo o **maior** divisor comum deles, ou seja, o maior número natural que divide, simultaneamente, esses números

Exemplos:

$$\text{m.d.c.}(6, 12) = 6$$

$$\text{m.d.c.}(20, 24) = 4$$

$$\text{m.d.c.}(12, 20, 24) = 4$$

$$\text{m.d.c.}(6, 12, 15) = 3$$

Existem várias técnicas que nos permitem calcular o m.d.c. de dois ou mais números, mas estudaremos duas dessas técnicas.

- Decomposição em Separado**

Para determinação do m.d.c., através do método da decomposição em separado, devemos seguir as etapas abaixo:

- ✓ Decompomos cada um dos números envolvidos em fatores primos.
- ✓ Tomamos os fatores comuns com o menor expoente.
- ✓ Multiplicamos esses fatores entre si.

A partir disso, podemos entender m.d.c. através de uma definição alternativa:

O MDC de dois ou mais números naturais, diferentes de zero, é o produto dos **fatores primos comuns** a esses dois números, com cada um desses fatores elevado ao seu **menor** expoente

Exercício resolvido 1:

Calcular o m.d.c. de 360 e 48.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l}
 360 & 2 \\
 180 & 2 \\
 90 & 2 \\
 45 & 3 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 48 & 2 \\
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
 48 = 2^4 \cdot 3
 \end{array}$$

Os fatores comuns, são 2 e 3, tomados com os menores expoentes, temos 2^3 e 3.

$$\begin{aligned}
 \text{Assim: } \text{m.d.c.}(360, 48) &= 2^3 \cdot 3 \\
 \text{m.d.c.}(360, 48) &= 24
 \end{aligned}$$

Outros exemplos:

$$\begin{aligned}
 12 &= 2^2 \cdot 3 & 20 &= 2^2 \cdot 5 \\
 24 &= 2^3 \cdot 3 \\
 \text{m.d.c.}(12, 20, 24) &= 2^2 = 4
 \end{aligned}$$

• Decomposição Simultânea

Para determinação do m.d.c., através do método da decomposição simultânea, devemos seguir as etapas abaixo:

- ✓ Decompomos, simultaneamente, todos os números envolvidos em fatores primos.
- ✓ Tomamos os fatores que dividem todos os números que estão numa mesma linha.
- ✓ Multiplicamos esses fatores entre si.

Exercício resolvido 2:

Calcular o m.d.c. de 36 e 48.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l}
 36, 48 & 2 \rightarrow \text{divide 36 e 48} \\
 18, 24 & 2 \rightarrow \text{divide 18 e 24} \\
 9, 12 & 2 \\
 9, 6 & 2 \\
 9, 3 & 3 \rightarrow \text{divide 9 e 3} \\
 3, 1 & 3 \\
 1, 1 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{m.d.c.}(36, 48) &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \\
 \text{m.d.c.}(36, 48) &= 12
 \end{aligned}$$

Números primos entre si

Dois números naturais são primos entre si quando o m.d.c. entre eles é igual a 1. Além do M.D.C, temos também o M.M.C, o qual estudaremos a frente, mas temos a definição a seguir:

$$\begin{aligned}
 \text{O MDC}(a, b) &= 1 \\
 a \text{ e } b &\text{ são primos entre si}
 \end{aligned}$$

Exemplos:

- 2 e 7 são primos entre si.
- 3 e 10 são primos entre si.

Observações:

- Dois números inteiros consecutivos são primos entre si.
- Dois números primos distintos são primos entre si.
- É um equívoco pensar que números primos entre si devam, necessariamente, ser primos. Os números 4 e 9 são compostos, porém são primos entre si.
- Dividindo-se dois ou mais números pelo m.d.c. entre eles, os quocientes encontrados são números primos entre si.
 - $\text{m.d.c.}(36, 48) = 12$
 - $36 : 12 = 3; \quad 48 : 12 = 4;$
 - 3 e 4 são primos entre si.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Consideremos os números 2, 3 e 4 e os conjuntos dos seus respectivos múltiplos.

$$M(2) = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; \dots\}$$

$$M(3) = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; \dots\}$$

$$M(4) = \{0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; \dots\}$$

Observe que existem alguns números naturais que são múltiplos de 2, 3 e 4 ao mesmo tempo. 0, 12, 24 e 36 são alguns dos múltiplos comuns a 2, 3 e 4.

Nota-se que 12 é o menor múltiplo comum, diferente de zero, dos números 2, 3 e 4, o que pode ser indicado assim:

$$\text{m.m.c.}(2, 3, 4) = 12$$

Então, podemos definir:

Define-se mínimo múltiplo comum (MMC) de dois ou mais números naturais diferentes de zero como sendo o **menor** múltiplo comum deles, diferente de zero, isto é, o menor número natural não-nulo que é, simultaneamente, múltiplo desses números.

Exemplos:

$$\text{m.m.c.}(6, 12) = 12$$

$$\text{m.m.c.}(20, 24) = 120$$

$$\text{m.m.c.}(15, 24, 60) = 120$$

$$\text{m.m.c.}(6, 12, 15) = 60$$

Existem várias técnicas que nos permitem calcular o m.m.c. de dois ou mais números, mas estudaremos duas dessas técnicas.

• Decomposição em Separado

Para determinação do m.m.c., através do método da decomposição em separado, devemos seguir as etapas abaixo:

- ✓ Decompomos cada um dos números envolvidos em fatores primos.
- ✓ Tomamos os fatores comuns ou não comuns com o maior expoente.
- ✓ Multiplicamos esses fatores entre si.

A partir disso, podemos entender m.m.c. através de uma definição alternativa:

O MMC de dois ou mais números naturais, diferentes de zero, é o produto dos **fatores primos comuns ou não comuns** a esses dois números, com cada um desses fatores elevado ao seu maior expoente

Exercício resolvido 3:

Calcular o m.m.c. de 12, 90 e 525.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Os fatores comuns ou não comuns são 2, 3, 5 e 7, tomados com os maiores expoentes, temos 2^2 , 3^2 , 5^2 e 7.

Assim:

$$\text{m.m.c.}(12, 90, 525) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$\text{m.m.c.}(12, 90, 525) = 6300$$

Outros exemplos:

$$15 = 3 \cdot 5 \quad \text{e} \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \quad \text{e} \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{m.m.c.}(15, 24, 60) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

• Decomposição Simultânea

Para determinação do m.m.c., através do método da decomposição simultânea, devemos seguir as etapas abaixo:

- ✓ Decompomos, simultaneamente, todos os números envolvidos em fatores primos.
- ✓ Multiplicamos todos os fatores primos envolvidos.

Exercício resolvido 4:

Calcular o m.m.c. de 12, 18 e 30

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 12, 18, 30 & 2 \\ 6, 9, 15 & 2 \\ 3, 9, 15 & 3 \\ 1, 3, 5 & 3 \\ 1, 1, 5 & 5 \\ 1, 1, 1 & \end{array}$$

$$\text{m.m.c.}(12, 18, 30) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{m.m.c.}(12, 18, 30) = 180$$

Observação:

Dados dois números primos entre si, o m.m.c. entre eles é o produto deles.

a e b são números **primos entre si** se
 $\text{MMC}(a, b) = a \cdot b$

Relação entre o MDC e o MMC de dois números naturais

O produto do m.d.c. pelo m.m.c. de dois números naturais é igual ao produto desses dois números. Ou seja:

$$\text{MDC}(a, b) \cdot \text{MMC}(a, b) = a \cdot b$$

Segue um exercício resolvido como exemplo de aplicação da propriedade.

Exercício resolvido 5:

O máximo divisor comum de dois números é igual a 10 e o mínimo múltiplo comum deles é igual a 210. Se um deles é igual a 70, qual o outro?

Resolução:

Da propriedade vista anteriormente:

$$10 \cdot 210 = 70 \cdot n \Rightarrow n = 30.$$

Exercícios

01) Dados os números 24 e 40, determine:

- a) os divisores de 24;
- b) os divisores de 40;
- c) os divisores comuns de 24 e 40;
- d) o maior divisor comum de 24 e 40.

02) Determine:

- a) os múltiplos de 15;
- b) os múltiplos de 20;
- c) os múltiplos comuns de 15 e 20;
- d) o mínimo múltiplo comum não-nulo de 15 e 20.

03) Ache o m.m.c. e o m.d.c. entre os números:

- a) 10 e 5 b) 56 e 60 c) 100 e 150

04) Verifique se os números 16 e 25 são primos entre si.

05) Qual o m.d.c. de dois números consecutivos?

06) Qual o m.d.c. de dois números primos entre si?

07) Determine os dois menores múltiplos comuns dos números 45, 54 e 81.

08) Substitua a e b por algarismos tais que o m.d.c. de $2^a \cdot 3^2 \cdot 5^2$ e $2^3 \cdot 5^b \cdot 7^2$ seja 100.

09) Determine o valor de x no número $N = 3 \cdot 5^2 \cdot 2^{x+1}$, para que o m.d.c. entre 96, N e 240 seja 24.

10) O produto de dois números é 2160 e o m.d.c. é 6. Calcular o m.m.c. desses números.

11) Determine m e n nos números $A = 2^m \cdot 15$ e $B = 4 \cdot 3^n$, sabendo-se que o m.m.c. de A e B é 360.

12) Calcule o m.m.c. (4a, 4b), sabendo que m.m.c. (a, b) = 30.

13) (UFMG) Se x é um número natural em que m.m.c. (14; x) = 154 e m.d.c. (14, x) = 2, podemos dizer que x:

- a) é um número primo
- b) é um número ímpar

c) é maior que 50

d) é divisível por 11

e) é múltiplo de 14

14) (MACK-SP) Sejam os números naturais $A = 2^3 \cdot 3^x \cdot 5^y$ e $B = 10^4 \cdot 3^8$. Se m.d.c. (A; B) = 360 então x + y é igual a:

a) 9 b) 6 c) 5

d) 3 e) 2

15) (Mackenzie – SP) Nas últimas eleições, três partidos políticos tiveram direito, por dia, a 90 s, 108 s e 144 s de tempo gratuito de propaganda na televisão, com diferentes números de aparições. O tempo de cada aparição, para todos os partidos, foi sempre o mesmo e o maior possível. A soma do número das aparições diárias dos partidos na TV foi de:

Gabarito

01)

a) 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12 e 24.

b) 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20 e 40.

c) 1; 2; 4 e 8.

d) 8

02)

a) 0, 15, 30, 45, 60, ...

b) 0, 20, 40, 60, 80, ...

c) 0, 60, 120, 180, 240, ...

d) 60

03)

a) m.m.c. = 10; m.d.c. = 5;

b) m.m.c. = 840; m.d.c. = 4;

c) m.m.c. = 300; m.d.c. = 50;

04) Sim

05) 1.

06) 1.

07) 810, 1620

08) a = 2 e b ≥ 2; por exemplo b = 3

09) x = 2;

10) m.m.c. = 360

11) m = 3; n = 2;

12) 120;

13) D

14) D

15) 5 + 6 + 8 = 19

Referências Bibliográficas

[1] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. Matemática: Compreensão e Prática. 6º Ano, Moderna. São Paulo, 1ª Ed. 2009.

[2] JUCÁ, Rabin. Matemática ao Alcance de Todos – Apostila 2012.2. Fortaleza, 2012.

[3] MATERIAL de Nivelamento. CASDVestibulares. São José dos Campos, 2010.

Frações

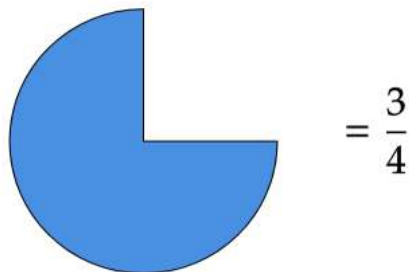
Este capítulo pretende apresentar o conteúdo de Frações, o qual o seu domínio é extremamente útil na grande maioria dos problemas que envolvem cálculos nos vestibulares. O conteúdo deste capítulo será dividido em:

- Motivação
- Definição
- Simplificação
- Operações
- Dízima periódica
- Número misto

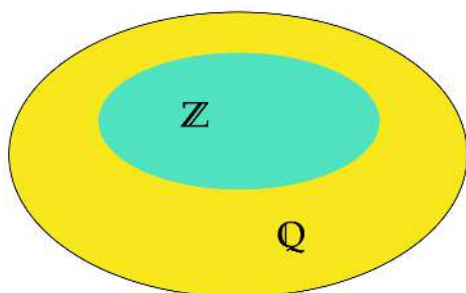
Motivação

Sabe quando você compra uma pizza pra dividir com seu grupo de amigos e não sabe como fazer uma divisão justa?

Por exemplo, se tivermos um grupo de 4 pessoas e fizermos uma divisão justa, após o primeiro amigo comer o seu quarto de pizza, teremos 3 quartos restantes.



Problemas como esse, que envolvem a divisão em partes iguais de um dado elemento, deram sentido a um novo conjunto de números, os números fracionários ou números racionais ($\mathbb{Q}$). Esse novo conjunto é uma extensão dos números inteiros, o qual já estudamos.



Ou seja, além de conter os números inteiros ($\mathbb{Z}$), ele possui novos elementos: os

números decimais. Também já estudamos esses números anteriormente, mas agora iremos explorar uma representação mais intuitiva e mais geral deles. Isso porque a notação que usamos para frações, ou seja, o jeito que nós a escrevemos possibilita para além de números, a escrita de letras e expressões tão complicadas quanto queiramos.

$$\frac{\frac{n}{2} + 0, \overline{9}}{n + 2}$$

Definição

As frações são os elementos do conjunto dos racionais, que representam a razão de dois números inteiros. Assim, uma fração e um racional representam na Matemática a mesma coisa.

Um número racional é definido como:

Um número f tal que existem a e b inteiros, b não nulo, tal que $f = \frac{a}{b}$. (lê-se a dividido por b ou a sobre b)

Quando dizemos “tal que existem” é basicamente para incluir números como $\frac{0,1}{10}$, $\frac{n}{n}$, -2 , $\frac{9}{3}$, os quais não são explicitamente a razão entre números inteiros, porém trabalharemos principalmente razões explícitas de números naturais durante o capítulo por simplicidade.

Em $\frac{a}{b}$, a é chamado de numerador da fração e b o denominador. Importante ressaltar, novamente, que em uma fração qualquer, o denominador SEMPRE é diferente de zero.

Na prática, se escolhermos $\frac{a}{b}$ do todo de um objeto, estamos primeiro dividindo-o em b partes iguais e depois escolhendo a dessas partes que acabamos de criar.

Agora que já sabemos o que é a fração vamos entender como ler esses números.

Para os denominadores de 2 a 10

- ✓ $\frac{1}{2}$: um meio
- ✓ $\frac{1}{3}$: um terço
- ✓ $\frac{1}{4}$: um quarto
- ✓ $\frac{1}{5}$: um quinto
- ✓ $\frac{1}{6}$: um sexto
- ✓ $\frac{1}{7}$: um sétimo
- ✓ $\frac{1}{8}$: um oitavo
- ✓ $\frac{1}{9}$: um nono
- ✓ $\frac{1}{10}$: um décimo

Para os denominadores maiores que 10

- ✓ $\frac{1}{11}$: um onze avos
- ✓ $\frac{1}{12}$: um doze avos
- ✓ $\frac{1}{20}$: um vinte avos

Classificações

Existem 4 classificações para frações positivas:

- Fração própria
 - ✓ Toda fração cujo o numerador é menor que o denominador.
 - ✓ Exemplos: $\frac{14}{15}$ e $\frac{99}{125}$.
- Fração imprópria
 - ✓ Toda fração cujo o numerador é maior que o denominador.
 - ✓ Exemplos: $\frac{16}{2}$ e $\frac{99}{1}$.
- Fração aparente
 - ✓ Toda fração cujo o numerador é múltiplo do denominador.
 - ✓ Exemplos: $\frac{18}{6}$ e $\frac{2}{1}$.
- Fração irredutível
 - ✓ Toda fração cujo o numerador e denominador não possuem

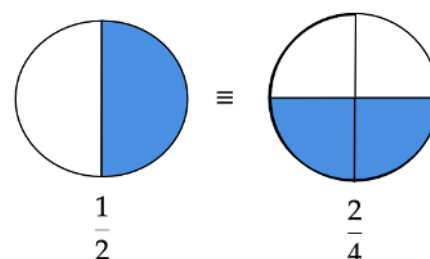
divisores diferentes de 1, ou seja frações que não é possível simplificar.

- ✓ Exemplos: $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{1}$.

Além dessas classificações, definimos Frações equivalentes como aquelas que possuem o mesmo valor. Ou seja, aquelas em que a partir de uma pode-se obter a outra por simplificações.

- ✓ Exemplo: $\frac{16}{6}$ e $\frac{24}{9}$.

Simplificação



A simplificação consiste em um método para reduzir frações não irredutíveis em uma equivalente que seja irredutível. Isso é feito dividindo o numerador e o denominador por um divisor comum entre os dois até que esse processo não seja mais possível. Isso irá acontecer quando o único divisor comum será o número 1, assim saberemos que chegamos na fração irredutível equivalente à original.

Esse procedimento é de extrema importância pois, comumente, as respostas nas alternativas das questões dos vestibulares são as frações em sua maneira mais simplificada possível, ou seja na fração irredutível.

Analisaremos alguns exemplos a seguir:

1. Simplifique a fração $\frac{5}{25}$:

Vamos descobrir o divisor comum entre 5 e 25, e assim dividi-los por este número: o mdc de 5 e 25 é igual a 5.

O numerador da fração simplificada será $5 \div 5 = 1$. O denominador será $25 \div 5 = 5$. Logo, $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, sendo essa a fração irredutível.

2. Simplifique a fração $\frac{81}{18}$:

Vamos descobrir o divisor comum entre 81 e 18, e assim dividi-los por este número: o mdc de 81 e 18 é igual a 9.

O numerador da fração simplificada será $81 \div 9 = 9$. O denominador será $18 \div 9 = 2$. Logo, $\frac{81}{18} = \frac{9}{2}$, sendo essa a fração irredutível.

3. Simplifique a fração $\frac{128}{36}$:

Descobrir o mdc desses dois números pode ser um pouco trabalhoso e até mesmo demandar muito tempo, que é precioso durante uma prova. Sendo assim vamos analisar os dois números e pensar no primeiro divisor que nos vem à cabeça e dividir os elementos por ele, vemos que tanto o numerador como o denominador são pares, logo divisíveis por 2, então é por ele que começaremos.

O numerador ficará $128 \div 2 = 64$ e o denominador $36 \div 2 = 18$. Logo, $\frac{128}{36} = \frac{64}{18}$. Ainda é possível perceber que dá para simplificar novamente por 2, já que ambos os números são pares. Então $64 \div 2 = 32$ e $18 \div 2 = 9$. Assim temos $\frac{128}{36} = \frac{64}{18} = \frac{32}{9}$, que é nossa fração irredutível uma vez que não é mais possível identificar outro divisor que não seja 1.

Operações

A seguir vamos ver como são feitas as quatro operações básicas utilizando as frações.

Adição e Subtração

Para realizarmos a soma ou subtração de duas frações, elas precisam ter o mesmo denominador, e em seguida somamos ou subtraímos os numeradores. Para duas frações de denominadores diferentes podemos achar o MMC entre eles para que fiquem iguais, e para manter a proporcionalidade da fração, ou seja não alterar o seu valor matemático, o numerador também terá que ser multiplicado.

Analisaremos exemplos para ficar mais claro o passo a passo:

$$\rightarrow \frac{1}{5} + \frac{7}{5}$$

Como os denominadores são iguais, apenas precisa somar os numeradores:

$$\frac{1}{5} + \frac{7}{5} = \frac{1+7}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\rightarrow \frac{6}{10} - \frac{4}{10}$$

Como os denominadores são iguais, apenas precisa subtrair os numeradores:

$$\frac{6}{10} - \frac{4}{10} = \frac{6-4}{10} = \frac{2}{10}$$

Simplificando o resultado temos $\frac{1}{5}$.

$$\rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

Os denominadores são diferentes, logo vamos achar o MMC deles, que neste caso é

12. Logo $\frac{1}{4}$ terá ambos os elementos multiplicado por 3 e $\frac{1}{3}$ por 4.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\rightarrow \frac{2}{15} - \frac{3}{5}$$

Os denominadores são diferentes, logo vamos achar o MMC entre eles, que neste

caso é 15. Logo $\frac{2}{15}$ não será alterado e $\frac{3}{5}$ terá ambos os elementos multiplicado por 3.

$$\frac{2}{15} - \frac{3}{5} = \frac{2}{15} - \frac{9}{15} = \frac{2-9}{15} = \frac{-7}{15}$$

Multiplicação

A multiplicação é feita apenas multiplicando o numerador de uma fração pelo numerador da outra e o mesmo acontece com o denominador.

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$$

$$\rightarrow \frac{4}{15} \times \frac{3}{22} = \frac{4 \times 3}{15 \times 22} = \frac{12}{330},$$

simplificando temos $\frac{2}{55}$.

$$\rightarrow \frac{2}{4} \times \frac{7}{49} = \frac{2 \times 7}{4 \times 49} = \frac{14}{196},$$

simplificando temos $\frac{1}{14}$.

No segundo e terceiro exemplos podemos realizar o processo de simplificação antes de realizar a multiplicação, o que facilita muito na hora das contas. Isso pode ser feito de duas maneiras: simplificar números da mesma fração ou o numerador de uma com o denominador da outra, ou seja, os números cruzados.

Vamos refazer o exemplo dois desta forma:

→ Simplificando o 4 com o 22:

$$\frac{4}{15} \times \frac{3}{22} = \frac{2}{15} \times \frac{3}{11}$$

→ Simplificando o 15 com o 3:

$$\frac{2}{15} \times \frac{3}{11} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{11}$$

→ Multiplicando temos:

$$\frac{4}{15} \times \frac{3}{22} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{11} = \frac{2 \times 1}{5 \times 11} = \frac{2}{55}$$

Agora vamos refazer o exemplo três desta forma:

→ Simplificando o 2 com o 4:

$$\frac{2}{4} \times \frac{7}{49} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{49}$$

→ Simplificando o 7 com o 9:

$$\frac{1}{2} \times \frac{7}{49} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}$$

→ Multiplicando temos:

$$\frac{2}{4} \times \frac{7}{49} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{2 \times 7} = \frac{1}{14}$$

Podemos perceber que simplificar antes de fazer a multiplicação nos resultou em contas mais fáceis de serem feitas e o resultado já é uma fração irredutível.

Divisão

A divisão é feita a partir da multiplicação entre a primeira fração e o inverso da segunda, ou seja, trocar o denominador pelo numerador e vice-versa.

$$\rightarrow \frac{2}{4} \div \frac{1}{5}$$

O inverso de $\frac{1}{5}$ é $\frac{5}{1}$, logo:

$$\frac{2}{4} \div \frac{1}{5} = \frac{2}{4} \times \frac{5}{1}, \text{ simplificando,}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{1} = \frac{1 \times 5}{2 \times 1} = \frac{5}{2}.$$

$$\rightarrow \frac{8}{7} \div \frac{5}{20}$$

O inverso de $\frac{5}{20}$ é $\frac{20}{5}$, logo:

$$\frac{8}{7} \div \frac{5}{20} = \frac{8}{7} \times \frac{20}{5}, \text{ simplificando,}$$

$$\frac{8}{7} \times \frac{4}{1} = \frac{8 \times 4}{7 \times 1} = \frac{32}{7}.$$

Dízima Periódica

A dízima periódica é um número que, em forma decimal, tem infinitas casas decimais e elas se repetem a partir de alguma casa decimal. O número que se repete é chamado de período. Se houver algum número nas casas decimais antes do período é chamado de anti-período.

Existem duas classificações: as dízimas periódicas simples são aquelas que possuem apenas período, e as dízimas periódicas compostas, que são as que possuem período e anti-período.

Pode ser representada com o período repetindo no mínimo 3 vezes seguido de reticências ou com uma barra em cima do período.

$$\rightarrow 0,333333...$$

- ✓ Período é 3
- ✓ Não tem anti-período
- ✓ DP simples
- ✓ $0,\overline{3}$

$$\rightarrow 6,999999...$$

- ✓ Período é 9
- ✓ Não tem anti-período
- ✓ DP simples
- ✓ $6,\overline{9}$

$$\rightarrow 0,12121212...$$

- ✓ Período é 12
- ✓ Não tem anti-período
- ✓ DP simples

✓ $0, \overline{12}$

→ $8,86355555...$

- ✓ Período é 5
- ✓ Anti-período é 863
- ✓ DP Composta
- ✓ $8,863\overline{5}$

Fração Geratriz

A fração geratriz é aquela que gera uma dízima periódica, com por exemplo $\frac{1}{9}$ é a fração geratriz que gera a dízima periódica $0, \overline{1}$.

Com algumas regras podemos facilmente transformar qualquer dízima periódica em uma fração.

1. Adicionaremos um 9 para cada algarismo do período, ou seja se o período for 3 o denominador terá 9, se o período for 435 o denominador terá 999.
2. Adicionaremos um 0 para cada algarismo do anti-período.
3. No numerador faremos a subtração do número formado pelos algarismos da parte inteira com os do anti-período e período pelo número formado pelos algarismos da parte inteira com os do anti-período.

Analisaremos alguns exemplos:

→ $0,333333...$

- ✓ Período de um algarismo, denominador igual a 9
- ✓ Não possui anti-período, logo não acrescentamos 0 ao denominador.
- ✓ Numerador: $03 - 0 = 3$
- ✓ Logo a fração geratriz é $3/9 = 1/3$

→ $0,12121212...$

- ✓ Período de dois algarismos, denominador igual a 99
- ✓ Não possui anti-período, logo não acrescentamos 0 ao denominador.
- ✓ Numerador: $012 - 0 = 12$

- ✓ Logo a fração geratriz é $12/99 = 4/33$

→ $8,86355555...$

- ✓ Período de um algarismo, denominador igual 9
- ✓ Anti-período em 3 algarismos, logo acrescentamos 3 0s ao denominar, 9000.
- ✓ Numerador: $88635 - 8863 = 79772$
- ✓ Logo a fração geratriz é $79772/9000$

Exemplo: $0,999... = 1 ?!$

Considere a dízima $0, \overline{9}$. Pelo que aprendemos, a fração geratriz vale $\frac{09-0}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

Mas se a fração geratriz é igual a dízima... O número 0 e vários 9 seguidos é a mesma coisa que 1 ?

Na verdade não, isso só é verdade se a parte fracionária tem infinitos 9's !!!

Portanto tenha cuidado, o que aprendemos nessa secção só vale quando temos infinitas casas decimais!

Para saber mais

Uma dízima periódica sempre pode ser escrita como uma fração e nós aprendemos como encontrá-la. Iremos fazer isso agora de uma maneira diferente. Escreva $3,1414...$ como uma fração.

 **Solução:**

Seja $x = 3,1414...$ (i)

Logo $100x = 314,1414...$ (ii)

(ii)-(i) $100x - x = 311 \Rightarrow 99x = 311$

$$x = \frac{311}{99}$$

Portanto, temos agora mais uma maneira de resolver esse tipo de exercício.

Números Mistos

É um número formado por parte inteira (p.i.) e parte fracionária (p.f.), ambas diferentes de zero.

$$\rightarrow 2\frac{1}{2} \text{ p.i.} = 2, \text{ p.f.} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 6\frac{1}{5} \text{ p.i.} = 6, \text{ p.f.} = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow 9\frac{3}{4} \text{ p.i.} = 9, \text{ p.f.} = \frac{3}{4}$$

Para transformar o número misto em fração, basta somar as duas partes, o que equivale na prática a multiplicar a parte inteira com o denominador da fração para obter o numerador e somar com o numerador da parte fracionária, já o denominador mantém o mesmo. Exemplos:

$$\rightarrow 2\frac{1}{2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow 6\frac{1}{5} = \frac{6 \times 5 + 1}{5} = \frac{31}{5}$$

$$\rightarrow 9\frac{3}{4} = \frac{9 \times 4 + 3}{4} = \frac{39}{4}$$

Ao analisarmos os resultados obtidos percebemos que toda a fração resultante de um número misto é uma fração imprópria.

Para transformar uma fração imprópria em número misto basta realizar a divisão do numerador pelo denominador. O quociente será a parte inteira do número misto e o resto será o numerador da parte fracionária, o denominador é o mesmo.

$$\rightarrow \frac{19}{5} : \text{quociente } 3 \text{ e resto } 4, \text{ logo o número misto é } 3\frac{4}{5}.$$

Exercícios

Fixação

- Simplifique as frações abaixo e classifique:
 - $\frac{54}{12}$
 - $\frac{6}{39}$
 - $\frac{45}{15}$
 - $\frac{63}{36}$
 - $\frac{128}{512}$

- Efetue as expressões abaixo e simplifique o resultado o máximo possível.

$$\text{a. } \frac{6}{7} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}$$

$$\text{b. } \frac{13}{14} - \left(\frac{6}{2} \div \frac{18}{3} \right) \times \frac{3}{7}$$

$$\text{c. } \left(\frac{128}{64} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{12}$$

$$\text{d. } \frac{7}{81} \times \frac{9}{14} + \frac{1}{5}$$

$$\text{e. } 2\frac{5}{6} + \frac{1}{6}$$

- Classifique as dízimas periódicas abaixo e encontre sua fração geratriz.
 - 0,666...
 - 7,87555...
 - 56,787878...
 - $4,\overline{123}$
 - $10,\overline{78612}$
- Felipe recebe seu salário todo início de mês. Ele sabe que seus gastos fixos correspondem a $\frac{1}{2}$ do seu salário e também sabe que investir $\frac{1}{3}$ é de extrema importância. Qual é a fração que corresponde ao restante do salário? Responda com a fração irredutível e classifique-a.
- Juliana possui um grande terreno de 400m^2 , ela construiu sua casa com um belo jardim utilizando $\frac{3}{7}$ do terreno. Em $\frac{1}{5}$ do terreno ela quer fazer uma área de lazer com piscina e brinquedos. Com o restante ela quer dividir igualmente entre suas duas filhas. Quanto é o terreno de cada filha e qual a sua fração correspondente do total terreno.
- Transforme as frações impróprias abaixo em número misto.
 - $\frac{5}{4}$
 - $\frac{4}{3}$
 - $\frac{16}{5}$
 - $\frac{512}{128}$
 - $\frac{49}{14}$
- Coloque os números em ordem crescente: $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{12}{3}$, $5\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$
- Encontre o número cujo $\frac{5}{8}$ corresponde a 100

9. Complete a tabela abaixo de forma que todas as linhas e colunas tenham a mesma soma como resultado.

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
X	$\frac{5}{12}$	Y
$\frac{1}{3}$	Z	$\frac{1}{6}$

10. (ENEM – 2009) A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

Semibreve		1
Mínima		$\frac{1}{2}$
Semínima		$\frac{1}{4}$
Colcheia		$\frac{1}{8}$
Semicolcheia		$\frac{1}{16}$
Fusa		$\frac{1}{32}$
Semifusa		$\frac{1}{64}$

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras. Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com:

- 24 fusas.
- 3 semínimas.
- 8 semínimas.
- 24 colcheias e 12 semínimas.
- 16 semínimas e 8 semicolcheias.

Gabarito

Fixação

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

-	-	-	-	-	-
7	8	9	10	-	-
-	160	-	D		

- $\frac{9}{2}$, imprópria
 - $\frac{2}{13}$, própria
 - 3, aparente
 - $\frac{7}{4}$, imprópria
 - $\frac{1}{4}$, própria
- $-\frac{13}{42}$
 - $\frac{5}{7}$
 - $\frac{5}{24}$
 - $\frac{23}{90}$
 - 3
- DP Simples, $\frac{6}{9}$
 - DP Composta, $\frac{7088}{900}$
 - DP Simples, $\frac{5622}{99}$
 - DP Simples, $\frac{4119}{999}$
 - DP Composta, $\frac{1067826}{99000}$
- O restante corresponde a $\frac{1}{5}$ do salário de Felipe. Fração própria.
- Cada filha recebeu aproximadamente 74m^2 que corresponde a $\frac{13}{70}$ do terreno
- $1\frac{1}{4}$
 - $1\frac{1}{3}$
 - $3\frac{1}{5}$
 - 3
 - 4
 - $3\frac{7}{14}$
- $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < \frac{12}{3} < 5\frac{1}{4}$
-
- $X=\frac{1}{4}$; $Y=\frac{7}{12}$; $Z=\frac{3}{4}$

Razão e proporção

A finalidade desse capítulo é apresentar o conceito de razão e proporção e suas propriedades. Ao final do capítulo, o leitor será capaz de:

- Compreender o conceito de razão e proporção.
- Resolver problemas por meio da aplicação da teoria.

1. Razão

A razão é uma relação que existe entre dois valores ou dois números.

Quando **comparamos** dois valores, medidas ou grandezas, **estabelecemos uma relação** entre esses dois valores.

Ou seja: A razão entre dois números a e b , com $b \neq 0$, é definida como o quociente de a por b .

Onde a é denominado antecedente e b é denominado consequente.

A razão $\frac{a}{b}$ ou $a:b$ pode ser lida de uma das seguintes maneiras: razão de a para b ou a está para b ou a para b .

Este é um conceito bastante importante em nosso cotidiano. Vejamos mais alguns a seguir:

Exemplos:

I. Para cada 100 convidados em um determinado baile de formatura, 75 eram mulheres. Podemos determinar a razão entre o número de mulheres e o número de convidados:

$$75:100 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

- Dizemos que de cada 4 convidados, 3 são mulheres.

II. Em um vestibular para Engenharia Ambiental, 240 candidatos disputam 80 vagas. Vamos comparar esses dois números.

- Dividindo o número de candidatos pelo número de vagas, temos:

$$240:80 = \frac{240}{80} = \frac{3}{1}$$

Dizemos que há 3 candidatos para cada vaga ou que a razão entre o número de candidatos e o número de vagas é de 3 para 1.

Dividindo o número de vagas pelo número de candidatos, encontramos:

$$80:240 = \frac{80}{240} = \frac{1}{3}$$

Dizemos que para cada vaga há 3 candidatos ou que a razão entre o número de vagas e o número de candidatos é de 1 para 3.

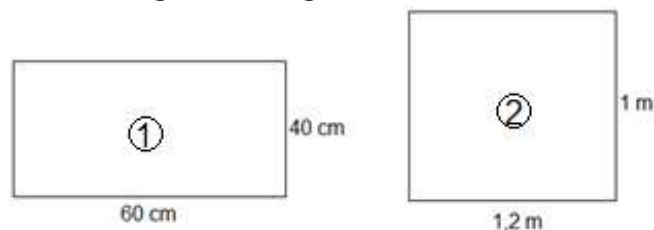
Observação: No exemplo anterior, podemos observar que o valor da razão muda se trocarmos o antecedente com o consequente.

É importante atentar que a razão entre duas grandezas a e b , nessa ordem, é o quociente $\frac{a}{b}$.

Ao passo que, a razão entre b e a é o quociente $\frac{b}{a}$.

Estas razões são chamadas de razões inversas.

III. A geometria é uma área da matemática que utiliza amplamente os conceitos de razão e proporção. Queremos determinar a razão entre a área da região retangular 1 e a área da região retangular 2.



Nesse caso, para calcular a razão, devemos expressar as medidas na mesma unidade, ou seja:

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \quad 1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$$

Vamos, agora, calcular a área de cada região retangular:

$$A_1 = 60 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} = 2400 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 100 \text{ cm} \times 120 \text{ cm} = 12000 \text{ cm}^2$$

razão: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2400}{12000} = \frac{1}{5}$, isto é: a área do retângulo 2 é 5 vezes a área do retângulo 1.

Observação: Foi fundamental colocar as medidas na mesma unidade. Podemos definir razão entre duas grandezas como:

A **razão** entre duas grandezas de mesma espécie é o **quociente** dos números que exprimem as **suas medidas**, sempre tomadas na **mesma unidade**.

2. Proporção

Quando encontramos uma igualdade entre duas razões, a relação matemática é chamada de proporção.

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Dados quatro números a , b , c e d , todos diferentes de zero, dizemos que eles formam, nessa ordem, uma proporção quando a razão $\frac{a}{b}$ é igual à razão $\frac{c}{d}$.

Nesse caso, dizemos que os números a , b , c e d são proporcionais e podemos indicar:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(lê-se “ a está para b assim como c está para d ”)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{x}{y} = K$$

Sendo que K é chamado de constante de proporcionalidade.

Exemplo:

$$\frac{a}{b} = 2$$

$$a = 2b$$

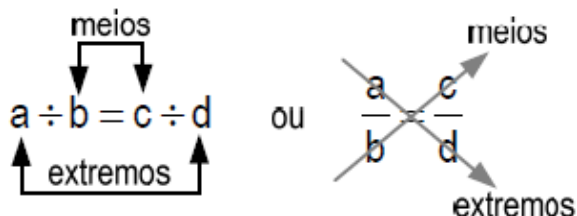
O “ a ” vale 2 vezes mais que “ b ”. Ou seja, nessa fração o numerador vale 2 vezes mais que o seu respectivo denominador.

No mundo das proporções, ainda temos mais algumas definições, como:

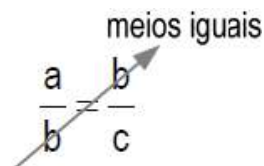
- ✓ O antecedente da primeira razão (a) e o conseqüente da segunda razão (d)

são chamados EXTREMOS da proporção.

- ✓ O conseqüente da primeira razão (b) e o antecedente da segunda razão (c) são chamados MEIOS da proporção.



Observação: Quando os meios são iguais a proporção é dita contínua.



Exemplo:

Dada a proporção

$$\frac{3}{4} = \frac{27}{36} \Leftrightarrow 3 : 4 = 27 : 36$$

Leitura: “3 está para 4 assim como 27 está para 36”.

Meios: 4 e 27

Extremos: 3 e 36

3. Propriedade fundamental das proporções

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Isto é, se os números a , b , c e d formam, nessa ordem, uma proporção, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$b \times c = a \times d$$

4. Outras propriedades das proporções

4.1 – Propriedade 1:

Em toda proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo) assim como a soma dos dois últimos termos está para o terceiro (ou para o quarto).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \text{ ou } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

4.2 – Propriedade 2:

Em toda proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo) assim como a diferença dos dois últimos termos está para o terceiro (ou para o quarto).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \text{ ou } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

4.3 – Propriedade 3:

Em toda proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

4.4 – Propriedade 4:

Em toda proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \text{ ou } \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$

5. Proporção múltipla

Denominamos proporção múltipla uma série de razões iguais. Assim:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} \text{ é uma proporção múltipla.}$$

6. Resolução de problemas envolvendo proporções

Exercício resolvido 1:

Uma pessoa viaja 120 km em 2 horas. Quantas horas levará a mesma pessoa para percorrer 180 km com a mesma velocidade?

Resolução:

A distância percorrida é proporcional ao tempo gasto, viajando a uma mesma velocidade.

Assim, indicamos por x o tempo a ser determinado e armamos a proporção:

$$\frac{2 \text{ h}}{120 \text{ km}} = \frac{\text{Tempo}}{\text{Distância}}$$

$$\frac{2 \text{ h}}{120 \text{ km}} = \frac{x}{180 \text{ km}}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções:

$$120 \cdot x = 2 \cdot 180$$

$$120 \cdot x = 360$$

$$x = \frac{360}{120}$$

$$x = 3 \text{ h}$$

Então, a pessoa levará 3 horas para percorrer os 180 km.

Exercício resolvido 2:

Para pintar uma parede, um pintor deve misturar tinta branca com tinta cinza na razão de 5 para 3. Se ele precisar de 24 L dessa mistura, quantos litros de tinta branca irá utilizar?

Resolução:

Indicando por x a quantidade de tinta branca e por y a quantidade de tinta cinza, temos:

$$\checkmark \text{ Quantidade total de tinta: } x + y = 24$$

$$\checkmark \text{ Razão de 5 para 3: } \frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

Aplicando a propriedade 1 das proporções:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{5+3}{5} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{8}{5}$$

Como $x + y = 24$, temos:

$$\frac{24}{x} = \frac{8}{5}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções:

$$\begin{aligned} 8 \cdot x &= 24 \cdot 5 \\ 8x &= 120 \\ x &= \frac{120}{8} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Logo, ele irá utilizar 15 L de tinta branca.

Exercício resolvido 3:

Em um grupo, a diferença entre o número de meninas e de meninos é 20. Sabendo que a razão entre o número de meninas e o de meninos é de 7 para 5, quantas meninas fazem parte do grupo?

Resolução:

Indicando por x o número de meninas e por y o número de meninos, temos:

✓ Diferença entre o número de meninos e o de meninas: $x - y = 20$

✓ Razão: $\frac{x}{y} = \frac{7}{5}$

Aplicando a propriedade 2 das proporções:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} = \frac{7}{5} &\Rightarrow \frac{x-y}{x} = \frac{7-5}{7} \Rightarrow \frac{20}{x} = \frac{2}{7} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x = 20 \cdot 7 \Rightarrow 2x = 140 \Rightarrow x = 70 \end{aligned}$$

Então, fazem parte do grupo 70 meninas.

Exercício resolvido 4:

Determinar os números a , b e c , não nulos, sabendo que $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{2}$, e $a + b + c = 120$.

Resolução:

Aplicando a propriedade 3 das proporções:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3+5+2} = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{a+b+c}{10} = \frac{a}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{120}{10} &= \frac{a}{3} \Rightarrow 10a = 3 \cdot 120 \Rightarrow 10a = 360 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = 36. \end{aligned}$$

Tomando as igualdades duas a duas:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} \Rightarrow \frac{36}{3} = \frac{b}{5} \Rightarrow 3b = 180 \Rightarrow b = 60.$$

$$\frac{a}{3} = \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{36}{3} = \frac{c}{2} \Rightarrow 3c = 72 \Rightarrow c = 24.$$

Logo, $a = 36$, $b = 60$ e $c = 24$.

7. Grandezas diretamente proporcionais

As grandezas a e b são diretamente proporcionais se $\frac{a}{b} = K$, onde K é uma constante não nula.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando ambas aumentam ou diminuem na **mesma proporção**.

Exemplo: Supondo que a velocidade seja constante, a razão entre a medida de distância percorrida e a correspondente medida de tempo gasto para percorrê-la é sempre a mesma:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$$

Quando a medida do tempo dobra, a medida da distância também dobra. Quando uma das medidas triplica, a outra também tem seu valor triplicado, e assim por diante. Por isso, dizemos que a distância percorrida nessa situação é **diretamente proporcional** ao tempo gasto para percorrê-la.

8. Grandezas inversamente proporcionais

As grandezas a e b são inversamente proporcionais se uma delas é proporcional ao inverso da outra, ou seja, $a \cdot b = k$, onde K é uma constante não nula.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma aumenta e outra diminui na **mesma proporção**.

Exemplo: Um retângulo possui 48 m^2 de área, nesse caso, o produto da medida da base pela correspondente medida da altura é sempre o mesmo:

$$b \cdot h = 6 \cdot 8 = 4 \cdot 12 = 3 \cdot 16 = 1 \cdot 48$$

Nesse exemplo, quanto maior a medida da altura, menor será a medida da base. Quando isso ocorre, dizemos que a medida da altura nessa situação é **inversamente proporcional** à base.

Exercícios

Fixação

01) Nesta tabela, devemos encontrar vários pares de números A e B. Complete a tabela de modo que a razão de A para B seja

$$\frac{6}{7}$$

sempre o número $\frac{6}{7}$.

	A	B	Razão A/B	Forma mais simples de A/B
a)	12	14	$\frac{12}{14}$	$\frac{6}{7}$
b)		21		
c)	30			
d)		100		
e)	100			

02) Em uma sala de aula há 30 alunos, dos quais 12 são meninas:

- Qual a razão do número de meninas para o total de alunos da turma?
- Qual é a razão do número de meninos para o total de alunos da turma?
- Qual é a razão do número de meninas para o número de meninos?

03) Determine o valor de x em cada uma das seguintes igualdades de modo que elas se tornem verdadeiras:

- $\frac{20}{8} = \frac{x}{6}$
- $\frac{14}{30} = \frac{x}{90}$
- $\frac{x}{3} = \frac{75}{15}$

$$d) \frac{x}{4} = \frac{36}{27}$$

04) Determinar x na proporção: $\frac{x-3}{6-x} = \frac{1}{2}$

05) Sabe-se que 3,2; 20; 1,6 e x formam, nessa ordem, uma proporção. Qual é o valor de x ?

06) Na Escola do Bairro, para cada 4 meninas há 5 meninos estudando. Se há 580 meninos, quantos alunos estudam na escola do bairro?

07) Para fazer limonada, misturamos suco de limão com água na proporção de 2 para 9. Quantos litros de suco de limão e de água serão necessários para fazer 5,5 litros de limonada.

08) Rui tinha 35 anos quando sua filha Karina nasceu. Atualmente, a razão entre a idade de Rui e a idade de Karina é $\frac{12}{5}$. Determine a idade atual de cada um.

09) A razão entre dois números é $\frac{3}{8}$. Se a soma do maior com o dobro do menor é 42, o maior deles é:

- a) 9 b) 15 c) 24 d) 30 e) 32

10) Dois números na razão de 2 para 3. Acrescentando-se 2 a cada um, as somas estão na razão de 3 para 5. Então, o produto dos dois números é:

- a) 90 b) 96 c) 180 d) 72 e) -124

11) Sabe-se que $\frac{a}{5} = \frac{2b}{6} = \frac{1,5c}{3}$ e que $a + 3b - 2c = 100$. O valor de $a + b - c$ é:

- a) 100
b) 80
c) 70
d) 60
e) 50

12) Determine x , y e z , sabendo-se que $\frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$ e $3x + 2z = 39,4$

De Olho no Vestibular

- (ENEM) Um técnico gráfico constrói uma nova folha a partir das medidas de uma folha A0. As medidas de uma folha A0 são 595 mm de largura e 840 mm de comprimento. A nova folha foi construída do seguinte modo: acrescenta uma polegada na medida da largura e 16 polegadas na medida do comprimento. Esse técnico precisa saber a razão entre as medidas da largura e do comprimento, respectivamente, dessa nova folha.

Considere 2,5 cm como valor aproximado para uma polegada. Qual é a razão entre as medidas da largura e do comprimento da nova folha?

- a) $1/16$
- b) $620/1\ 240$
- c) $596/856$
- d) $598/880$
- e) $845/4\ 840$

2. (ENEM) A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

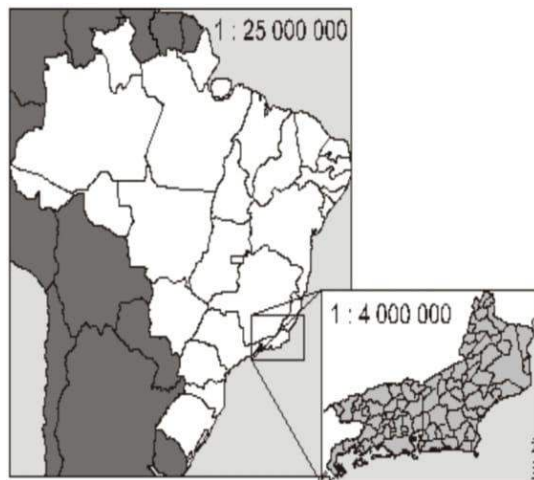
Semibreve		1
Mínima		$1/2$
Semínima		$1/4$
Colcheia		$1/8$
Semicolcheia		$1/16$
Fusa		$1/32$
Semifusa		$1/64$

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras.

Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com

- A) 24 fusas.
- B) 3 semínimas.
- C) 8 semínimas.
- D) 24 colcheias e 12 semínimas.
- E) 16 semínimas e 8 semicolcheias.

3. (ENEM) A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.



Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil. Esse número é

- A) menor que 10.
 - B) maior que 10 e menor que 20.
 - C) maior que 20 e menor que 30.
 - D) maior que 30 e menor que 40.
 - E) maior que 40.
4. (ENEM) O pacote básico de um jogo para smartphone, que é vendido a R\$ 50,00, contém 2 000 gemas e 100 000 moedas de ouro, que são itens utilizáveis nesse jogo. A empresa que comercializa esse jogo decidiu criar um pacote especial que será vendido a R\$ 100,00 e que se diferenciará do pacote básico por apresentar maiores quantidades de gemas e moedas de ouro. Para estimular as vendas desse novo pacote, a empresa decidiu inserir nele 6 000 gemas a mais, em relação ao que o cliente teria caso optasse por comprar, com a mesma quantia, dois pacotes básicos. A quantidade de moedas de ouro que a empresa deverá inserir ao pacote especial, para que seja mantida a mesma proporção existente entre as quantidades de gemas e de moedas de ouro contidas no pacote básico, é
- A) 50 000.
 - B) 100 000.
 - C) 200 000.
 - D) 300 000.
 - E) 400 000.

5. Um casal está reformando a cozinha de casa e decidiu comprar um refrigerador novo. Observando a planta da nova cozinha, desenhada na escala de 1 : 50, notaram que o espaço destinado ao refrigerador tinha 3,8 cm de altura e 1,6 cm de largura. Eles sabem que os fabricantes de refrigeradores indicam que, para um bom funcionamento e fácil manejo na limpeza, esses eletrodomésticos devem ser colocados em espaços que permitam uma distância de, pelo menos, 10 cm de outros móveis ou paredes, tanto na parte superior quanto nas laterais. O casal comprou um refrigerador que caberia no local a ele destinado na nova cozinha, seguindo as instruções do fabricante. Esse refrigerador tem altura e largura máximas, em metro, respectivamente, iguais a
- A) 1,80 e 0,60.
B) 1,80 e 0,70.
C) 1,90 e 0,80.
D) 2,00 e 0,90.
E) 2,00 e 1,00.

Gabarito

Fixação

01)

	A	B	Razão A/B	Forma mais simples de A/B
a)	12	14	12/14	6/7
b)	18	21	18/21	6/7
c)	30	35	30/35	6/7
d)	600/7	100	(600/7)/100	6/7
e)	100	700/6	100/(700/6)	6/7

- 02) a) 2 : 5
b) 3 : 5
c) 2 : 3
- 03) a) 15
b) 42
c) 15

d) $\frac{16}{3}$

04) $x = 4$

05) $x = 10$

06) 1044 alunos

07) 1L de suco de limão e 4,5L de água.

08) Rui tem 60 anos, e Karina tem 25 anos.

09) C

10) B

11) D

12) $x = 12$; $y = 36$; $z = 60$

De Olho no Vestibular

Resolução:

1. Gabarito: B

- 1 polegada = 2,5 cm = 25 mm
- 16 polegadas = 400 mm
- $L = 595 + 25 = 620$
- $c = 840 + 400 = 1240$

$$\frac{L}{c} = \frac{620}{1240}$$

2. Gabarito: D

8 compassos cuja a fórmula é

$$\frac{3}{4} = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$$

24 colcheias e 12 semínimas =

$$24 \cdot \frac{1}{8} + 12 \cdot \frac{1}{4} = 6$$

3. Gabarito: D

Mapa do Br: $\frac{1}{25 \cdot 10^6}$

Mapa do RJ: $\frac{1}{4 \cdot 10^6}$

$$\frac{RJ}{Br} = \frac{\frac{1}{4 \cdot 10^6}}{\frac{1}{25 \cdot 10^6}}$$

$$\frac{RJ}{Br} = \frac{25}{4}$$

Porém, a relação que se busca é de área:

$$\frac{RJ^2}{Br^2} = \frac{25^2}{4^2}$$

$$\frac{RJ^2}{Br^2} = \frac{625}{16}$$

$$RJ^2 = 39,06 Br^2$$

4. Gabarito: E

- Básico:
Valor: 50,00
Total de gemas: 2.000
Total de moedas de ouro: 100.000

- Especial:
Valor: 100,00
Total de gemas: 4.000 (total de gemas casos adquirisse 2 pacotes básicos) + 6.000= 10.000
Total de moedas de ouro: X
- Proporção do pacote básico:

<i>Gemas</i>	
<i>Moedas de ouro</i>	
$\frac{2.000}{100.000}$	$= \frac{1}{50}$
- Total de moedas de ouro do pacote especial deve obedecer a proporção do pacote básico:

$$\frac{1}{50} = \frac{10.000}{X}$$

$$X = 500.000$$
- Logo, foram adicionadas 400.000 moedas de ouro.

5. Gabarito: A

- Tamanho na planta:



- Tamanho real:

escala 1:50

Largura: $1,6 \cdot 50 = 80 \text{ cm}$

Altura: $3,8 \cdot 50 = 190 \text{ cm}$



- Instrução do fabricante: deve haver 10 cm de distância de outros móveis ou paredes.
Largura: $80 - 20 = 60 \text{ cm}$
Altura: $190 - 10 = 180 \text{ cm}$
- Altura: 1,8m
Largura: 0,6m

[3] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. Matemática e Realidade Ensino Fundamental. 7ª Série, Atual. São Paulo, 10ª Ed. 2022.

[4] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. Matemática. 6ª Série, Moderna. São Paulo, 1ª Ed. 1995.

[5] JUCÁ, Rabin. Matemática ao Alcance de Todos – Apostila 2012.2. Fortaleza, 2012.

[6] MATERIAL de Nivelamento. CASDVestibulares. São José dos Campos, 2010.

Referências Bibliográficas

[1] GIOVANNI; CASTRUCCI; JUNIOR, Giovanni. A Conquista da Matemática. 7º Ano, FTD. São Paulo, Ed. renov. 2007.

[2] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. Matemática e Realidade Ensino Fundamental. 6ª Série, Atual. São Paulo, 5ª Ed. 2005.

Grandezas proporcionais

Vamos aprender neste capítulo a trabalhar com grandezas proporcionais, ou seja:

- O significado de uma grandeza ser proporcional a outra;
- Tipos de proporcionalidade

Introdução

Para começo de conversa, é necessário você entender o que são grandezas, já que seria meio injusto falar o que são proporcionalidades entre elas e você não saber o significado delas.

Grandeza é o que tem a possibilidade de ser medido, não se engane pensando que é o objeto, por exemplo:

→ Vou medir a altura e a temperatura de uma garrafa de café

- ✓ As grandezas são a altura e a temperatura, haja vista que elas vão ser medidas.

Viu como é fácil? Vamos agora ver um pouco sobre os tipos de proporcionalidade

Grandezas diretamente proporcionais

Dizer que duas grandezas são diretamente proporcionais é a mesma coisa que afirmar que quando uma grandeza aumenta a outra aumenta também, e se ela diminui outra diminui também.

Vamos para um exemplo bem intuitivo, imagine que você está jogando um jogo em que a cada uma hora jogada você ganha 3 pontos, ou seja:

→ Se você jogar 4 horas, você vai ter mais pontos que quem jogou 2 horas, concorda?

- ✓ Portanto, o tempo de jogo e os pontos são duas grandezas proporcionais, pois, se o tempo de jogo aumenta os pontos também aumentam, mas se o

tempo de jogo diminui, os pontos também diminuem.

- ✓ $\text{Pontos} = 3 \times \text{Horas de jogo}$
- ✓ $P = 3.t$

Basicamente a ideia por trás da frase que duas grandezas são diretamente proporcionais é essa, que se uma das grandezas aumenta a outra aumenta, e se uma diminui a outra diminui também.

Grandezas inversamente proporcionais

O próprio nome já te diz muita coisa, se duas grandezas são **INVERSAMENTE** proporcionais, significa que se uma cresce a outra tem que diminuir, ou vice-versa.

Pense na seguinte situação, você a cada hora de estudo, consegue desatrasar dois conteúdos do cursinho ou da faculdade, isso aqui seria um sonho né? Então, perceba que a quantidade de conteúdos atrasados diminui a cada hora de estudo, ou seja:

→ Quanto mais você estuda, menos conteúdo atrasado você tem.

Outro exemplo seria imagina a velocidade e o tempo para percorrer o caminho da escola para casa, quão mais rápido você andar, menos tempo vai durar sua volta para casa.

Fator/constante de Proporcionalidade

Uma coisa muito importante é perceber que sempre numa relação de proporcionalidade vai existir um valor que é responsável por te dizer o quanto as grandezas são proporcionais uma às outras, por exemplo:

Horas de Estudo	2	3	4	5
Páginas Lida	40	60	80	100

→ É fácil perceber que a cada 1 hora de estudo que se passa, 20 páginas são lidas, ou seja, uma

relação diretamente proporcional.

→ Vamos ver como representar isso matematicamente:

$$\checkmark \frac{\text{Tempo}}{\text{Lidas}} = \frac{2}{40} = \frac{3}{60} = \frac{4}{80} = \frac{5}{100} = k$$

✓ Sendo k a constante de proporcionalidade e de valor $k=1/20$

✓ Essa constante nos diz que a proporção entre tempo e páginas lidas é de $1/20$, ou seja, a cada 1 hora de leitura eu consigo ler 20 páginas, legal né?

Regra de três

A regra de três é um bizu SUPER IMPORTANTE, e você provavelmente vai ouvir falar que essa técnica é essencial para a química. Então vem com a gente!!

Basicamente a regra de três vai funcionar assim, suponha que:

1. No enem são 90 questões para 300 minutos (5 horas de prova), quanto tempo você tem para resolver cada questão?

- 90 questões → 300 minutos
- 1 questão → x minutos
- Multiplica um pelo outro em forma cruzada, assim oh:

$$90 \text{ questões} \rightarrow 300 \text{ minutos}$$

$$1 \text{ questão} \rightarrow x \text{ minutos}$$

$$300 \cdot 1 = 90 \cdot x$$

$$X = 300/90 = \text{aproximadamente } 3 \text{ minutos}$$

- Ou seja, com a regra de 3, você descobriu que vai ter aproximadamente 3 minutos por questão, bem intuitivo né?

Para saber mais

Existem algumas relações interessantes quando você trata de proporcionalidade entre números, vamos

imaginar que a e b tem a mesma proporção que c e d, vale a seguinte

$$\rightarrow a/b = c/d$$

→ Valem as seguintes propriedades:

$$\checkmark (a+b)/b = (c+d)/d$$

$$\checkmark (a-b)/b = (c-d)/d$$

$$\checkmark d/b = c/a$$

→ Para facilitar, vamos substituir por números

$$\rightarrow 6/3 = 12/6 = 2$$

$$\checkmark 9/3 = 18/6 = 3$$

$$\checkmark 3/3 = 6/6 = 1$$

$$\checkmark 6/3 = 12/6 = 2$$

Muito massa né? essas relações são MUITO importantes e podem te safar de questões mais complicadas.

Exercícios

Fixação

1.) Se um coelho, muito forte, consegue saltar 3 metros a cada salto, quantos saltos seriam necessários para ele alcançar a cenoura que está a 90 metros dele?

2.) Rafael é um padeiro de sucesso e vendeu 4 pães por R\$20, quanto vale cada pão de Rafael?

De Olho no Vestibular

1.) (Enem/2011) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2.000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de:

- a) 1:250
- b) 1:2500
- c) 1:25000
- d) 1:250000
- e) 1:25000000

2.) (Enem 2012) — Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

Capozzoli, U. Origem e Evolução das Constelações. Scientific American Brasil. Nº 2. 2010.

- a) 12 kg.
 - b) 16 kg.
 - c) 24 kg.
 - d) 36 kg.
 - e) 75 kg.
- 3.)

Fontes alternativas

Há um novo impulso para produzir combustível a partir de gordura animal. Em abril, a High Plains Bioenergy inaugurou uma biorrefinaria próxima a uma fábrica de processamento de carne suína em Guymon, Oklahoma. A refinaria converte a gordura do porco, juntamente com o óleo vegetal, em biodiesel. A expectativa da fábrica é transformar 14 milhões de quilogramas de banha em 112 milhões de litros de biodiesel.

Revista Scientific American. Brasil, ago. 2009 (adaptado).

Considere que haja uma proporção direta entre a massa de banha transformada e o volume de biodiesel produzido.

Para produzir 48 milhões de litros de biodiesel, a massa de banha necessária, em quilogramas, será de, aproximadamente,

- A) 6 milhões.
- B) 33 milhões.
- C) 78 milhões.
- D) 146 milhões.
- E) 384 milhões.

Gabarito

Fixação

- 1. 30 saltos
- 2. R\$ 5,00

De Olho no Vestibular

1	2	3			
E	A	A			

Referências Bibliográficas

- [1] Proporcionalidade. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/proporcionalidade/>>.. Acesso em: 21 Agosto. 2023.
- [2] Exercícios sobre grandezas diretamente proporcionais - Mundo Educação. Disponível em: <<https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-as-grandezas-diretamente-proporcionais.htm#resposta-5807>>. Acesso em: 24 Agosto. 2023.

Regra de três

A finalidade deste capítulo é apresentar o conceito da regra de três e suas propriedades. Ao final do capítulo, o leitor será capaz de:

- Resolver problemas por meio da aplicação da regra de três simples.
- Resolver problemas por meio da aplicação da regra de três composta

1.Introdução

Frequentemente estamos diante de problemas que envolvem grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Vejamos alguns exemplos:

Exemplos:

- Num acampamento, há 48 pessoas e alimento suficiente para um mês. Se 16 pessoas forem embora, para quantos dias ainda haverá alimento?
- Sabe-se que 20 operários, trabalhando 8 horas por dia, gastam 18 dias para construir um muro de 300 metros. Quanto tempo levará uma equipe de 16 operários, trabalhando 9 horas por dia, para construir um muro de 225 metros?

Regra de três é um processo prático para resolver problemas dessa natureza.

2. Regra de três simples

Usaremos, agora, os conhecimentos acumulados nos capítulos anteriores para resolver problemas que envolvem duas grandezas direta ou inversamente proporcionais. Tais problemas são denominados regra de três simples.

Para tal, deveremos seguir o procedimento prático detalhado abaixo:

1º) Construir uma tabela dispondo as grandezas da mesma espécie em colunas (filas verticais) e as grandezas de espécies diferentes em linhas (filas horizontais) em correspondência.

2º) Utilizar uma incógnita para simbolizar o valor desconhecido;

3º) Determinar se as grandezas estudadas são direta ou inversamente proporcionais.

4º) Colocar flechas concordantes (com o mesmo sentido) se as grandezas forem diretamente proporcionais ou flechas discordantes (sentidos diferentes) se forem inversamente proporcionais.

5º) Montar uma proporção com as razões correspondentes, mantendo sua disposição se as flechas forem concordantes e invertendo uma delas se as flechas forem discordantes.

6º) Resolver a equação.

Exercício resolvido 1:

Se um ônibus percorre uma estrada com velocidade média de 80 km/h, quantos quilômetros percorrerá em 2 horas?

Resolução:

Podemos organizar os dados do problema numa tabela, da seguinte maneira:

Tempo	Espaço	
1h	80 km	←
2h	x	←
↑	↑	
Grandezas de uma mesma espécie.		
		Grandezas de espécies diferentes em correspondência.

A letra x representa o valor desconhecido (a incógnita) do problema.

Agora, devemos identificar o tipo de relação. Perceba que quando o valor do tempo aumenta, o valor do espaço percorrido aumenta na mesma razão.

Assim, estamos trabalhando com grandezas diretamente proporcionais. Então, colocamos flechas concordantes na tabela.

Tempo	Espaço
1h	80km
2h	x

Montamos a proporção:

$$\frac{1}{2} = \frac{80}{x}$$

Por fim, resolvemos a equação:

$$\frac{1}{2} = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 80 \cdot 2$$

$$x = 160$$

Portanto, o espaço percorrido pelo ônibus em 2 horas será de 160 km.

Exercício resolvido 2:

Dois pintores gastam 18 horas para pintar uma parede. Quanto tempo levaria 4 pintores para fazer o mesmo serviço?

Resolução:

De modo análogo ao exercício anterior, organizamos os dados em uma tabela:

Pintores	Tempo	
2	18h	← Grandezas de espécies diferentes em correspondência.
4	x	←
↑	↑	Grandezas de uma mesma espécie.

A letra x representa o valor desconhecido (a incógnita) do problema.

Agora, devemos identificar o tipo de relação. Perceba que quando o número de pintores aumenta, o tempo necessário diminui na mesma razão.

Assim, estamos trabalhando com grandezas inversamente proporcionais. Então, colocamos flechas discordantes na tabela.

Pintores	Tempo	
2	18h	↓
4	x	↑

Após isso, realiza-se a inversão de uma das razões e montamos a proporção:

$$\frac{4}{2} = \frac{18}{x}$$

Por fim, resolvemos a equação:

$$\frac{4}{2} = \frac{18}{x} \Rightarrow 4x = 18 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{4}$$

$$x = 9$$

Portanto, o tempo necessário para 4 pintores fazerem o serviço será de 9h.

Exercício resolvido 3:

Duas máquinas gastam 96 minutos para aparar a grama de um quintal. Quanto tempo levaria 6 máquinas para fazer o mesmo serviço?

Resolução:

De modo análogo ao exercício anterior, organizamos os dados em uma tabela:

Máquinas	Tempo	
2	96 min	← Grandezas de espécies diferentes em correspondência.
6	x	←
↑	↑	Grandezas de uma mesma espécie.

Perceba que quando o número de máquinas aumenta, o tempo necessário diminui na mesma razão.

Assim, estamos trabalhando com grandezas inversamente proporcionais. Então, colocamos flechas discordantes na tabela.

Máquinas	Tempo	
2	96 min	↓
6	x	↑

Após isso, realiza-se a inversão de uma das razões e montamos a proporção:

$$\frac{6}{2} = \frac{96}{x}$$

Por fim, resolvemos a equação:

$$\frac{6}{2} = \frac{96}{x} \Rightarrow 6x = 96 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = 192 \Rightarrow x = \frac{192}{6}$$

$$x = 32$$

Portanto, o tempo necessário para 6 pintores fazerem o serviço será de 32 min.

3. Regra de três composta

Dá-se esse nome aos problemas que envolvem mais de duas grandezas variáveis e proporcionais, isto é, em que há proporcionalidade composta.

Na resolução destes problemas seguiremos procedimento análogo ao explicado anteriormente e usaremos as seguintes propriedades:

1ª propriedade:

Se uma grandeza A é diretamente proporcional a uma grandeza B e a uma grandeza C, então A é diretamente proporcional ao produto das grandezas B e C.

2ª propriedade:

Se uma grandeza A é diretamente proporcional a uma grandeza B e inversamente proporcional a uma grandeza C, então A é diretamente proporcional à razão $\frac{B}{C}$.

Exercício resolvido 4:

Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160m^3 de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125m^3 ?

Resolução:

Podemos organizar os dados do problema numa tabela, da seguinte maneira:

Tempo	Caminhões	Volume
8h	20	160m^3
5h	x	125m^3

A letra x representa o valor desconhecido (a incógnita) do problema.

Agora, devemos identificar todos os tipos de relações, comparando cada grandeza com aquela onde está a incógnita. Perceba que:

- Quando o valor do tempo aumenta, o número de caminhões diminui na mesma razão.
- Quando o valor do volume aumenta, o número de caminhões aumenta na mesma razão.

Logo, podemos concluir que:

- Tempo e número de caminhões são grandezas inversamente proporcionais.
- Volume e número de caminhões são grandezas diretamente proporcionais

Colocamos flechas concordantes se as grandezas forem diretamente proporcionais e flechas discordantes se forem inversamente proporcionais. Logo, temos:

Tempo	Caminhões	Volume
8h	20	160m^3
5h	x	125m^3

Baseando-se nas duas propriedades apresentadas anteriormente, montamos a proporção.

Para isso, igualamos a razão que contém a incógnita ao produto das outras razões, de acordo com o sentido da seta.

Quando as setas forem discordantes, invertemos os termos da razão, assim, temos:

$$\frac{20}{x} = \frac{160}{125} \cdot \frac{5}{8}$$

Por fim, resolvemos a equação:

$$\begin{aligned} \frac{20}{x} &= \frac{160}{125} \cdot \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{20}{x} = \frac{4}{5} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x &= 20 \cdot 5 \Rightarrow 4x = 100 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{100}{4} \Rightarrow x = 25 \end{aligned}$$

Portanto, serão necessários 25 caminhões.

Macete:

Exemplo: Trabalhando durante 6 dias, 5 operários produzem 400 peças. Quantas peças desse mesmo tipo podem ser produzidas por 7 operários, trabalhando durante 9 dias?

- **Primeiramente, defina-se as grandezas pertencentes ao processo e aquela pertencente ao produto.**
- **Grandezas pertencentes ao**

processo são os dias e o número de operários.

- A grandeza pertencente ao produto é o número de peças produzidas.
- Obs: O produto é tudo aquilo que será produzido no final, por exemplo, um certo produto ou um serviço. Já número de dias, operários, horas por dia, não podem ser produzidos, logo, são pertencentes ao processo.

Processo		Produto
Dias	Operá.	Peças
6	5	400
9	7	X

$$6 \cdot 5 \cdot X = 9 \cdot 7 \cdot 400$$

$$X = 840$$

Serão produzidas 840 peças.

- **Exemplo:** Um motociclista percorre em média 200 km em 2 dias, se rodar durante 4 horas por dia. Em quantos dias esse motociclista percorrerá 500 km, se rodar 5 horas por dia?
- **Grandezas pertencentes ao processo são números de dias e o tempo gasto por dia.**
- **Grandeza pertencente ao produto é a quilometragem que será percorrida.**

Processo		Produto
Dias	H/D	Km
2	4	200
X	5	500

$$2 \cdot 4 \cdot 500 = X \cdot 5 \cdot 200$$

$$X = 4$$

O motociclista levará 4 dias para percorrer 500 km, se rodar 5 horas por dia.

Exercícios

Fixação

01) Uma máquina varredeira limpa uma área de 5100m² em 3 horas de trabalho. Nas mesmas condições, em quanto tempo limpará uma área de 11900m²?

- a) 7 horas
- b) 5 horas
- c) 9 horas
- d) 4 horas

02) Uma gravura de forma retangular, medindo 20 cm de largura por 35 cm de comprimento, deve ser ampliada para 1,2m de largura. O comprimento correspondente será:

- a) 0,685m
- b) 1,35m
- c) 2,1m
- d) 6,85m
- e) 18m

03) Cem quilogramas de trigo fornecem 85kg de farinha. Quantos quilogramas de farinha se obtêm com 150 sacas de trigo de 75kg cada uma?

04) Quatorze pedreiros levam 180 dias para construir uma casa. Quanto tempo levarão 10 pedreiros para construir a mesma casa?

05) Um trem percorre 240km em 3 horas. Quanto tempo levará esse trem, com a mesma velocidade, para percorrer 400km?

06) O eixo de um motor dá 2376 voltas em 9 minutos. Quantas voltas dará em 1h27min?

07) Uma torneira enche um tanque em 2 horas. Em quanto tempo (em minutos) 3 torneiras iguais a primeira encherão o mesmo tanque?

08) Se 16 operários levam 3 dias para completar uma obra, quantos operários seriam necessários para completar essa obra em 2 dias?

09) Qual é a altura de um edifício cuja sombra tem 6 m no mesmo instante em que um poste de 2 m de altura projeta uma sombra de 0,6 m?

10) Trabalhando durante 40 minutos, uma máquina produz 100 peças. Quantas peças essa máquina produzirá em 2 horas?

11) Para percorrer 360 km de uma estrada, um automóvel consome 30L de gasolina. Para percorrer 450 km, quanto consumirá?

12) Um alfaiate pagou R\$ 960,00 por uma peça de fazenda e R\$768 por uma outra de mesma qualidade.

Qual o comprimento de cada uma das peças, sabendo-se que a primeira tem 12m a mais do que a segunda?

13) De duas fontes, a primeira jorra 18 L por hora e a segunda 80 L. Qual é o tempo necessário para a segunda jorrar a mesma quantidade de água que a primeira jorra em 25 minutos?

14) Empregaram-se 27,4kg de lã para fabricar 24m de tecido de 60cm de largura. Qual será o comprimento do tecido que se poderia fabricar com 3,425 toneladas de lã para se obter uma largura de 0,90m?

15) Uma família composta de 6 pessoas consome, em 2 dias, 3kg de pão. Quantos quilos serão necessários para alimentar-se durante 5 dias, estando ausentes 2 pessoas?

16) Uma equipe de 15 homens extrai, em 30 dias 3600kg de carvão. Se for aumentada para 20 homens, em quantos dias conseguirá extrair 5600kg de carvão?

17) Vinte operários trabalhando 8 horas por dia, gastam 18 dias para construir um muro de 30 metros. Quanto tempo levará uma turma de 16 operários, trabalhando 9 horas por dia, para construir um muro de 255 metros?

18) Dez operários, com capacidade de trabalho igual a 45, fazem 150 metros de uma obra em 20 dias. Qual deve ser a

capacidade de trabalho de 5 operários para fazer 20 metros da mesma obra em 60 dias?

19) Com 16 máquinas de costura aprontaram-se 720 uniformes em 6 dias de trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para confeccionar 2160 uniformes em 24 dias?

20) Um avião consome 400 litros de gasolina por hora. Calcular o consumo numa etapa de 2 horas 10 minutos e 3 segundos.

De Olho no Vestibular

1.(ENEM)Um agricultor sabe que a colheita da safra de soja será concluída em 120 dias caso utilize, durante 10 horas por dia, 20 máquinas de um modelo antigo, que colhem 2 hectares por hora. Com o objetivo de diminuir o tempo de colheita, esse agricultor optou por utilizar máquinas de um novo modelo, que operam 12 horas por dia e colhem 4 hectares por hora.

Quantas máquinas do novo modelo ele necessita adquirir para que consiga efetuar a colheita da safra em 100 dias?

- a) 7
- b) 10
- c) 15
- d) 40
- e) 58

2.(ENEM) Uma indústria tem um setor totalmente automatizado.

São quatro máquinas iguais, que trabalham simultânea e ininterruptamente durante uma jornada de 6 horas. Após esse período, as máquinas são desligadas por 30 minutos para a manutenção, ficará parada até a próxima manutenção. Certo dia, era necessário que as quatro máquinas produzissem um total de 9000 itens. O trabalho começou a ser feito às 8 horas.

Durante uma jornada de 6 horas, produziram 6000 itens, mas na manutenção observou-se que uma máquina precisava ficar parada. Quando o serviço foi finalizado, as três máquinas que continuaram operando passaram por uma nova manutenção, chamada manutenção de esgotamento.

Em que horário começou a manutenção de esgotamento?

- A) 16 h 45 min
- B) 18 h 30 min
- C) 19 h 50 min
- D) 21 h 15 min
- E) 22 h 30 min

3. (FUVEST) Um vídeo tem três minutos de duração. Se o vídeo for reproduzido, desde o seu início, com velocidade de 1,5 vezes a velocidade original, o tempo de reprodução do vídeo inteiro será de

- A) 1min30s.
- B) 1min50s.
- C) 2min00s.
- D) 2min30s.
- E) 2min50s.

4. (ENEM) Uma empresa deseja iniciar uma campanha publicitária divulgando uma promoção para seus possíveis consumidores. Para esse tipo de campanha, os meios mais viáveis são a distribuição de panfletos na rua e anúncios na rádio local. Considera-se que a população alcançada pela distribuição de panfletos seja igual à quantidade de panfletos distribuídos, enquanto que a alcançada por um anúncio na rádio seja igual à quantidade de ouvintes desse anúncio. O custo de cada anúncio na rádio é de R\$ 120,00, e a estimativa é de que seja ouvido por 1500 pessoas. Já a produção e a distribuição dos panfletos custam R\$ 180,00 cada 1000 unidades. Considerando que cada pessoa será alcançada por um único desses meios de divulgação, a empresa pretende investir em ambas as mídias.

Considere X e Y os valores (em real) gastos em anúncios na rádio e com panfletos, respectivamente. O número de pessoas alcançadas pela campanha será dado pela expressão

- A) $\frac{50X}{4} + \frac{50Y}{9}$
- B) $\frac{50X}{9} + \frac{50Y}{4}$
- C) $\frac{4X}{50} + \frac{4Y}{50}$
- D) $\frac{50}{4X} + \frac{50}{9Y}$
- E) $\frac{50}{9X} + \frac{50}{4Y}$

5. (ENEM) Em uma corrida automobilística, os carros podem fazer paradas nos boxes para efetuar trocas de pneus. Nessas trocas,

o trabalho é feito por um grupo de três pessoas em cada pneu. Considere que os grupos iniciam o trabalho no mesmo instante, trabalham à mesma velocidade e cada grupo trabalha em um único pneu. Com os quatro grupos completos, são necessários 4 segundos para que a troca seja efetuada. O tempo gasto por um grupo para trocar um pneu é inversamente proporcional ao número de pessoas trabalhando nele. Em uma dessas paradas, um dos trabalhadores passou mal, não pôde participar da troca e nem foi substituído, de forma que um dos quatro grupos de troca ficou reduzido. Nessa parada específica, com um dos grupos reduzido, qual foi o tempo gasto, em segundo, para trocar os quatro pneus?

- a) 6,0
- b) 5,7
- c) 5,0
- d) 4,5
- e) 4,4

Gabarito

Fixação

- 01) A
- 02) C
- 03) 9562,5
- 04) 252 dias
- 05) 5 h
- 06) 22968
- 07) 40 min
- 08) 24 operários
- 09) 20 m
- 10) 300
- 11) 37,5 l
- 12) 48 m e 60 m
- 13) 5,625 = 5 minutos e 37,5 segundos
- 14) 2000 m
- 15) 5 kg
- 16) 35 dias
- 17) 170 dias
- 18) 4
- 19) 12 máquinas
- 20) 867 l

De Olho no Vestibular

- 1. Gabarito: B

Processo				Produto
Dias	H/d	Máq	Hect/h	Colheita
120	10	20	2	C
100	12	X	4	C

$$120 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 2 \cdot C = 100 \cdot 12 \cdot X \cdot 4 \cdot C$$

$$x = 10$$

2. Gabarito: B

- Inicia às 8h da manhã, com 4 máquinas trabalhando por 6 horas e produzindo 6000 itens.
- Após as 6 horas, 14h as máquinas param para manutenção e ficam paradas por 30 minutos, voltando às 14h 30 min. Porém, apenas 3 máquinas voltam.
- Às 14 h 30 min voltam 3 máquinas, que devem concluir o serviço, produzir 3000 itens, durante X horas.

Processo		Produto
Máq	Horas	Itens
4	6	6000
3	X	3000

$$4 \cdot 6 \cdot 3000 = 3 \cdot X \cdot 6000$$

$$x = 4 \text{ horas}$$

- 14h 30 min + 4 horas = 18 h 30 min

3. Gabarito: C

↑	V	—	3 min	↓
	1,5 V	—	X min	

$$\frac{1,5V}{V} = \frac{3}{X}$$

$$X = 2 \text{ min}$$

4. Gabarito: A

- Rádio:

R= total de pessoas alcançadas pelo rádio

120 reais	—	1500 pessoas
X reais	—	R

$$R = \frac{1500 \cdot X}{120}$$

$$R = \frac{50 \cdot X}{4}$$

- Panfletos:

P= total de pessoas alcançadas pelos panfletos

180 reais	—	1000 pessoas
Y reais	—	P

$$P = \frac{1000 \cdot Y}{180}$$

$$P = \frac{50 \cdot Y}{9}$$

- Total:

$$R + P = \frac{50 \cdot X}{4} + \frac{50 \cdot Y}{9}$$

5. Gabarito: A

↑	3 pessoas	—	4 seg	↓
	2 pessoas	—	X seg	

$$\frac{4}{X} = \frac{2}{3}$$

$$X \cdot 2 = 4 \cdot 3$$

$$X = 6 \text{ seg}$$

Referências Bibliográficas

- [1] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. Matemática. 6ª Série, Moderna. São Paulo, 1ª Ed. 1995.
- [2] MATERIAL de Nivelamento. CASDVestibulares. São José dos Campos, 2010.
- [3] JUCÁ, Rabin. Matemática ao Alcance de Todos – Apostila 2012.2. Fortaleza, 2012.

Porcentagem

1. Razão centesimal

Toda razão cujo conseqüente é igual a 100 denomina-se razão centesimal. Em outras palavras, é uma fração que possui denominador igual a 100.

Exemplos:

- $\frac{5}{100}$;
- $\frac{73}{100}$;
- $\frac{115}{100}$;

É claro que as razões centesimais podem ser representadas por numerais decimais, como quaisquer outras frações.

Exemplos:

- $\frac{5}{100} = 0,05$;
- $\frac{73}{100} = 0,73$;
- $\frac{115}{100} = 1,15$;

Existe uma outra forma de representar as razões centesimais muito usada nas atividades econômicas em geral.

Exemplos:

- $\frac{5}{100} = 0,05 = 5\%$
(Lê-se: cinco por cento)
- $\frac{73}{100} = 0,73 = 73\%$
(Lê-se: setenta e três por cento)
- $\frac{115}{100} = 1,15 = 115\%$
(Lê-se: cento e quinze por cento)

Cada um dos numerais 5%, 73%, 115%, ... é chamado taxa percentual.

A taxa percentual é muito utilizada por estabelecer um termo fixo de comparação (100) que é substituído pelo símbolo %.

A ideia de porcentagem é a de representar partes de um total de 100 partes. Daí a leitura do símbolo % ser “por cento”.

Observe alguns exemplos abaixo:

Exemplos:

- O CASD Vestibulares aprovou 80% dos seus alunos no vestibular através do ENEM.
Isso significa que de cada 100 alunos, 80 foram aprovados.
- O desconto nos preços dos automóveis com a redução do IPI foi de 5%.
Isso significa que em cada R\$ 100,00 houve uma redução de R\$ 5,00.

Observações:

I. A expressão por cento vem do latim per centum, que significa “por um cento”. Daí, podemos utilizar indistintamente as palavras porcentagem ou percentagem.

II. Uma razão da forma $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, pode ser escrita na forma percentual. Conforme pode ser observado abaixo:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\times 25} & & \\ \frac{3}{4} & = & \frac{75}{100} = 75\% \\ \xrightarrow{\times 25} & & \end{array}$$

$$\frac{1}{8} = 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$$

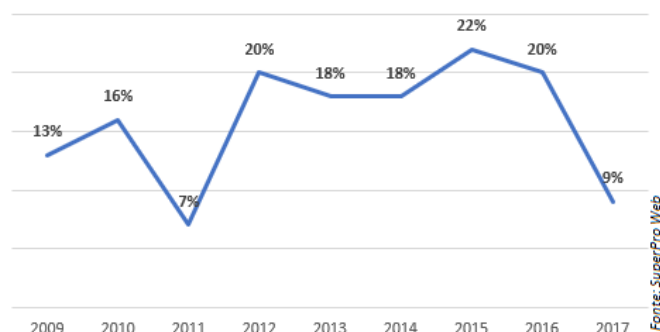
Por meio dos exemplos então, pode-se concluir que se quisermos transformar qualquer fração em porcentagem, basta transformarmos o denominador dessa fração no número 100, de acordo com as operações convenientes.

2. Porcentagem

Diariamente, lemos em jornais, revistas, estabelecimentos comerciais, informações envolvendo taxas percentuais.



Questões de Porcentagem (ENEM)



Quando aplicamos uma taxa percentual a um determinado valor de uma certa grandeza, estamos calculando uma porcentagem.

3. Problemas envolvendo porcentagem

Estudaremos agora alguns tipos de problema que envolvem porcentagem.

3.1 Determinação de uma Porcentagem

De acordo com um levantamento feito, 37% da população brasileira dorme ao menos oito horas por noite. De um total de 202 milhões de habitantes, quantas pessoas têm esse hábito?

Para solucionar esse problema, devemos aplicar a taxa percentual (37%) sobre o total de habitantes. Assim:

$$37\% \text{ de } 202.000.000 = \frac{37}{100} \cdot 202.000.000 = 74.740.000$$

Logo, 74.740.000 habitantes representam os 37% que dorme ao menos oito horas por noite. Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplos:

- Calcule 40% de 500.

$$40\% \text{ de } 500 = \frac{40}{100} \cdot 500 = 200$$

- Calcule 25% de 200 quilogramas.

$$25\% \text{ de } 200 = \frac{25}{100} \cdot 200 = 50 \Rightarrow 50 \text{ quilogramas.}$$

Observação:

Uma porcentagem nunca aparece isolada. Não tem sentido dizer apenas 30% ou 40%. Dizemos sempre 30% ou 40% de um valor.

Uma segunda abordagem possível é através da realização de uma regra de três:

Exemplo:

- Calcule 40% de 500.

Neste caso, 500 é o nosso total, ou seja, 100%. Queremos descobrir qual é o valor numérico que representa 40% desses 500. Pela regra de três, temos que:

$$\begin{array}{rcl} 100\% & \text{---} & 500 \\ 40\% & \text{---} & x \end{array}$$

$$\frac{100}{40} = \frac{500}{x}$$

$$x = 200$$

3.2 – Determinação de um todo (100%) dada uma taxa percentual

Se 30% de um número é 12. Quanto vale esse número?

Para solucionar esse problema, podemos proceder de duas maneiras. Na primeira, construímos uma equação do 1º grau, conforme podemos observar abaixo:

Solução 1:

Seja x o número procurado.

$$30\% \text{ de } x = 12 \Rightarrow \frac{30}{100} \cdot x = 12 \Rightarrow \frac{3}{10} x = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 12 \cdot 10 \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{3}$$

$$x = 40$$

Se preferirmos, podemos resolver o problema através de uma regra de três simples.

Solução 2:

$$\begin{array}{rcl} 30\% & \text{---} & 12 \\ 100\% & \text{---} & x \end{array}$$

$$\frac{30}{100} = \frac{12}{x}$$

$$x = 40$$

3.3 – Determinação da Taxa Percentual

Em um grupo de 300 alunos do CASDvest, 75 são moradores de Jacareí. Os alunos de Jacareí representam quantos por cento do grupo?

Para calcular a taxa percentual, basta dividirmos a quantidade de alunos de Jacareí pela quantidade total do grupo, em seguida, escrevemos o quociente na forma de uma razão centesimal.

$$\frac{75}{300} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Exercícios resolvidos

- Os ingressos para a final do campeonato de futebol foram aumentados de R\$ 12,00 para 15,00.

Qual a taxa porcentual do aumento?

Inicialmente, devemos determinar o aumento absoluto para, em seguida, determinar o aumento percentual.

$$\text{Aumento: } 15 - 12 = 3.$$

Assim como no caso anterior, podemos solucionar o problema de duas formas. A primeira, através de uma equação do 1º grau:

Solução 1:

Indicando a taxa procurada por $x\%$, temos:

$$x\% \text{ de } 12 = 3$$

$$\frac{x}{100} \cdot 12 = 3$$

$$12x = 3 \cdot 100$$

$$12x = 300$$

$$x = \frac{300}{12}$$

$$x = 25\%$$

A segunda solução, utiliza regra de três simples:

Solução 2:

$$\begin{array}{rcl} 12 & \text{---} & 100\% \\ 3 & \text{---} & x\% \end{array}$$

$$\frac{12}{3} = \frac{100}{x}$$

$$x = 25\%$$

- Se eu comprei uma ação de um clube por R\$250,00 e a revendo por R\$300,00, qual a taxa percentual de lucro obtida?

A taxa percentual de lucro obtida é de 20%. (Tente fazer você mesmo com a ajuda do exemplo anterior).

Exercícios

Fixação

01) Explique, de forma sucinta, o significado das expressões:

- No colégio onde estudo, uma pesquisa revelou que 85% dos alunos praticam esportes.
- O aluguel da minha casa teve um aumento de 13%.
- No país x , 20% da população é analfabeta.
- O número de artigos publicados por pesquisadores brasileiros cresceu 19% em apenas um ano.

02) Escreva, no caderno, as frações na forma de uma taxa percentual:

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| a) $\frac{5}{100}$ | b) $\frac{17}{100}$ |
| c) $\frac{60}{100}$ | d) $\frac{8}{125}$ |
| e) $\frac{15}{100}$ | f) $\frac{220}{100}$ |
| g) $\frac{37,5}{100}$ | h) $\frac{250}{100}$ |
| i) $\frac{125}{100}$ | |

03) Calcule as porcentagens abaixo:

- 2% de 700.
- 30% de 1200.
- 40% de 48.
- 150% de 600.

04) Uma empresa tinha 820 funcionários. Este mês, para efeito de economia, a

empresa dispensou 35% desses funcionários. Quantos funcionários foram demitidos?

05) Ao comprar 50 figurinhas, Caio verificou que 24% delas eram repetidas. Quantas figurinhas ele pode aproveitar?

06) Sabendo que o número 615 representa 25% de um número x , determine esse número x .

07) Por ter obtido notas baixas, Gisele perdeu R\$18,00 da sua mesada, o que corresponde a 20%. Qual o valor da antiga mesada de Gisele?

08) Sabe-se que 32,5% de uma quantia corresponde a R\$130,00. Qual é essa quantia?

09) Um aumento de 150 reais representa quantos por cento do preço de um artigo que custa 500 reais?

10) Um provão tem 80 questões. Angélica acertou 56. Qual é a taxa percentual de acerto dessa aluna?

11) O preço de um eletrodoméstico é R\$ 600,00, mas há um desconto de R\$ 150,00. Qual é a taxa percentual de desconto?

12) Na última eleição para prefeito de uma cidade, o candidato eleito teve 55% dos votos. Sabe-se que nessa cidade há 31 712 eleitores inscritos e que 572 eleitores não votaram. Quantos votos teve o candidato eleito?

13) Numa classe de 40 alunos, 18 são meninas. Qual é a taxa de porcentagem das meninas dessa classe?

14) Gastei 30% do meu salário comprando um vestido. Calcule meu salário sabendo que paguei R\$ 60,00 pelo vestido.

15) Uma pessoa ao falir só pode pagar $\frac{17}{36}$ do que deve. Se possuísse mais R\$ 23.600,00 poderia pagar 80% da dívida. Quanto era a dívida?

De Olho no Vestibular

1. (ENEM 2018) Devido ao não cumprimento das metas definidas para a campanha de vacinação contra a gripe comum e o vírus H1N1 em um ano, o Ministério da Saúde anunciou a prorrogação da campanha por mais uma semana.

A tabela apresenta as quantidades de pessoas vacinadas dentre os cinco grupos de risco até a data de início da prorrogação da campanha.

Balanço parcial nacional da vacinação contra a gripe			
Grupo de risco	População (milhão)	População já vacinada	
		(milhão)	(%)
Crianças	4,5	0,9	20
Profissionais de saúde	2,0	1,0	50
Gestantes	2,5	1,5	60
Indígenas	0,5	0,4	80
Idosos	20,5	8,2	40

Disponível em: <http://portalsaude.saude.gov.br>. Acesso em: 16 ago. 2012.

Qual é a porcentagem do total de pessoas desses grupos de risco já vacinadas?

- A)12
- B)18
- C)30
- D)40
- E)50

2. (ENEM 2018) O colesterol total de uma pessoa é obtido pela soma da taxa do seu “colesterol bom” com a taxa do seu “colesterol ruim”. Os exames periódicos, realizados em um paciente adulto, apresentaram taxa normal de “colesterol bom”, porém, taxa do “colesterol ruim” (também chamado de LDL) de 280 mg/dL. O quadro apresenta uma classificação de acordo com as taxas de LDL em adultos.

Taxa de LDL (mg/dL)	
Ótima	Menor do que 100
Próxima de ótima	De 100 a 129
Limite	De 130 a 159
Alta	De 160 a 189
Muito alta	190 ou mais

O paciente, seguindo as recomendações médicas sobre estilo de vida e alimentação, realizou o exame logo após o primeiro mês, e a taxa de LDL reduziu 25%. No mês seguinte, realizou novo exame e constatou uma redução de mais 20% na taxa de LDL.

De acordo com o resultado do segundo exame, a classificação da taxa de LDL do paciente é

- A) ótima.
- B) próxima de ótima.
- C) limite.
- D) alta.
- E) muito alta.

3. - (Enem-2019) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R\$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R\$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado. O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

- a) 398,02.
- b) 400,00.
- c) 401,94.
- d) 404,00.
- e) 406,02.

4. (Unicamp 2022) Para conter uma certa epidemia viral, uma vacina será aplicada a uma população. Sabe-se que:

- a efetividade de uma vacina pode ser entendida como sendo a porcentagem dos indivíduos vacinados que estarão imunes à doença; e

- para controlar a epidemia, a porcentagem mínima de uma dada população a ser imunizada é dada pela fórmula $I(R_0) = 100(R_0 - 1)/R_0$, em que $R_0 > 1$ é um valor associado às características da epidemia.

Assume-se, ainda, que uma eventual imunização somente é adquirida por meio da vacina.

Em relação à epidemia e à vacinação, é correto afirmar que

- a) a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia é sempre maior que 50%.
- b) para uma vacina, quanto maior R_0 , menor a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia.
- c) para uma vacina, quanto maior R_0 , maior a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia.

d) para um dado R_0 , quanto maior a efetividade da vacina, maior a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia.

5. (Unicamp 2022) Para conter uma certa epidemia viral, uma vacina será aplicada a uma população. Sabe-se que:

- a efetividade de uma vacina pode ser entendida como sendo a porcentagem dos indivíduos vacinados que estarão imunes à doença; e

- para controlar a epidemia, a porcentagem mínima de uma dada população a ser imunizada é dada pela fórmula $I(R_0) = 100(R_0 - 1)/R_0$, em que $R_0 > 1$ é um valor associado às características da epidemia.

Assume-se, ainda, que uma eventual imunização somente é adquirida por meio da vacina.

Assuma que $R_0 = 2$. Sabendo que uma dada vacina tem 80% de efetividade, em qual dos intervalos se encontra a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada para controlar a epidemia?

- a) Entre 46% e 55%.
- b) Entre 56% e 65%.
- c) Entre 66% e 75%.
- d) Entre 76% e 85%.

Gabarito

Fixação

01)

- a) 85 em cada 100 alunos praticam esportes.
- b) O aumento foi de 13 reais em cada 100 reais. Ou é necessário pagar 13 reais a mais a cada 100 reais pago.
- c) 20 pessoas em cada 100 são analfabetas.
- d) O aumento foi de 19 artigos para cada 100 artigos.

02)

- | | | |
|----------|---------|---------|
| a) 5% | b) 17% | c) 60% |
| d) 6,4% | e) 15% | f) 220% |
| g) 37,5% | h) 250% | i) 125% |

03)

- | | |
|---------|--------|
| a) 14 | b) 360 |
| c) 19,2 | d) 900 |

04) 287 funcionários.

05) 38 figurinhas.

06) 2.460.

07) R\$ 90,00.

08) R\$ 400,00.

- 09) 30%
 10) 70%
 11) 25%
 12) 17.127 votos.
 13) 45%
 14) R\$ 200
 15) R\$ 72.000

De Olho no Vestibular

1. Letra: D

População total: 30 milhões

População vacinada: 12 milhões

$$\frac{30}{12} = \frac{100\%}{x}$$

$$x = 40\%$$

2. Letra: D

- LDL= 280 mg/dL
- Primeiro mês redução de 25 %

$$\frac{280 \text{ mg/dL}}{x} = \frac{100\%}{75\%}$$

$$x = 210 \text{ mg/dL}$$

- Segundo mês redução de 20%

$$\frac{210 \text{ mg/dL}}{y} = \frac{100\%}{80\%}$$

$$y = 168 \text{ mg/dL}$$

3. Letra: B

- Primeiro pagamento um mês após aquisição do produto, juros de 1%

$$\frac{200}{100\%} = \frac{202}{101\%}$$

$$+1\%$$

- O restante do pagamento no mês seguinte

$$\frac{200}{100\%} = \frac{202}{101\%} = \frac{204,02}{102,01\%}$$

$$+1\%$$

$$+1\%$$

4. Letra: C

$$I = \frac{100(R_0 - 1)}{R_0} \quad R_0 > 1$$

$$I = \frac{100R_0}{R_0} - \frac{100}{R_0}$$

$$I = 100 - \frac{100}{R_0}$$

- Quando o valor de R_0 é um número menor, o I vale um número menor também
- Contudo, ao aumentar o R_0 o valor do I também será maior

5. Letra: B

$$I = \frac{100(R_0 - 1)}{R_0} \quad R_0 > 1$$

$$I = \frac{100R_0}{R_0} - \frac{100}{R_0}$$

$$I = 100 - \frac{100}{R_0}$$

$$I = 100 - \frac{100}{2}$$

$$I = 50\%$$

- Apenas 80% das pessoas que recebem a vacina desenvolve imunidade

$$\text{Total de imunizados} = I$$

$$\text{Total de vacinados} = V$$

$$\frac{V}{I} = \frac{100\%}{80\%}$$

$$I = 0,8 \times V$$

$$0,5 = 0,8 \times V$$

$$V = 0,625 = 62,5\%$$

Referências Bibliográficas

- [1] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. Matemática: Compreensão e Prática. 6º Ano, Moderna. São Paulo, 1ª Ed. 2009.
- [2] GIOVANNI; CASTRUCCI; JUNIOR, Giovanni. A Conquista da Matemática. 7º Ano, FTD. São Paulo, Ed. renov. 2007.
- [3] JUCÁ, Rabin. Matemática ao Alcance de Todos – Apostila 2012.2. Fortaleza, 2012.
- [4] PORCENTAGEM. Disponível em: <<http://www.somatematica.com.br/fundam/porcent.php>>. Acesso em 14 de dez. de 2014.

Cálculo Algébrico

A finalidade deste capítulo é introduzir o conceito de variáveis na linguagem matemática, isto é, a utilização de letras e símbolos para operações. Logo, ao final deste capítulo, você irá:

- ser capaz de entender expressões com variáveis
- ser capaz de manipular expressões com variáveis
- perder o medo da matemática e vai começar usá-la ao seu favor para resolver as questões!

Variáveis

Você já deve ter visto ou feito contas no seu dia a dia, envolvendo diferentes números e operações, como soma, subtração, divisão, multiplicação, etc. No entanto, na grande maioria das questões que os vestibulares abordam, o contexto sempre trata-se de descobrir o valor de algo, e é neste momento que entram as famosas variáveis. As **variáveis**, ou **incógnitas**, nada mais são que letras ou símbolos que utilizamos para representar algo cujo valor não sabemos. Veja a seguir um exemplo de situação em que usamos as variáveis:

→ **Problema:** “Numa sacola, há 10 bolas, todas brancas ou pretas. Sabe-se que há duas bolas brancas. Quantas bolas pretas estão na sacola?”

Informações do Problema	Linguagem matemática
Numa sacola, há 10 bolas, todas brancas ou pretas	$p + b = 10$
Sabe-se que há duas bolas brancas.	$b = 2$
Quantas bolas pretas estão na sacola?	$p = ?$

Neste exemplo, temos dois valores importantes: o número de bolas brancas e de bolas pretas. Para analisar o problema

utilizamos as letras “p” e “b” para representarem o número de bolas pretas e brancas dentro da sacola, respectivamente. Você poderia ter usado qualquer letra ou símbolo para isto, mas o mais adequado é ser intuitivo, por isso usamos as iniciais das palavras “preta” e “branca”.

A utilização de variáveis é muito comum na resolução das questões, mas também irá aparecer para você nas fórmulas e equações dos livros e das apostilas seguintes! Veja alguns exemplos:

→ **Fórmulas:**

Por exemplo, qual a fórmula para o perímetro de um quadrado com lado x ?

$$\text{Perímetro} = 4 \cdot x$$

Ou seja, estamos utilizando letra “x” como variável para representar o comprimento do lado do quadrado, e como o perímetro trata-se da soma dos quatro lados do quadrado, a fórmula é representada por 4 vezes x .

→ **Equações:**

Veremos em outras apostilas, por exemplo, em Equações de 1º Grau e 2º Grau, a utilização de variáveis de forma bem recorrente. Veja alguns exemplos a seguir:

- ✓ $2x + 5 = 4$ Eq's do 1º Grau
- ✓ $x^2 + 5x - 2 = 0$ Eq's do 2º Grau
- ✓ $f(x) = x + 3$ Funções

Mas não se preocupe, iremos nos aprofundar nesta parte da matéria em um outro momento. O foco agora é perceber que você precisa saber como interpretar e manipular as variáveis, pois elas aparecem em toda a matemática a partir de agora.

Expressões Algébricas

O ramo da matemática que estuda as manipulações de equações, expressões e fórmulas envolvendo variáveis trata-se da Álgebra, daí o nome de Expressões Algébricas para tais. Veja a seguir vários exemplos de expressões e equações:

- $10a$ a é uma variável
- $3x + 5$ x é uma variável
- $x = 4$ x é uma variável
- $x + y = 5$ x e y são variáveis
- $xy = 12$ x e y são variáveis
- $3x^2 = 12$ x é uma variável
- $7xyz^2$ x, y e z são variáveis

OBS: Perceba que é comum ocultar o sinal de multiplicação quando temos as letras. Assim, $10a$ é o mesmo que $10 \times a$ e o mesmo vale para qualquer outro caso.

Todas as expressões algébricas possuem um valor, chamado de **valor algébrico**. Vamos analisar o seguinte exemplo:

- Expressão Algébrica: $10a$
Suponha que você saiba que o valor da variável a é 5, ou seja:
 $a = 5$

Isto significa que podemos voltar na expressão algébrica e onde tivermos a variável " a ", colocaremos o número 5, desta forma, teremos:

$$10a \rightarrow 10 \cdot 5 = 50$$

Logo, o valor algébrico da expressão é 50.

Cálculo do Valor Algébrico de uma expressão

Vamos calcular o valor algébrico da seguinte expressão:

$$2xy + 4zx$$

Sabendo que os valores de x, y e z , são 2, 4 e 1, respectivamente.

1º Passo) Substituir os valores das variáveis na expressão algébrica:

OBS: Lembre-se que o sinal de multiplicação fica geralmente oculto nas expressões algébricas.

$$2 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot 2$$

2º Passo) Realizar as contas e achar o valor

algébrico da expressão:

$$\begin{array}{c} 2 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot 2 \\ \downarrow \\ 16 + 8 \\ \downarrow \\ 24 \end{array}$$

Logo, o valor algébrico da expressão é 24

Monômios e Polinômios

Os exemplos anteriores contém diversos tipos de expressões algébricas, pois tratam-se de termos envolvendo números e variáveis. Os termos que contém APENAS MULTIPLICAÇÕES entre variáveis e números são chamados de **monômios**.

Todo termo de uma expressão que é composto por apenas por produtos entre números e variáveis são chamados de **Monômios**.

Veja seguir uma tabela contendo exemplos de termos que são e que não monômios:

-----	É um monômio?
$2x$	Sim
$3xy$	Sim
x^2y	Sim
$x + y$	Não
$3ab + 2c$	Não
$4xyz$	Sim
x	Sim
4	Sim

Todo monômio é dividido em duas partes, a numérica e a literal. A **parte numérica**, como o nome já indica, é formada pelos números. A **parte literal** é a formada apenas pela combinação das variáveis. Dois monômios são **semelhantes** quando possuem a mesma parte literal.

- Ex: O monômio $10xyz$ possui parte numérica "10" e parte literal " xyz ".

→ Ex: Os monômios $2x^2y$ e $7x^2y$ são semelhantes, pois possuem a mesma parte literal x^2y

OBS 1: Termos como x ou xy também são monômios. Um erro comum é pensar que não tem nenhum número multiplicando, mas sempre temos o 1 no início da expressão, pois $x = 1x$ e $xy = 1xy$.

Mas se os monômios são esses termos pequenos contendo apenas multiplicações, as expressões maiores são chamadas de que? É neste momento que entram os famosos **polinômios**.

Um **Polinômio** é toda expressão formada por soma ou subtração de monômios.

Veja alguns exemplos de polinômios a seguir:

- $3x + 4$
- $2x + y$
- $5xyz + 1$
- $x^2 + 5x + 6$
- $x + y + z + 3$
- $a^2 + b^2 + c^2$
- $7xy + 4z + 3$

Perceba que os polinômios são muito mais abrangentes que os monômios, e, além disso, os monômios são polinômios também. Monômios são polinômios de um termo apenas.

Outra informação que precisamos saber trata-se do **grau** de um monômio.

O grau de um monômio é a soma dos expoentes de suas variáveis.

Veja a seguir uma tabela com graus de monômios:

Monômio	Grau
$3x$	1
$2x^2$	2
x^2y	$2+1 = 3$

xyz	$1+1+1 = 3$
ab^2c	$1+2+1 = 4$
xz^3	$1+3 = 4$
2	0
$3y^3$	3

OBS: O grau de um Polinômio será igual ao maior grau entre os seus monômios.

→ $x^2 + 5x + 6$

Este polinômio possui grau 2, pois seu monômio de maior grau é o x^2 .

Exercício sobre Grau

A expressão algébrica abaixo trata-se de um polinômio. Qual o valor de "a" para que tenhamos um polinômio de grau 2 na variável "x"?

$$(a + 3)x^3 + 2ax^2 + x + 1$$

Como desejamos que o grau do polinômio seja 2, não pode existir o termo x^3 . Logo, devemos zerar o valor de $(a + 3)$. Desta forma, temos:

$$a + 3 = 0$$

$$a = -3$$

Manipulando as expressões algébricas

Agora que você já sabe os conceitos mais básicos e fundamentais sobre monômios, polinômios e suas variáveis, veremos agora na prática as operações com eles. Isto é muito importante para qualquer questão de matemática a partir deste conteúdo!

Todas as regrinhas e ideias destas operações são semelhantes às que você já fazia quando eram apenas números. Vamos lembrar algumas propriedades importantes:

→ Distributiva:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$

ou

$$(a + b)(c + d) = c(a + b) + d(a + b)$$

ou ainda, mais direto

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

→ Multiplicação de Potências:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

→ Divisão de Potências:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

Agora vamos analisar na prática:

Soma ou Subtração de Polinômios

Simplifique a seguinte expressão algébrica:

$$(3x^2 + xy + y) - (x^2 - xy + y + 4)$$

Temos neste exemplo uma subtração de dois polinômios. A ideia para simplificar esta expressão, é pôr em evidência as variáveis "iguais" em cada polinômio. Veja:

1º Passo) Simplificar os sinais:

$$(3x^2 + xy + y) - (x^2 - xy + y + 4)$$

↓

$$3x^2 + xy + y - x^2 + xy - y - 4$$

2º Passo) Pôr em evidência as variáveis "iguais":

$$3x^2 + xy + y - x^2 + xy - y - 4$$

↓

$$(3 - 1)x^2 + (1 + 1)xy + (1 - 1)y - 4$$

3º Passo) Realizar as simplificações que estão nos parênteses

$$(3 - 1)x^2 + (1 + 1)xy + (1 - 1)y - 4$$

↓

$$2x^2 + 2xy - 4$$

Logo, esta é a expressão algébrica, ou, o polinômio simplificado.

Produto de Polinômios

Desenvolva a seguinte expressão algébrica:

$$(3x^2 + xy + 4)(x + y)$$

A ideia agora é aplicar a propriedade distributiva e em seguida pôr em evidências as variáveis "iguais".

$$(3x^2 + xy + 4)(x + y)$$

$$3x^3 + 6x^2y + x^2y + 2xy^2 + 4x + 8y$$

$$3x^3 + 7x^2y + 2xy^2 + 4x + 8y$$

Quanto à operação de divisão, iremos trabalhar apenas com monômios. A divisão de polinômios será tratada em um outro momento, em outro material.

Divisão de Monômios

Simplifique a seguinte fração:

$$\frac{3x^2y}{xz}$$

Para simplificar a fração, basta analisar separadamente cada variável, desta forma, temos:

$$3 \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{y}{1} \cdot \frac{1}{z}$$

↓

$$\frac{3xy}{z}$$

Fixação

1. Indique quais das expressões abaixo representam monômios.

- $3xy$
- x^2
- $x + 5$
- $\log(x)$
- $5xyz^2$

2. Indique o grau dos polinômios abaixo

- $x + y + z$
- $x^2y + 3y^3 + z$
- $a + b^2$
- $3ab + c^2 + 1$
- 4

f. $x^3y + y^3 + x^2z^2 + y^4xz + z^3xy$

3. Se $3x$ representa o triplo de um certo valor x . Qual monômio que representa os números múltiplos de 5?

4. Simplifique/agrupe as seguintes expressões algébricas:

- $3x^2 + y + 4 - 4y - 2 - x^2$
- $(x + y + z) - (x^2 - 4y + 6z)$
- $6xy + 4x^2 + xy - x - 3x^2 + 3xy$

5. Efetue as multiplicações ou reduza as frações a seguir:

- $x^2(x + y + z)$
- $(3x + y + xy)(x^2 + y^2)$
- $(xyz + 2)(3x + yz)$
- $\frac{27a^2b^5c}{3a^3b^3d}$
- $\frac{x^5 - x^4}{x^3}$

De Olho no Vestibular

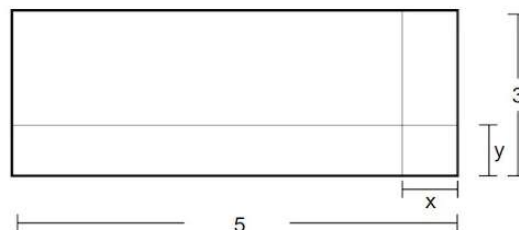
1. (UFMS/2018) Observe a expressão polinomial a seguir:

$$a^3x^3 + 2a^2x^3 - ax^3 - 2x^3 + x^2 - 1$$

A soma dos valores do coeficiente a que torna essa expressão em uma equação polinomial do segundo grau é igual a:

- 2
 - 1
 - 0
 - 1
 - 2
2. (Enem/2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem

mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$. Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por



- $2xy$
- $15-3x$
- $15-5y$
- $-5y-3x$
- $5y+3x-xy$

Gabarito

Fixação

1	2	3	4	5	-
a,b,e	1,3,2,3,0,6	5x	*	*	-

4.

- $2x^2-3y+2$
- $-x^2+x-3y-5z$
- $x^2-x+10xy$

5.

- $x^3+x^2y+x^2z$
- $x^3y + 3x^3 + x^2y + x y^3 + 3xy^2 + y^3$
- $3x^2yz + xy^2z^2 + 6x + 2yz$
- $9b^2c/ad$
- x^2-x

De Olho no Vestibular

1	2	-	-	-	-
D	E	-	-	-	-

Referências Bibliográficas

- [1] A Utilização de Potências no Cotidiano. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/a-utilizacao-potencias-no-cotidiano.htm>. Acesso em: 23 ago. 2022.
- [2] 17 exercícios de potenciação com gabarito comentado. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-potenciacao/>. Acesso em: 23 ago. 2022.

Fatoração e produtos notáveis

A finalidade deste capítulo é apresentar os conceitos de fatoração e produtos notáveis. Ao final do capítulo, o leitor será capaz de:

- Fatorar equações polinomiais sem dificuldade;
- Reconhecer quais são os principais produtos notáveis e;
- Resolver essas operações com agilidade.

Introdução

Os produtos notáveis, apesar de terem um "nome bonito", não passam de uma operação de multiplicação. Recebem essa denominação por serem resultados notáveis, ou seja, resultados importantes de serem lembrados para ganhar agilidade nas contas.

Já a fatoração é o processo de transformar expressões algébricas em produtos de fatores, o que pode ajudar muito na simplificação de expressões. Desse modo, é necessário conhecer os produtos notáveis para, depois, aprender a fatorar.

Produtos notáveis

Vamos conhecer os principais produtos notáveis e entender de onde eles surgem.

Quadrado da soma

Como o nome já diz, o quadrado da soma é a adição de dois termos, ou seja, $a + b$, tudo isso elevado à potência 2. Elevar ao quadrado ou à potência 2 significa multiplicar o termo por ele próprio. Sendo assim, vamos multiplicar $a + b$ por $a + b$:

$$(a + b)(a + b) = ?$$

Para realizar essa operação, vamos usar a propriedade distributiva:

$$(a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb$$
$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Perceba que, como ab e ba são equivalentes pelo fato de a multiplicação ser comutativa, esses termos foram somados. Assim, ficamos com a expressão:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esse é o quadrado da soma: o quadrado do primeiro termo somado ao quadrado do segundo termo e tudo isso somado a duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo.

Agora, vamos ver um exemplo dessa operação:

$$(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2$$
$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

Quadrado da diferença

Agora que conhecemos o quadrado da soma, o próximo produto notável fica fácil! Se o quadrado da soma é a adição de dois termos elevada ao quadrado, o quadrado da diferença é a subtração de dois termos, ou seja, $a - b$, tudo isso elevado à potência 2. Veja:

$$(a - b)(a - b) = aa - ab - ba + (-b)(-b)$$
$$(a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Note que a o produto $ab = ba$, logo, foram agrupados juntos, e que o produto das parcelas $-b$ gera um resultado positivo. Assim, temos:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Esse é o quadrado da diferença: o quadrado do primeiro termo somado ao quadrado do segundo termo e tudo isso subtraído de duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo.

Quer ver esse produto na prática? Vamos resolver um exemplo:

$$(x - 7)^2 = x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x + 7^2$$
$$(x - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$$

Produto da soma pela diferença

O produto notável a seguir se chama "produto da soma pela diferença", ou seja, vamos multiplicar a adição de dois termos, $a + b$, pela subtração entre os mesmos termos, $a - b$. Novamente, usaremos a propriedade distributiva:

$$(a + b)(a - b) = aa - ab + ba - bb$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Note que, nesse caso, as parcelas ab e ba ficaram com sinais opostos, e, por isso, uma anulou a outra. Assim, ficamos com:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Esse é o produto da soma pela diferença: o quadrado do primeiro termo subtraído do quadrado do segundo termo.

Agora, vamos ver um exemplo com essa operação:

$$(x + 9)(x - 9) = x^2 - 9^2$$
$$(x + 9)(x - 9) = x^2 - 81$$

Cubo da soma

O produto notável a seguir é muito importante, pois ter ele em mente pode poupar bastante tempo. O cubo da soma é a soma de dois termos, $a + b$, tudo isso elevado à potência 3. Para facilitar, vamos representar esse produto como:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$$

Como já conhecemos o quadrado da soma, realizar esse produtório será mais simples. Veja:

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$
$$(a + b)^3 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Assim temos como o cubo da soma a seguinte expressão:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$$

Cubo da diferença

Agora, vamos fazer algo análogo ao cubo da soma para calcular o cubo da diferença. Mas cuidado! Lidando com o sinal de menos, devemos estar sempre atentos para não errarmos as contas:

$$(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b)$$
$$(a - b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$
$$(a - b)^3 = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Assim, ficamos com a seguinte expressão para o cubo da diferença:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$$

Fatoração

Conhecendo os principais produtos notáveis, podemos aprender sobre fatoração. Primeiro, vamos lembrar o que é fatorar: fatorar é transformar expressões algébricas em produtos. Para fazer isso de maneira simples, podemos usar estratégias de fatoração distintas a depender da expressão com que estamos lidando. Vamos analisar cada uma dessas estratégias e quando elas são usadas:

- **Fator comum em evidência**

Essa estratégia de fatoração consiste em colocar em evidência um fator que seja comum a todos os termos da expressão. Sendo assim, só podemos usar esse método quando todos os termos da expressão tiverem algo em comum:

$$ab + ac = a(b + c)$$

No caso acima temos o fator "a" comum aos dois termos da expressão, por isso, colocamos esse fator isolado, e logo em seguida abrimos um parêntese, dentro do

qual colocaremos os termos da expressão divididos por “a”.

Veja outros exemplos:

$$ab - bc + bd = b(a - c + d)$$

Nesse caso, o fator comum é o “b”. Note que essa estratégia funciona para uma quantidade qualquer de termos, 2, 3, 4... Não importa, contanto que todos tenham um mesmo fator em comum, podemos evidenciá-lo!

- **Agrupamento**

Essa estratégia de fatoração é muito semelhante com o fator comum em evidência, mas, nesse caso, nem todos os termos precisam apresentar o mesmo fator em comum. Mas, então, como vamos fatorar? Calma, já vamos entender: para usar o agrupamento, partes da expressão precisam ter um mesmo fator comum; essas partes serão fatoradas independentemente uma da outra, por evidência, e depois algo mágico vai acontecer! Veja:

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d)$$

Veja que, inicialmente, não há um fator presente em todos os termos, mas, ao fatorar por evidência ac e ad , assim como bd e bc , criamos um fator comum: $c + d$! Assim, podemos evidenciar esse novo fator:

$$a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b)$$

Essa é a fatoração por agrupamento, uma espécie de fatoração por evidência “parcelada”.

- **Diferença de quadrados**

Esse é um tipo de fatoração que se relaciona diretamente com os produtos notáveis. Isso porque ela é o processo inverso do produto da soma pela diferença, isto é, quando nos depararmos com um número ao quadrado subtraído de outro número ao quadrado, podemos escrevê-los como o produto da soma desses números pela diferença deles. Veja:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Se não se lembra de onde vem essa igualdade, volte no tópico “produto da soma pela diferença”.

- **Trinômio quadrado perfeito**

Esse é mais um tipo de fatoração que se relaciona com os produtos notáveis: ela é o inverso do quadrado da soma (ou diferença). Para reconhecê-la, devemos procurar por dois números ao quadrado, $a^2 + b^2$, somados ou subtraídos de duas vezes o seu produto. Veja:

$$a^2 + b^2 + 2ab$$

Quando nos deparamos com algo desse tipo, podemos substituir pelo produto notável que conhecemos:

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

Pronto, agora que você conhece os principais produtos notáveis e as principais estratégias usadas para fatorar expressões, pode praticar um pouco nos exercícios!

Exercícios

Fixação

1. Desenvolva os produtos notáveis:

- $(10x + 4)^2$
- $(2a - y)^2$
- $(k + 1)(k - 1)$
- $(1 + y)^3$
- $(v - 3)^3$

2. Fatore:

- $y^2 + 7y$
- $9k^2 + 24k + 16$
- $49y^2 - 36x^4$
- $4x + 5y + 4y + 5x$
- $20 + 4x + 5y + xy$

3. Qual o valor da expressão

$$2024^2 - 2023^2$$

De Olho no Vestibular

1. (PUC – Campinas) Considere as sentenças a seguir:

- I. $(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$
- II. $5xy + 15xm + 3zy + 9zm = (5x + 3z) \cdot (y + 3m)$
- III. $81x^6 - 49a^8 = (9x^3 - 7a^4)(9x^3 + 7a^4)$
 - a. I é verdadeira
 - b. II é verdadeira
 - c. III é verdadeira
 - d. I e II são verdadeiras
 - e. II e III são verdadeiras

2. (VUNESP) Dado que $a + b = 5$ e $ab = 2$ qual é o valor numérico de $a^2 + b^2$?

- a. 5
- b. 2
- c. 10
- d. 21
- e. 25

3. (UFMG). Considere o conjunto de todos os valores de x e y para os quais a expressão

$$M = \frac{\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}}$$

está definida. Nesse conjunto, a expressão equivalente a M é

- a. $(x - y)(x + y)$
- b. $(x - y)(x^2 + y^2)$
- c. $\frac{(x-y)}{x^2 + y^2}$
- d. $\frac{x-y}{x+y}$
- e. $\frac{(x-y)(x^2 + y^2)}{x+y}$

4. (FUVEST) O valor de $\sqrt[3]{\frac{2^{28} + 2^{30}}{10}}$ é

- a. $\left(\frac{2}{5}\right)^8$
- b. $\left(\frac{2}{5}\right)^2$
- c. 2^8
- d. 2^9
- e. $\left(\frac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$

5. (IFBA) O valor da expressão:

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{81}\right)\left(1 + \frac{1}{6561}\right)$$

é:

- a. $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{16}$
- b. $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8$
- c. $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^8$
- d. $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{16}$
- e. $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{18}$

Gabarito

Fixação

1. Respostas:

- a) $100x^2 + 80x + 16$
- b) $4a^2 - 4ay + y^2$
- c) $k^2 - 1$
- d) $1 + 3y + 3y^2 + y^3$
- e) $v^3 - 9v^2 + 27v - 27$

2. Respostas:

- a) $y(y + 7)$
- b) $(3k + 4)^2$
- c) $(7y - 6x^2)(7y + 6x^2)$
- d) $9(x + y)$
- e) $(5 + x)(4 + y)$

3. 4047

De Olho no Vestibular

1	2	3	4	5	
e	d	e	d	a	

Referências Bibliográficas

Produtos Notáveis: conceito, propriedades, exercícios. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/produtos-notaveis/>. Acesso em: 5 jul. 2023.

Potenciação

O intuito deste capítulo é apresentar o conceito de potenciação e suas propriedades básicas. Ao final dele, você, aluno esforçado, poderá:

- Representar números muito grandes de maneira mais simples;
- Facilitar cálculos relativos a juros compostos;
- Aplicar conhecimentos sobre notação científica;
- resolver aquela questão impossível do vestibular!

Introdução

A potenciação é o processo matemático que envolve um número que pode ser expresso pela multiplicação de um ou mais fatores mínimos a uma quantidade específica de vezes. É representado da seguinte forma:

Potência = a^b ,
sendo a a base e o b o expoente.

A base (a) indica qual número será multiplicado e o expoente (b) indica quantas vezes ele será multiplicado. Resumindo, o número " a " será multiplicado " b " vezes por ele mesmo. Vejamos alguns exemplos para esclarecer:

→ $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

- ✓ Base = 10
- ✓ Expoente = 3

→ $2^2 = 2 \times 2 = 4$

- ✓ Base = 2
- ✓ Expoente = 2

→ $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

- ✓ Base = 3
- ✓ Expoente = 5

Nessa lógica, podemos ver como essa operação é essencial para trabalharmos de maneira simples com números grandes em nosso dia a dia, pois ela simplifica a aplicação

de juros compostos, a resolução de funções exponenciais e, ainda, possibilita a representação em notação científica. Essas importantes utilizações cotidianas serão abordadas no final deste capítulo.

Estudante dedicado, agora que já sabemos o básico do que é a potenciação, vamos entender como se lê os números com essa representação:

→ Base elevada ao expoente :

- ✓ 4^5 , lê-se "quatro elevado a cinco";
- ✓ 3^{10} , lê-se "três elevado a dez".
- ✓ 7^9 , lê-se "sete elevado a nove"

★ importante!

→ Os expoentes 2 e 3 têm maneiras diferentes de leitura, já que são os casos mais utilizados nos cálculos:

- ✓ $a^2 \equiv$ " a ao quadrado";
- ✓ $5^2 \equiv$ "5 ao quadrado";
- ✓ $a^3 \equiv$ " a ao cubo";
- ✓ $2^3 \equiv$ "dois ao cubo".

Bom, a partir de agora, nós vamos analisar juntos como calcular diferentes tipos de potenciação de acordo com suas propriedades e casos especiais.

Potenciação de números naturais

A potenciação dos números naturais inteiros positivos (como 1, 2, 3...) é o caso mais simples. Iremos fazer exatamente como já explicado na introdução: a base será multiplicada pela quantidade de vezes

indicada no expoente. Vejamos os exemplos abaixo:

$$\rightarrow 2^1 = 2$$

$$\rightarrow 3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$\rightarrow 4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$$

Potenciação de números reais

Na potenciação dos números reais (por exemplo: -1 , $-\frac{1}{2}$, $-3...$) temos que nos atentar a alguns detalhes. Vamos separar em alguns casos;

1. Base negativa e expoente inteiro positivo

→ Caso o expoente seja um **número par**, o resultado é positivo.

$$\checkmark (-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$$

→ Caso o expoente seja um número ímpar, o resultado é negativo.

$$\checkmark (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

★ **Obs:** $(-2)^2 \neq -2^2$.

➤ Isso porque no primeiro caso o sinal de “menos” faz parte da base, no segundo não faz.

➤ Logo, os resultados são:

$$\checkmark (-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$

$$\checkmark -2^2 = -(2 \times 2) = -4$$

→ Caso o expoente seja negativo, independente de a base ser positiva ou ser negativa, utilizaremos a seguinte regra:

$$a^{-n} = 1/a^n, \\ a \neq 0$$

• Exemplos:

$$\rightarrow 2^{-2} = 1/2^2 = 1/4$$

$$\rightarrow (-2)^{-2} = 1/(-2)^2 = 1/4$$

$$\rightarrow 10^{-3} = 1/10^3 = 1/1000$$

2. Base fracionária

→ O expoente é distribuído igualmente para o numerador e para o denominador, seguindo, também, as regras da base inteira. Vamos analisar:

$$\checkmark (a/b)^n = a^n/b^n$$

$$\checkmark (3/4)^3 = (3^3/4^3) = 27/64$$

$$\checkmark (-5/8)^2 = (5^2/8^2) = 25/64$$

➤ Observe que tiramos o sinal de “menos” pois é uma base negativa e o expoente é par, ou seja o resultado é positivo.

3. Expoente fracionário

→ Neste caso, a potência passará a ser uma raiz, na qual o numerador será aplicado como expoente da base e o denominador será o fator da raiz. Vejamos:

$$\checkmark a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\checkmark 3^{1/2} = \sqrt[2]{3^1}$$

Exemplo: uso de potenciação

em notação científica

A distância da Terra ao Sol é cerca de 150 milhões de quilômetros, como podemos escrever esse número em notação científica?

- 150 milhões de km = 150.000.000 km
- 150.000.000 = 1,50.000.000 = $1,5 \cdot 10^8$ km

Casos especiais

Depois de dominar essas aplicações, vamos estudar alguns casos especiais:

1. Expoente = 1

- $a^1 = a$
- $54637^1 = 54637$
- $-5^1 = -5$

2. Base = 1

- $1^n = 1$
- $1^{46} = 1$
- $1^{3/4} = 1$
- $1^{-9} = 1$

3. Base = 0 e expoente maior que 0

- $0^n = 0, n > 0$
- $0^{73} = 0$
- $0^{1/9} = 0$

4. Expoente = 0

- Qualquer número elevado a 0 é igual a 1

- ❖ $a^0 = 1, a \neq 0$
- ❖ $729^0 = 1$
- ❖ $(\frac{1}{8})^0 = 1$

5. Indefinições:

- $0^0 = \text{indefinido}$

- $0^{-n} = 1/0^n = \text{indefinido}$

Propriedades

Conhecer as propriedades pode facilitar a fazer contas mais complexas envolvendo potências, por isso, vamos analisar algumas muito importantes:

1. Multiplicação de potências de mesma base

- Devemos repetir a base e somar os números que estão no expoente:

$$\blacklozenge a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\rightarrow 3^4 \times 3^3 = 3^{4+3} = 3^7 = 2187$$

$$\rightarrow 5^{1/3} \times 5^{2/3} = 5^{1/3 + 2/3} = 5^1 = 5$$

2. Divisão de potências de mesma base

- de maneira análoga, repetimos a base, no entanto, agora os expoentes devem ser subtraídos, na devida ordem em que estão:

$$\blacklozenge a^m / a^n = a^{m-n}$$

$$\rightarrow 3^5 / 3^3 = 3^{5-3} = 3^2 = 9$$

$$\rightarrow 2^8 / 2^9 = 2^{8-9} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

3. Potência elevado a um expoente

- Nesse caso, repetimos a base e multiplicamos os expoentes:

$$\blacklozenge (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$\rightarrow (2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$$

$$\rightarrow (7^{\frac{1}{2}})^2 = 7^{\frac{1}{2} \times 2} = 7^1 = 7$$

4. Potência de um produto

→ Distribuímos o expoente para cada elemento do produto:

$$\diamond (a \times b \times c)^n = (a)^n(b)^n(c)^n$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (2 \times 3 \times 4)^2 &\rightarrow (2)^2(3)^2(4)^2 \\ &\rightarrow (4) \times (9) \times (16) = 576 \end{aligned}$$

Exemplo: uso de divisão de potências de mesma base no dia a dia:

A tintura de cabelo que a mãe de Carla comprou orienta o usuário a variar o tempo de uso conforme o diâmetro do fio de cabelo, por isso Carla quer saber quantas vezes o seu fio é mais fino que o da mãe. Sabendo que o diâmetro do fio da mãe equivale a 10^{-4} metros e o de Carla a 10^{-5} metros, então, qual valor a moça encontrou?

$$\bullet \frac{\text{cabelo Carla}}{\text{cabelo Mãe}} \rightarrow \frac{10^{-5}}{10^{-4}} \rightarrow 10^{(-5)-(-4)}$$

$$\bullet 10^{-5+4} \rightarrow 10^{-1}$$

Para Saber Mais...

Vamos, juntos, analisar alguns casos curiosos de potenciação:

1. Juros Compostos

→ Muito utilizado no universo das finanças, os juros compostos são a aplicação de juros sobre juros, isto é, os juros compostos são aplicados sobre o montante de cada período (valendo-se do conceito que já vimos de potenciação).

$$\rightarrow M = C(1+i)^t$$

- ✓ M = montante
- ✓ C = capital
- ✓ i = taxa
- ✓ t = tempo

2. Funções exponenciais

→ Aplicação da potenciação envolvendo funções cuja variável é o expoente:

- ✓ $y = a^x$, sendo "a" um número qualquer;

★ obs:

Sabe-se que em igualdade entre duas potências com expoentes iguais, as bases necessariamente são iguais, logo:

$$\bullet \begin{aligned} a^n &= x^n \\ a &= x \end{aligned}$$

→ É normalmente utilizada em expressões que representam o crescimento ou a diminuição de uma população.

3. Notação científica

→ Usada para representar números muito grandes ou muito pequenos. Para tanto, normalmente, utilizamos as potências de base 10. Vejamos:

$$\checkmark 10^3 = 1000$$

$$\checkmark 10^4 = 10000$$

$$\checkmark 10^{-3} = 1/1000 = 0,001$$

$$\checkmark 10^{-4} = 1/10000 = 0,0001$$

$$\checkmark 4 \times 10^{-5} = 4/100000 = 0,00004$$

$$\checkmark 3 \times 10^6 = 3 \times 1000000 = 3000000$$

★ curiosidade:

“Googol” é o termo matemático para representar o número 10^{100} .

- O nome foi escolhido pelo sobrinho do matemático Edward Kasner em 1938. é um número tão grande que supera a quantidade estimada de átomos existentes no universo.
- É deste termo que surgiu o nome do site de buscas Google.
- Googolplex equivale a 10^{googol}

Exercícios

Fixação

1. Calcule as potências abaixo:
 - a. 6^3
 - b. 4^{-2}
 - c. -10^4
 - d. $(-2/5)^3$
 - e. 5432^0
2. Simplifique a expressão :

$$\frac{4^3}{4^5}$$
3. Efetue as expressões abaixo:
 - a. $(3^5 \times 3^3)^{1/2} (5^4) =$
 - b. $(4 \times 2 \times 5)^3 =$
 - c. $16^{1/2} + 36^{1/2} =$
 - d. $100^0 + 10^3 =$
 - e. $(\%)^{-3} \times 2^3 =$
4. Simplifique a expressão :

$$(b^{-3} \times c) \times (b^2 \times c^3)^{-3}$$
5. Qual o valor de x, sabendo que $2^x = 4$?
6. A distância entre o sol e a terra é de 149600000 km. Escreva em notação científica essa distância.
7. Em um sítio há 12 árvores. Cada árvore possui 12 galhos e em cada galho tem 12 maçãs. Quantas maçãs existem no sítio?

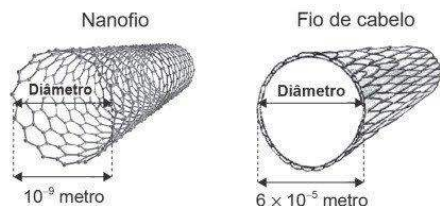
8. Sabendo que 2^{15} é 32768, quanto é 2^{16} ? Escreva o resultado em notação científica.
9. Verifique se as sentenças são falsas ou verdadeiras:
 - a. $(x \cdot y)^4 = x^4 \cdot y^4$
 - b. $(x + y)^4 = x^4 + y^4$
 - c. $(x - y)^4 = x^4 - y^4$
 - d. $(x + y)^0 = 1$

De Olho no Vestibular

1. (Enem/2015) As exportações de soja no Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012 e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012. A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:
 - a. $4,129 \times 10^3$
 - b. $4,129 \times 10^6$
 - c. $4,129 \times 10^9$
 - d. $4,129 \times 10^{12}$
 - e. $4,129 \times 10^{15}$
2. (UFRGS – 2015) O algarismo das unidades de $9^{99} - 4^{44}$ é :
 - a. 1
 - b. 2
 - c. 3
 - d. 4
 - e. 5
3. (UFRGS - 2013) Um ser humano adulto e saudável abriga cerca de 100 bilhões de bactérias, somente em seu trato digestivo. Esse número de bactérias pode ser escrito como?
 - a. 10^9
 - b. 10^{10}
 - c. 10^{11}
 - d. 10^{12}
 - e. 10^{13}
4. (Enem 2021) O nanofio é um feixe de metais semicondutores usualmente utilizado na fabricação de fibra óptica. A imagem ilustra, sem escala, as representações das medidas dos diâmetros de um nanofio e de um fio de cabelo, possibilitando comparar suas espessuras e constatar o avanço das

novas

tecnologias.



O número que expressa a razão existente entre o comprimento do diâmetro de um fio de cabelo e o de um nanofio é:

- 6×10^{-14}
- $6 \times 10^{-5/9}$
- $6 \times 10^{5/9}$
- 6×10^4
- 6×10^{45}

Gabarito

Fixação

1. a)	1.b)	1.c)	1.d)	1.e)	2
216	1/16	-10000	-8/125	1	1/16
3.a)	3.b)	3.c)	3.d)	3.e)	4
15^4	64000	10	1001	125	$b^{-9} x c^{-8}$

5	6	7	8	9.a)	9.b)
2	$1,496 \times 10^8$	1728	$6,5536 \times 10^4$	V	F
9.c)	9.d)				
F	V	-	-	-	-

De Olho no Vestibular

1	2	3	4		
C	C	C	D		

Referências Bibliográficas

- [1] A Utilização de Potências no Cotidiano. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/a-utilizacao-potencias-no-cotidiano.htm>. Acesso em: 23 ago. 2022.
- [2] 17 exercícios de potenciação com gabarito comentado. Disponível em:

<<https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-potenciacao/>>. Acesso em: 23 ago. 2022.

[3] <https://beduka.com/blog/materias/matematica/>

[4] <https://meu.bernoulli.com.br/metasp/recursos/visualizar/918993>

[5] *Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula*. Autor: John A. Van de Walle

[6] *O Que a Matemática Tem a Ver com Isso? Como Professores e Pais Podem Transformar a Aprendizagem da Matemática e Inspirar Sucesso*. Autor: Jo Boaler

Radiciação

Nessa nova etapa do aprendizado dos fundamentos da linda Matemática, vamos estudar a operação inversa da potenciação: a radiciação! Assim, nós poderemos realizar operações com números potenciais de maneira simples e rápida.

Introdução

Radiciação é a operação que realizamos quando queremos descobrir qual o valor que multiplicado por ele mesmo, determinada quantidade de vezes, dá um número que conhecemos:

$$\sqrt[n]{a} = b,$$

sendo a o **radicando**, n o **índice**, o b é a **raiz** e $\sqrt{}$ é o símbolo de radical.

Com efeito, a raiz é o valor equivalente ao radicando elevado a $\frac{1}{n}$. Dessa forma, estamos dizendo que quando calculamos b^n achamos a .

Vamos analisar alguns exemplos:

- $\sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$
 - ✓ Radicando = 16
 - ✓ Índice = 2
 - ✓ Raiz = 4
- $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$
 - ✓ Radicando = 27
 - ✓ Índice = 3
 - ✓ Raiz = 3
- $\sqrt[5]{32} = 2$, pois $2^5 = 32$
 - ✓ Radicando = 32
 - ✓ Índice = 5
 - ✓ Raiz = 2

Agora que já sabemos o que é a radiciação em sua essência, vamos entender como se lê esses números:

- ✓ $\sqrt[4]{16}$, lê-se “raiz quarta de dezesseis”;
- ✓ $\sqrt[10]{1}$, lê-se “raiz décima de um”.

★ **obs:** Os índices 2 e 3 são especiais, pois têm uma

maneira diferente de serem lidos, já que são os casos mais utilizados:

- ✓ $\sqrt{a} \equiv$ “raiz quadrada de a ”;
- ✓ $\sqrt{5} \equiv$ “raiz quadrada de 5”;
- ✓ $\sqrt[3]{a} \equiv$ “raiz cúbica de a ”
- ✓ $\sqrt[3]{8} \equiv$ “raiz cúbica de 8”;

→ **Obs:** Quando o índice da raiz é 2, podemos omiti-lo, por exemplo:

$$\sqrt[2]{16} = \sqrt{16}$$

Ao longo deste capítulo, vamos estudar como calcular as raízes com números naturais e reais, os casos especiais e as propriedades.

Radiciação de números naturais

Como já discutimos, a radiciação é a operação inversa da potenciação, logo as lógicas aplicadas no outro capítulo serão aplicadas de maneira análoga nesse. A raiz com os números naturais (inteiros positivos) é o caso mais simples. Iremos fazer exatamente como já explicado na introdução: o radicando será equivalente à base multiplicada pela quantidade de vezes indicada no expoente. Vejamos os exemplos abaixo:

- $2^1 = 2$
- $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$
- ★ **obs:** os chamados “quadrados perfeitos” são números que podem ser representados por potência de base 2 e somente eles têm raiz quadrada no conjunto dos naturais. Vejamos exemplos:

$$1. \quad 49 = 7^2$$

(49 é o quadrado perfeito de 7)

2. $100 = 10^2$

(100 é o quadrado perfeito de 10)

3. $625 = 25^2$

(625 é o quadrado perfeito de 25)

★ **obs:** apesar de menos usual, os cubos perfeitos também recebem tal tratamento.

Radiciação de números reais

Aprofundando nossos estudos, vamos seguir para a raiz de números reais (conjunto que engloba os positivos e os negativos), por isso, vamos separar em casos para uma melhor análise:

1. $a \geq 0$ e n um número positivo par:

→ o mais simples dos casos, no qual a expressão $\sqrt[n]{a}$ corresponde ao número real não-negativo b tal que $b^n = a$

.Exemplificando:

◆ $\sqrt[2]{4} = 2$

◆ $\sqrt[4]{81} = 3$

◆ $\sqrt[10]{0} = 0$

2. $a < 0$ e n um número inteiro positivo ímpar:

→ Nesse caso, dizemos que a expressão $\sqrt[n]{-a}$ corresponde ao número real b tal que $b^n = -a$. Vejamos:

◆ $\sqrt[3]{-125} = -5$,
pois $(-5)^3 = -125$

◆ $\sqrt[5]{-32} = -2$,
pois $(-2)^5 = -32$

◆ $\sqrt[11]{-1} = -1$,
pois $(-1)^{11} = -1$

3. $a < 0$ e n um número inteiro positivo par:

→ nesse caso, a expressão representa um número não pertencente ao conjunto dos números reais

Exemplificando:

• $\sqrt[2]{-5} \notin R$ (lê-se “raiz quadrada de -5 não pertence ao conjunto dos números reais”)

• $\sqrt[10]{-1} \notin R$
• $\sqrt[6]{-64} \notin R$

ATENÇÃO:

→ A radiciação, por sua definição, admite somente um resultado, por isso:

• $\sqrt{25} = 5$ e $-\sqrt{25} = -5$ são sentenças verdadeiras.

• $\sqrt{25} = \pm 5$ e $\sqrt{25} = -5$ são sentenças falsas.

→ Vale, também, destacar que não existe, em R , radical de índice par e radicando negativo, então:

• $\sqrt{-9} \neq -\sqrt{9}$, pois $-\sqrt{9}$ é o oposto de $\sqrt{9}$, logo $-\sqrt{9} = -3$ e $\sqrt{-9} \notin R$.

Propriedades

Agora que já dominamos todo o conceito de racionalização, estudaremos juntos as propriedades dessa operação para facilitar nossos cálculos matemáticos.

1. Potência de radicais

• O índice do radical é igual ao expoente do radicando:

→ $\sqrt{13^2} = 13$

→ $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

→ $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

2. Multiplicação de radicais

• O radical de um produto é igual ao produto dos radicais de mesmo índice dos fatores do radicando:

→ $\sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$

→ $\sqrt[3]{3 \times 8} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{8}$

→ $\sqrt[4]{5 \times 7 \times 11} = \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} \times \sqrt[4]{11}$

3. Divisão de radicais

• O radical de um quociente é igual ao quociente dos radicais de mesmo índice dos termos do radicando:

→ $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

→ $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}}$

$$\rightarrow \sqrt[4]{\frac{7}{19}} = \frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt[4]{19}}$$

4. Operações simultâneas

- O valor de um radical não se modifica quando multiplicamos ou dividimos o índice do radical com o mesmo valor que fazemos isso com o expoente do radicando:

$$\rightarrow \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5 \cdot 2]{3^{2 \cdot 2}} = \sqrt[10]{3^4}$$

$$\rightarrow \sqrt[8]{3^6} = \sqrt[8 \cdot 2]{3^{6 \cdot 2}} = \sqrt[4]{3^3}$$

5. Radiciação de raízes

- Nesse caso, transformamos a expressão em uma só raiz.

Exemplificando:

$$\diamond \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\diamond \sqrt[2]{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[2 \cdot 3]{32} = \sqrt[6]{32} = 2$$

$$\diamond \sqrt[5]{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[5 \cdot 3]{10} = \sqrt[15]{10}$$

6. Potência de raízes

- Dessa forma, exercitaremos os conhecimentos de potência e simplificaremos a expressão de radiação

Exemplificando:

$$\bullet \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\bullet \sqrt[10]{4^8} = 4^{\frac{8}{10}} = 4^{\frac{4}{5}} = 4^2 = 16$$

$$\bullet \sqrt[3]{10^2} = 10^{\frac{2}{3}}$$

7. Radicando com expoente igual ao índice

- Nessa situação, podemos extrair um ou mais fatores do radicando e representá-los fora da raiz

Exemplificando:

$$\bullet \sqrt[m]{a^{m \cdot n}} = a^{\sqrt[m]{a^n}}$$

$$\bullet \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\bullet \sqrt[3]{10000} = \sqrt[3]{10^4} = 10\sqrt[3]{10}$$

Aplicações

1. Redução de radicais de mesmo índice

- Para isso, devemos primeiro calcular o mmc dos índices dos radicais, pois esse será o índice comum, depois, dividir esse mmc por cada um dos índices e, enfim, multiplicar os resultados obtidos pelos expoentes dos respectivos radicandos. Fazemos isso para compararmos, com exatidão, radicais diversos caso seja preciso em um cálculo.

Exemplificando:

- Qual maior número entre $\sqrt[4]{2^3}$, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[6]{3^5}$?

- calculando o mmc:
 $mmc(3, 4, 6) = 12$

- relacionando os radicais aos índice comum:

$$\frac{12}{4} = 3 \quad \frac{12}{3} = 4 \quad \frac{12}{6} = 2$$

- equiparando os índices:

$$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{2^9}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^{1 \cdot 4}} = \sqrt[12]{2^4}$$

$$\sqrt[6]{3^5} = \sqrt[6 \cdot 2]{3^{5 \cdot 2}} = \sqrt[12]{3^{10}}$$

- colocando em ordem crescente:

$$\sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{2^9} < \sqrt[12]{3^{10}}$$

- dessa maneira, podemos

afirmar que $\sqrt[6]{3^5}$ representa o maior número.

2. Operações com radicais

- Assim como estudamos no capítulo de potência, podemos fazer operações matemáticas com os números radicais.

• Adição ou subtração

- Na adição e subtração de radicais, devemos escrever

todos os radicais da soma em suas formas mais simples. Em seguida, adicionamos algebricamente os radicais semelhantes e repetimos os radicais não-semelhantes, para tornar a representação mais clara.

Exemplificando:

- $x\sqrt{a} - y\sqrt{a} + z\sqrt{a} = (x - y + z)\sqrt{a}$
- $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (5 - 3 + 4)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- $10\sqrt{27} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{9} = 30\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6 = 33\sqrt{3} - 6$

• Multiplicação

→ Caso os radicais tenham o mesmo índice, é muito simples. Basta aplicar as propriedades multiplicativas já vistas

Exemplificando:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2 \cdot 4} = \sqrt[5]{8}$

→ Caso os radicais tenham índices diferentes, basta equiparar-los aplicando a propriedade já explorada acima

Exemplificando:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a \cdot b}$
- $3\sqrt[8]{5} \cdot 2\sqrt[6]{5} = 3\sqrt[24]{5^3} \cdot 2\sqrt[24]{5^4} = 6\sqrt[24]{5^7}$

• Divisão

→ De maneira semelhante à multiplicação, se os radicais têm os mesmos índices, basta aplicar as propriedades já estudadas.

Exemplificando:

- $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt{1000} : \sqrt{20} = \sqrt{\frac{1000}{20}} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

→ Caso os índices sejam diferentes, basta encontrar o mmc dos índices em questão e equiparar as raízes.

Exemplificando:

- $\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \frac{\sqrt[n \cdot m]{a}}{\sqrt[n \cdot m]{b}} = \sqrt[n \cdot m]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt[3]{10} : \sqrt{2} = \sqrt[6]{10^2} : \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{\frac{100}{8}} = \sqrt[6]{\frac{25}{2}}$

• Potenciação

→ Como feito nas outras operações, usaremos as propriedades estudadas, atentando sempre em como a potência está representada

Exemplificando:

- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$
- $(\sqrt[7]{5})^4 = \sqrt[7]{5^4} = \sqrt[7]{625}$

• Radiciação

→ nessa operação, também usaremos do nosso conhecimento sobre as propriedades para concluir o cálculo.

Exemplificando:

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[3 \cdot 4]{5} = \sqrt[12]{5}$

OBSERVAÇÃO:

→ Em alguns casos, a operação requer que, inicialmente, juntemos todos os fatores do radicando mais interno.

Exemplificando:

- $\sqrt[5]{2\sqrt{3}} = \sqrt[5]{2^2 \cdot 3} = \sqrt[5 \cdot 2]{4 \cdot 3} = \sqrt[10]{12}$

Exercícios

Fixação

1. (Mack) O valor de $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{18}$ é igual a:

a) $\sqrt{56}$.
 b) $\sqrt{108}$.
 c) $\sqrt{2} + 54$.
 d) $\sqrt{6} + 6$.
 e) $\sqrt{2} \cdot (1 + 3 \cdot \sqrt{3})$.

2. (FGV) Simplificando-se $2\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{75}$ obtém-se:

a) 0.
 b) $-2\sqrt{3}$.
 c) $-4\sqrt{3}$.
 d) $-6\sqrt{3}$.
 e) $-8\sqrt{3}$.

3. (UNIFOR-CE) A expressão $\sqrt{18} + \sqrt{50}$ é equivalente a:

a) $2\sqrt{17}$
 b) $34\sqrt{2}$
 c) $8\sqrt{2}$
 d) $5\sqrt{3}$
 e) $2\sqrt{2}$

4. Considere as seguintes expressões:

I. $\frac{3\sqrt{12}}{2} = 3\sqrt{2}$

II. $(2\sqrt{3})^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

III. $(2^4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

É (são) verdadeira(s), somente:

a) I.
 b) II.
 c) III.
 d) I e II.
 e) I e III.

5. Reescreva os radicais $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{2}$ de forma que os três apresentem o mesmo índice.

6. Sendo $a = \sqrt[4]{5}$ e $b = \sqrt[4]{3125}$ determine o valor de $4a - 2b$

7. Se $A = \sqrt{\sqrt{6} - 2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{6}}$, então o valor de A^2 é:

a) 1
 b) 2
 c) 6
 d) 36

De Olho no Vestibular

1. ENEM/2012 Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua

massa m pela fórmula $A = k \cdot M^{\frac{2}{3}}$, em que k é uma constante positiva. Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

a) $\sqrt{16}$
 b) 4
 c) $\sqrt{24}$
 d) 8
 e) 64

2. (Enem/2010) Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

$$IMC = \frac{\text{massa (kg)}}{[\text{altura (m)}]^2}$$

$$RIP = \frac{\text{altura (cm)}}{\sqrt[3]{\text{massa (kg)}}}$$

Um homem tem massa 64 kg e altura 1,60 m. Sendo assim, O RIP desse homem é:

- A) 0,4 cm/kg^{1/3}.
- B) 2,5 cm/kg^{1/3}.
- C) 8 cm/kg^{1/3}.
- D) 20 cm/kg^{1/3}.
- E) 40 cm/kg^{1/3}.

3. (ENEM- BR - 2019) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida usada para classificar os países pelo seu grau de desenvolvimento. Para seu cálculo, são levados em consideração a expectativa de vida ao nascer, tempo de escolaridade e renda per capita, entre outros. O menor valor deste índice é zero e o maior é um. Cinco países foram avaliados e obtiveram os seguintes índices de desenvolvimento humano: o primeiro país recebeu um valor X, o segundo $\sqrt{X}$, o terceiro $X^{\frac{1}{3}}$, o quarto X^2 e o último X^3 . Nenhum desses países zerou ou atingiu o índice máximo. Qual desses países obteve o maior IDH?

- A) O primeiro.
- B) O segundo.
- C) O terceiro.
- D) O quarto.
- E) O quinto.

Gabarito

Fixação

1	2	3	4	5	6
E	C	C	B	-	-
7					
B					

5. RESPOSTA: $\sqrt[12]{3^6}$; $\sqrt[12]{5^4}$ e $\sqrt[12]{2^3}$

6. RESPOSTA: $-6\sqrt[4]{5}$

De Olho no Vestibular

1	2	3			
B	E	C			

Referências Bibliográficas

- [1] <https://www.todamateria.com.br/radiciacao-exercicios/>
- [2] <https://beduka.com/blog/exercicios/matematica-exercicios/exercicios-sobre-radiciacao/#4>
- [3] <https://soexercicios.com.br/plataforma/questoes-de-vestibular/ENEM/23452/-potenciacao-e-radiciacao-/1#!>
- [4] <https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2019/segundo-dia/qual-desses-paises-obteve-o-maior-idh/>

Racionalização

O intuito deste capítulo é orientar o leitor a realizar a racionalização para facilitar os diversos processos matemáticos, portanto, ao final deste capítulo o aluno vai:

- Resolver expressões que envolvam denominadores irracionais .
- Simplificar números com representação complexa .
- Perder o medo de equações matemáticas e gabaritar as provas!

Introdução

A infinidade de números pertencentes ao conjunto dos reais contém representantes que podem ser escritos sob a forma de frações com denominadores irracionais (por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{2}}$). No entanto, fazer cálculos com esses números pode dificultar o processo de resolução de equações matemáticas, por isso a importância de racionalizá-los, ou seja, transformar o denominador irracional em um número racional sem, contudo, alterar o valor da fração apresentada.

Esse processo, infelizmente, pode parecer irrelevante para muitos alunos, mas ele é primordial para que solucionemos com rapidez expressões que demandariam muito mais tempo e trabalho se mantivéssemos o número irracional no divisor, por exemplo:

- calculando a divisão com o número irracional no denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3,162277...}$$

- calculando a divisão equivalente com o número irracional no numerador:

$$\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3,162277...}{10} = 0,3162277..$$

Fator Racionalizante

Chamamos de fator racionalizante a expressão usada para transformar o denominador irracional em um número

racional. Para aplicá-lo, devemos multiplicar tanto o numerador como o denominador por esse valor (a fim de não mudar o valor da fração que está sendo racionalizada) até que a expressão final fique sem radical irracional no denominador

Esse fator depende do número irracional que está sendo racionalizado, por isso, mobilizaremos vários conhecimentos matemáticos para tal processo.

Listamos abaixo os principais fatores racionalizantes que ajudarão você, leitor dedicado, a simplificar os cálculos matemáticos :

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$



fator racionalizante

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$



fator racionalizante

$$= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

Racionalização de Denominadores

Agora que sabemos o que é o fator racionalizante, podemos aplicá-lo nos diferentes processos de racionalização e denotar nas questões matemáticas! Os três principais são :

1. Denominador com raiz quadrada:

- Para racionalizar um número com denominador de raiz quadrada usaremos o conceito matemático que a define e, assim, chegaremos em uma fração equivalente sem radical no denominador:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



fator racionalizante
2. Denominador com raiz de índice maior que 2:

→ Como nesse caso a raiz no expoente é mais complexa, normalmente ele requer mais de uma multiplicação pelo fator racionalizante para eliminar o radical do denominador:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{10^3}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{10^3}} \times \frac{\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{10}} = \frac{\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{10^4}}$$

fator racionalizante

$$\rightarrow \frac{\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{10^4}} \times \frac{\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{10}} \rightarrow \frac{\sqrt[5]{10^2}}{\sqrt[5]{10^5}} = \frac{\sqrt[5]{100}}{10}$$

fator racionalizante
3. Denominador com soma ou subtração envolvendo radicais .

→ Nesse caso, é primordial sabermos as propriedades dos produtos notáveis , mas você, aluno estudioso, tira isso de letra!

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \times \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

fator racionalizante

$$\rightarrow \frac{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$\rightarrow \frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5 + 2\sqrt{6}$$

Exercícios

Agora que já dominamos todos os principais casos de racionalização de expressões, vamos exercitar esse conhecimento para firmá-lo em nossa mente!

Fixação

1. Racionalize o denominador das seguintes frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

2. Qual o resultado da simplificação da expressão $5/\sqrt{75}$?

a) $\sqrt{3}/3$

b) $1/3$

c) $5\sqrt{3}$

d) $5/\sqrt{3}$

3. Sabendo-se que

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2;$$

Racionalize o denominador das expressões:

a) $\frac{4}{2+\sqrt{2}}$

b) $\frac{5}{6-\sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

4. Racionalize o denominador das seguintes expressões fracionárias:

a) $\frac{x}{\sqrt{x+y}}$

b) $\frac{2a}{\sqrt[8]{a^5}}$

c) $\frac{ab}{\sqrt[5]{a^2b^3}}$

d) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

5. Calcule o valor da expressão $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

De Olho no Vestibular

1. (PUC - RIO DE JANEIRO - 2016)
Quanto vale :

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} ?$$

2. (FUVEST-SP) A expressão $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

é igual a:

- a) 2
b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) 1

3. (FUVEST-SP)

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

A expressão é igual a :

- a) $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{4}$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt[3]{2}$
d) $\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$
e) $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt[3]{4}$

4. (UNIFOR-CE) A expressão

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$$

é equivalente a:

- a) $\frac{6+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{3}$
b) $\frac{6-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{21}+2}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$

5. (IFCE 2017 — adaptada) Aproximando os valores de $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$ até a segunda casa decimal, obtemos 2,23 e 1,73, respectivamente. Aproximadamente, o valor da expressão numérica a seguir até a segunda casa decimal é:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

- a) 1,98.
b) 0,96.
c) 3,96.
d) 0,48.
e) 0,25.

Gabarito

Fixação

1.a)	1.b)	1.c)	1.d)	2	3.a)
$\frac{\sqrt{7}}{7}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$	A	$4-2\sqrt{2}$
3.b)	3.c)	4.a)	4.b)	4.c)	4.d)
$\frac{30+5\sqrt{3}}{33}$	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{x\sqrt{x+y}}{x+y}$	$2\sqrt[8]{a^3}$	$\sqrt[5]{a^3 b^2}$	$\frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}$

5					
$\sqrt{2} + 1$					

De Olho no Vestibular

1	2	3	4	5	
$\sqrt{2} + 1$	B	D	C	E	

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, D. H. A matemática na formação do professor primário nos Institutos de Educação de São Paulo e Rio de Janeiro (1932-1938) 2013. 103f. Dissertação (Mestrado em Educação e S
- [2] CALKINS, N. A. Primeiras lições de coisas: Manual de ensino elementar para uso dos pais e professores. Tradução de Rui Barbosa. Rio de Janeiro. Ministério da Educação e Saúde, 1950. v. 13. Tomo I. Obras Completas
- [3] A Matemática do Ensino médio, Elon Lages Lima - SBM
- [4] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. Matemática: Compreensão e Prática. 9º Ano, Moderna. São Paulo, 1ª Ed. 2009.
- [5] Copyright © 2023 Neurochispas
- [6] GUEDES, Franciely. Racionalização de Denominadores. Disponível em:

<http://www.brasilecola.com/matematica/racionalizacao-denominado_res.htm>. Acesso em 05 de jan. de 2015.

[7] MATERIAL de Nivelamento. CASDVestibulares. São José dos Campos, 2010.

[8] A Utilização de Potências no Cotidiano. Disponível em: <<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/a-utilizacao-potencias-no-cotidiano.htm>>. Acesso em: 02 jun. 2023.

[9] 17 exercícios de potenciação com gabarito comentado. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-potenciacao/>>. Acesso em: 05 jun. 2023.

Equações do 1º grau

O objetivo desta apostila é apresentar a você as aplicações e operações envolvendo as equações de 1º grau, introduzindo os conceitos e detalhes para em seguida aplicá-los em contextos do cotidiano. Logo, ao final de tudo, desejamos que você seja capaz de:

- Se naturalizar com o uso de variáveis e operações matemáticas.
- Entender as definições matemáticas que envolvem as equações do 1º grau.
- Perder o medo e aprender a usar a matemática em problemas do cotidiano!

Variáveis

A linguagem matemática é uma ferramenta muito poderosa para resolver diversos problemas do cotidiano. Enquanto muitas situações podem ser complexas na linguagem corrente (Português), com o uso da matemática elas podem ficar bem mais simples.

A primeira etapa para utilizar a linguagem matemática nos problemas é utilizar das **variáveis** para representar os valores numéricos. E o que são essas variáveis? Estas, também chamadas de **incógnitas**, nada mais são que letras que ficam no lugar dos números enquanto não sabemos o valor deles! Veja o exemplo a seguir.

→ Problema: “Numa casa, há sete gatos, todos pretos ou brancos. Sabe-se que há dois pretos. Quantos gatos brancos existem na casa?”

Linguagem corrente	Linguagem matemática
Numa casa, há sete gatos, todos pretos ou brancos.	$p + b = 7$

Sabe-se que há dois pretos.	$p = 2$
Quantos gatos brancos existem na casa?”	$b = ?$

Neste exemplo as variáveis foram necessárias para representar as quantidades de gatos pretos e brancos, utilizando a letra p para os pretos e a letra b para os brancos, pois ainda não sabíamos as quantidades de cada um. Quando o número de gatos pretos foi revelado (dois), poderíamos dizer que $p = 2$ e então:

$$p + b = 7 \rightarrow 2 + b = 7$$

E quais letras símbolos podemos usar? Isso é escolha sua! No exemplo anterior usamos as letras p e b de forma intuitiva para representar gatos pretos e brancos (as iniciais das palavras), mas você poderia usar qualquer outra letra!

As expressões que envolvem as variáveis são chamadas de **equações** e no problema anterior $p + b = 7$ trata-se de um exemplo de equação. Ao traduzir o problema da linguagem corrente para a linguagem matemática, utilizando as variáveis, existem diferentes tipos de equações que podem surgir. Nesta apostila, iremos estudar apenas um tipo de expressão, as **equações de 1º grau**.

Definição

As equações de 1º grau que iremos aprofundar neste material são as expressões que sempre podem ser escritas no seguinte modelo (**forma reduzida**):

$$ax + b = 0$$

O termo representado acima pela letra “ x ” será a variável do problema cujo valor é desconhecido. As letras a e b são os chamados **coeficientes** da equação. Sempre teremos dois tipos de coeficientes, um estará multiplicando a variável (a) e outro somando (b). Veja os exemplos a seguir.

$$\rightarrow 3x + 5 = 0$$

$$\checkmark a = 3$$

$$\checkmark b = 5$$

$$\rightarrow -2x - 3 = 0$$

$$\checkmark a = -2$$

$$\checkmark b = -3$$

$$\rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)x - 4 = 0$$

$$\checkmark a = \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\checkmark b = -4$$

Veja que valores que os coeficientes podem representar podem ser positivos, negativos, frações, ou melhor, **qualquer tipo de número real**.

OBS: Existe uma condição para o **coeficiente da variável, ele deve ser diferente de 0**, isto é,

$$a \neq 0$$

Veja que se a fosse zero, a equação $ax + b = 0$ se transformaria em $b = 0$, e então a variável deixaria de aparecer na expressão, o que não faz sentido para os nossos estudos.

As equações também podem aparecer nos problemas de uma maneira diferente da forma reduzida, sendo um pouco mais difícil identificar os coeficientes, veja os exemplos.

$$\rightarrow 3x + 4 = 7$$

$$\rightarrow 2x + 3 - 4x = 2$$

$$\rightarrow 2x + \left(\frac{3}{2}\right)x - 4 = -12x + 5$$

Para conseguir deixar as equações anteriores no formato “ $ax + b = 0$ ” e então identificar os coeficientes mais facilmente, precisaremos saber manipular as equações.

O sinal de igualdade e tudo que está na esquerda e na direita dele podem ser imaginados como uma balança perfeitamente equilibrada!

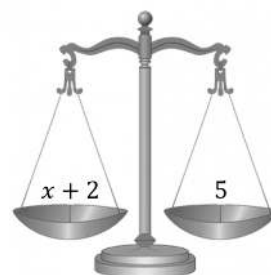


Figura 1: Representação da equação $x + 2 = 5$

(Fonte: <https://www.abecedariodaeducacao.pt/2019/01/02/equacoes-e-uma-balanca-de-dois-pratos/>).

Para manter a balança equilibrada, o que fizemos de um lado devemos fazer exatamente igual do outro lado! Não importa se é uma soma, subtração, multiplicação, divisão, ou qualquer outra operação, se fizemos na esquerda, devemos fazer na direita também, ou vice-versa. Dessa forma, veja o exemplo resolvido a seguir de manipulação de uma equação:

Exemplo: simplificando equação na sua forma reduzida

$$2x + \left(\frac{3}{2}\right)x - 4 = -12x + 5$$

Queremos deixar a equação acima no formato $[ax + b = 0]$

1º Passo) Simplificar os dois lados da igualdade

$$\text{Lado esquerdo: } 2x + \left(\frac{3}{2}\right)x - 4$$

Somando os termos que multiplicam a variável x , temos:

$$2x + \left(\frac{3}{2}\right)x - 4 \rightarrow \left(\frac{7}{2}\right)x - 4$$

2º Passo) Mexer na balança!
Agora a nossa equação está assim:

$$\left(\frac{7}{2}\right)x - 4 = -12x + 5$$

Para deixar a variável em somente um lado, vamos somar **12x** nos dois lados e simplificar:

$$12x + \left(\frac{7}{2}\right)x - 4 = 12x - 12x + 5$$

$$\left(\frac{31}{2}\right)x - 4 = 5$$

De forma parecida, vamos subtrair **5** nos dois lados e simplificar:

$$\left(\frac{31}{2}\right)x - 4 - 5 = 5 - 5$$

$$\left(\frac{31}{2}\right)x - 9 = 0$$

Pronto! Agora nossa equação está no formato reduzido que conhecemos antes! Os coeficientes desta equação acima são:

$$a = \left(\frac{31}{2}\right)$$

$$b = 9$$

Depois de um pouco de exercícios, essa forma de manipular as equações imaginando uma balança acaba ficando de lado, e o que acabamos fazendo na prática é realizando as **operações inversas!**

Duas operações são inversas entre si quando uma anula o que a outra faz

Soma e subtração, multiplicação e divisão são exemplos de operações inversas.

No exemplo anterior, ao invés de pensar em subtrair 5 de ambos os lados, poderíamos fazer um pouco mais rápido, só trocando a soma que existe no lado direito por uma subtração no lado esquerdo.

$$\left(\frac{31}{2}\right)x - 4 = 5 \rightarrow \left(\frac{31}{2}\right)x - 4 - 5 = 0$$

Raiz de uma Equação do 1º Grau

A solução de uma equação, isto é, o valor que a variável deve assumir para que a igualdade seja realmente verdadeira, é chamada de **raiz da equação**. Para descobrir a raiz da equação, basta fazer as mesmas manipulações que vimos anteriormente.

$$ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

$$\rightarrow 3x + 4 = 7$$

$$\checkmark 3 \times 1 + 4 = 7.$$

Ou seja, $7 = 7$. Logo, 1 é a raiz da equação, pois ao substituir x por 1, obtivemos a igualdade.

$$\rightarrow \left(\frac{15}{2}\right)x - 7 = \left(\frac{3}{2}\right)x + 5$$

$$\checkmark \left(\frac{15}{2}\right)x - 7 = \left(\frac{3}{2}\right)x + 5$$

$$\checkmark \left(\frac{15-3}{2}\right)x = 5 + 7$$

$$\checkmark \left(\frac{12}{2}\right)x = 12$$

$$\checkmark 6x = 12$$

$$\checkmark x = 2$$

Usamos as manipulações já apresentadas (operações inversas) para descobrir o valor de x. Logo, 2 é a raiz da equação.

Outro passo muito importante para a resolução das equações é a **verificação da solução**. Muitas vezes podemos errar alguma conta ou realizar alguma operação

inversa equivocada, fazendo com que a resposta encontrada para a incógnita seja errada. Para evitar isso, sempre ao chegar na resposta para a raiz da equação, faça a verificação, isto é, substitua o valor encontrado no lugar da variável na equação inicial do problema. Veja:

→ Equação: $3x + 13 = x + 3$

Suponha que você tenha feito as contas e chegado na resposta $x = -3$ para a raiz da equação. Vamos verificar se esta correto:

$$\begin{aligned} 3 \times (-3) + 13 &= -3 + 3 \\ -9 + 13 &= -3 + 3 \\ 4 &= 0 \end{aligned}$$

Obviamente **o resultado encontrado está errado**, pois ao substituir a variável (x) por -3, encontramos a informação de que 4 é igual a 0, que não é verdade. Logo, verificação da resposta é sempre um bom costume na resolução dos exercícios.

Diferentes equações do 1º grau podem ter a mesma raiz, chamamos elas de **equações equivalentes**. Elas possuem diferentes coeficientes, mas a raiz será sempre a mesma. Veja os exemplos:

1. $x + 5 = 0$
2. $-x - 5 = 0$
3. $3x + 15 = 0$
4. $\left(\frac{1}{5}\right)x + 1 = 0$

Todas as quatro equações que foram mostradas possuem a mesma raiz, que é -5, com coeficientes distintos, ou seja, são equações diferentes mas equivalentes. Até essa parte da leitura, você já está pronto para tentar fazer **os seguinte exercícios de fixação**:

Agora que sabemos o que é uma equação do 1º grau, como manipulá-las e resolvê-las, precisamos prosseguir para uma etapa muito importante deste capítulo e para a grande maioria das questões de provas, que é **identificar equações em problemas do cotidiano**.

Como já vimos no início do capítulo, o primeiro passo para a resolução dos exercícios é identificar as variáveis do problema! Em seguida, devemos prestar atenção para traduzir as frases da linguagem do português para a linguagem matemática. Veja os exemplo:

Ana e Maria são irmãs e a soma de suas idades é igual a 35. Qual a idade de Ana, se Maria é 5 anos mais nova?

Identificando as variáveis:

- Idade de Ana: a
- Idade de Maria: m

Veja que as escolhas das letras para serem as variáveis não possuem regras, mas para tornar mais intuitivo, escolhemos as iniciais dos nomes.

Traduzindo as operações:

- “a soma de suas idades é igual a 35”
✓ $a + m = 35$
- “Maria é 5 anos mais nova”
✓ $(m + 5) + m = 35$

Pois $a = m + 5$.

Resolvendo a equação: $(m + 5) + m = 35$

- $2m = 35 - 5$
- $2m = 30 \rightarrow m = \frac{30}{2} = 15$

Logo, Maria tem 15 anos de idade. Como Ana é 5 anos mais velha que Maria, Ana tem 20 anos.

Problemas Contextualizados

Uma pessoa tinha uma determinada quantia de dinheiro. No primeiro mês, gastou R\$ 100,00. No 2º mês, gastou a metade do que sobrou e ficou com R\$ 80,00. Qual era a quantia inicial?

Identificando as variáveis:

→ Quantidade inicial: x

Traduzindo as operações:

→ “gastou R\$ 100,00”
✓ $x - 100$

→ “gastou a metade do que sobrou”
✓ $(x - 100) - \frac{(x-100)}{2}$

→ “ficou com R\$ 80,00”
✓ $80 = (x - 100) - \frac{(x-100)}{2}$

Resolvendo a equação:

→ $80 = (x - 100) - \frac{(x-100)}{2}$

→ $80 = \frac{x}{2} - 50$

→ $130 = \frac{x}{2}$

→ $260 = x$

Logo, no início esta pessoa tinha R\$ 260,00.

Exercícios Resolvidos

1. Resolva a seguinte equação do 1º grau:

$$7x + 5 = \frac{3x}{2} - 4$$

Resolução: Assim como já aprendemos nos tópicos anteriores desta apostila, devemos aplicar as operações inversas para deixar a equação no formato mais simples. Veja:

$$\rightarrow 7x + 5 = \frac{3x}{2} - 4$$

$$\rightarrow 7x = \frac{3x}{2} - 4 - 5 = \frac{3x}{2} - 9$$

$$\rightarrow 7x - \frac{3x}{2} = -9$$

$$\rightarrow \frac{11x}{2} = -9$$

$$\rightarrow x = \frac{-18}{11}$$

2. Verifique se $x = 5$ é solução da seguinte equação:

$$\frac{4x}{5} + 23 = 6x - 3$$

Resolução: Vamos substituir o valor 5 no lugar da variável na equação:

$$\rightarrow \frac{4 \times 5}{5} + 23 = 6 \times 5 - 3$$

$$\rightarrow 4 + 23 = 30 - 3$$

$$\rightarrow 27 = 27$$

Logo, como o final das contas se mostrou verdadeiro, 5 é realmente a raiz da equação inicial.

3. Em um depósito de uma indústria existem vassouras, rodos e lixeiras. A quantidade de vassouras é triplo da quantidade de rodos e, além disso, existem duas lixeiras a mais do que vassouras. Se temos 30 itens no depósito, quantas lixeiras existem?

Resolução: O primeiro passo para resolver um problema contextualizado é identificar as variáveis! Neste caso temos três variáveis:

→ v : vassouras

→ r : rodos

→ l : lixeiras

O segundo passo é traduzir e escrever as equações descritas no enunciado do problema, veja:

→ “a quantidade de vassouras é o triplo da quantidade de rodos”

$$v = 3r$$

→ “existem duas lixeiras a mais do que vassouras”

$$l = v + 2$$

$$l = 3r + 2$$

→ “temos 30 itens do depósito”

$$v + r + l = 30$$

Aplicando as equações anteriores nesta última, temos:

$$3r + r + (3r + 2) = 30$$

$$7r + 2 = 30$$

$$7r = 28$$

$$r = 4$$

Logo, a quantidade de lixeiras é dada por:

$$l = 3r + 2 = 3 \times 4 + 2$$
$$l = 14$$

Lembre-se, sempre verifique a solução depois de encontrá-la!

Exercícios de Fixação

Nível 1 albertinho

1. Resolva a seguinte equação do 1º grau:

$$3x + 17 = -x + 13$$

2. Resolva a seguinte equação do 1º grau

$$\frac{m}{2} + 3 = -m$$

3. Resolva a seguinte equação do 1º grau

$$\frac{x}{2} + \frac{12x}{5} - \frac{x}{3} + 1 = 78$$

4. Verifique se 4 é raiz da seguinte equação:

$$2(p - 3) + \frac{p}{2} - 3 = 3p - 11$$

5. Qual o número que ao ser multiplicado por 2 é igual ao seu triplo subtraído de 1?

6. Resolva a seguinte equação:

$$\frac{x-3}{x-7} = \frac{x}{5+x}$$

7. Seja A e B as duas extremidades de uma haste de ferro. Seja M o ponto médio da haste. Se a distância entre A e M é igual à raiz da seguinte equação:

$$\frac{x-3}{2} + \frac{x}{5} - \frac{4x}{3} = \frac{16}{30}$$

Qual é o comprimento da haste?

Nível 2 albertinhos

- Um motorista, após ter enchido o tanque de seu veículo, gastou $\frac{1}{5}$ da capacidade do tanque para chegar à cidade A; gastou mais 28 litros para ir da cidade A até a cidade B; sobrou, no tanque, uma quantidade de combustível correspondente a $\frac{1}{3}$ de sua capacidade. Qual é a capacidade do tanque desse veículo?
- Um negociante vendeu a um freguês $\frac{2}{5}$ das laranjas que possuía mais três laranjas, e a um segundo freguês vendeu $\frac{1}{4}$ das laranjas que possuía inicialmente mais sete laranjas. Quantas laranjas possuía o negociante, sabendo-se que o primeiro freguês recebeu oito a mais que o segundo?
- A idade de uma pessoa é o dobro da de outra. Há cinco anos, a soma das idades das duas pessoas era igual à idade atual da mais velha. Quais são as idades atuais das duas pessoas?
- Duas torneiras enchem um tanque em 4 horas. Uma delas, sozinha, enchê-lo-ia em 7 horas. Em quantos minutos a outra sozinha, encheria o tanque?
- Sejam a e b dois números naturais consecutivos. Calcular o maior deles, sabendo que:

$$\frac{3b}{a} + \frac{b-a}{a} = 2$$

De Olho no Vestibular

- (ENEM/2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R\$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam

ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R\$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

- a) R\$ 14,00
- b) R\$ 17,00
- c) R\$ 22,00
- d) R\$ 32,00
- e) R\$ 57,00

2. O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado. Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre:

- a) 4,0 m e 5,0 m
- b) 5,0 m e 6,0 m
- c) 6,0 m e 7,0 m
- d) 7,0 m e 8,0 m
- e) 8,0 m e 9,0 m

3. (Fuvest) Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao

dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

4. (Pucsp) Um feirante compra maçãs ao preço de R\$0,75 para cada duas unidades e as vende ao preço de R\$3,00 para cada seis unidades. O número de maçãs que deverá vender para obter um lucro de R\$50,00 é

- a) 40
- b) 52
- c) 400
- d) 520
- e) 600

5. (Puccamp) Em uma festa, os rapazes presentes combinaram fazer o seguinte: um deles dançaria apenas com 3 garotas, outro apenas com 5 garotas, outro com apenas com 7 garotas e assim, sucessivamente, até o último rapaz, que dançaria com todas as 15 garotas. Se o número de garotas excedia o de rapazes em 15 unidades, o total de garotas e rapazes presentes nessa festa era

- a) 37
- b) 43
- c) 45
- d) 52
- e) 54

6. (Pucmg) Um reservatório, contendo 200 litros de água, está sendo esvaziado por meio de uma torneira cuja vazão é de 200cm³ por minuto. O tempo necessário para esvaziar completamente o reservatório, em minutos, é:

- a) 1
- b) 10
- c) 100

- d) 1000
e) 10000
7. (Fuvest) Um automóvel, modelo flex, consome 34 litros de gasolina para percorrer 374 km. Quando se opta pelo uso do álcool, o automóvel consome 37 litros deste combustível para percorrer 259 km. Suponha que um litro de gasolina custe R\$ 2,20. Qual deve ser o preço do litro do álcool para que o custo do quilômetro rodado por esse automóvel, usando somente gasolina ou somente álcool como combustível, seja o mesmo?
- a) R\$ 1,10
b) R\$ 1,20
c) R\$ 1,30
d) R\$ 1,40
e) R\$ 1,50
8. (UNESP) Duas empreiteiras farão conjuntamente a pavimentação de uma estrada, cada uma trabalhando a partir de uma das extremidades. Se uma delas pavimentar $\frac{2}{5}$ da estrada e a outra os 81 km restantes, a extensão dessa estrada é de
- a) 125 km
b) 135 km
c) 142 km
d) 145 km
e) 160 km
9. (UFLA) Um carro percorre 10 quilômetros com 1 litro de gasolina e 7 quilômetros com 1 litro de álcool. Se o preço do litro de gasolina é de R\$ 2,50, o valor do litro de álcool para o qual é indiferente utilizar álcool ou gasolina é de:
- a) R\$ 1,75
b) R\$ 1,80
c) R\$ 1,70
d) R\$ 1,90
10. (UTFPR) A soma de três números consecutivos é igual a 36. O dobro do menor número somado com o quadrado do maior número é:
- a) 181
b) 191
c) 221
d) 321
e) 421
11. Uma fábrica de painéis opera com um custo fixo mensal de R\$ 9 800,00 e um custo variável por painel de R\$ 45,00. Cada painel é vendido por R\$ 65,00. Seja x a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a 20% da receita. A soma dos algarismos de x é:
- a) 4
b) 2
c) 3
d) 6
e) 5
12. (Puc/Campinas 2017) Na equação $7x - 5 = 5(x + 9) - 28$, o equilíbrio (a igualdade) se estabelece entre os dois membros na presença de um valor determinado de x , usualmente chamado de solução da equação. Atribuindo a x , não o valor que corresponde à solução da equação, mas um valor 6 unidades menor que a solução dessa equação, obtém-se uma diferença numérica entre os dois membros da equação original, que, em valor absoluto, é igual a
- a) 17
b) 23
c) 12
d) 5
e) 0

Gabarito**Nível 1**

1	2	3	4	5
-1	-2	30	4 é solução	1
6	7	-	-	-
5/3	-61/19	-	-	-

Nível 2

1	2	3	4	5
60 litros	80	20 e 10 anos	9 horas e 20 minutos	4

De Olho no Vestibular

1	2	3	4	5	6
d	d	e	c	b	d
7	8	9	10	11	12
d	b	a	b	e	c

Referências Bibliográficas

[1] MATERIAL de Nivelamento. CASDVestibulares. São José dos Campos, 2010.

[2] Equações e uma balança de dois pratos. <https://www.abecedariodaeducacao.pt/2019/01/02/equacoes-e-uma-balanca-de-dois-pratos/>

Sistemas do 1º grau

A finalidade deste capítulo é apresentar o conceito de sistemas do 1º grau e suas propriedades. Ao final do capítulo, o leitor será capaz de:

- Identificar problemas que envolvem sistemas do 1º grau
- Classificar se o sistema é possível de ser resolvido
- Utilizar de diferentes métodos para resolução de sistemas do 1º grau

Introdução

Um sistema do 1º grau equivale a um conjunto de equações em que o grau das incógnitas é igual a 1.

Exemplos:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - 3z = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Os sistemas podem possuir uma quantidade infinita de incógnitas. Entretanto, nesse capítulo, iremos estudar apenas os sistemas do 1º grau com duas equações de duas variáveis.

O objetivo dos sistemas é encontrar valores numéricos para as variáveis (normalmente representadas por x e y) que satisfazem as equações apresentadas. Vamos analisar o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Perceba que se atribuírmos a x o valor **4** e a y o valor **1** e substituirmos na equação possuiremos igualdades verdadeiras.

O uso de letras na matemática pode gerar uma certa confusão inicialmente. Por isso, é importante discutir sobre o significado das incógnitas nas equações. As letras x e y são somente símbolos para representar um valor que desconhecemos inicialmente. Portanto poderíamos usar qualquer simbologia no lugar dessas letras:

$$\triangle + \triangle + \bullet = 5$$

$$\bullet - \triangle = 2$$

□ **Exercício:** Resolva o sistema acima.

Exercício motivador

Pedro e José são amigos. Ao saírem do trabalho, passaram por uma livraria onde havia vários objetos em promoção. Pedro comprou 2 cadernos e 3 livros e pagou R\$ 17,40, no total. José gastou R\$ 11,20 na compra de 2 livros e 1 caderno. Os dois ficaram satisfeitos e foram para casa. No dia seguinte, quiseram contar a um terceiro colega sobre suas compras, mas não se lembravam do preço unitário dos livros. Sabiam apenas que todos os livros, assim como todos os cadernos, tinham o mesmo preço. E agora? Será que existe algum modo de descobrir o preço de cada livro ou caderno com as informações que temos?

Uma etapa importante na solução de um problema é a tradução dos dados em linguagem matemática. Para essa etapa, vamos usar as variáveis x e y em vez de caderno e livro. Organizamos os dados assim:

□ Pedro: 3 livros + 2 cadernos = R\$ 17,40:

$$\square \quad 3x + 2y = 17,40$$

□ José: 2 livros + 1 caderno = R\$ 11,20:

$$\square \quad 2x + y = 11,20$$

Temos, assim, o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17,40 \\ 2x + y = 11,20 \end{cases}$$

Estabelecendo o valor de y em função de x na 2ª equação, temos:

$$\square \quad y = 11,20 - 2x$$

Substituindo esse valor na 1ª equação:

$$\square \quad 3x + 2(11,20 - 2x) = 17,40$$

Temos uma equação do 1º grau, com apenas uma incógnita. Resolvendo essa equação:

$$\square \quad 3x + 22,40 - 4x = 17,40$$

$$\square \quad 3x - 4x = 17,40 - 22,40$$

$$\square \quad -x = -5$$

$$\square x = 5$$

Como $y = 11,20 - 2x \Rightarrow y = 11,20 - 10 \Rightarrow y = 1,20$

Cada livro custou R\$ 5,00 e cada caderno, R\$ 1,20.

Resolução de Sistemas

Existem diferentes métodos para resolver um sistema linear, ou seja, encontrar um par de valores (x e y) que tornem verdadeiras as equações que o formam. A seguir iremos estudar esses métodos.

Método da Substituição

Esse método de resolução de um sistema consiste em “tirar” o valor de uma incógnita e substituir esse valor na outra equação. Veja um exemplo:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Escolhemos uma das equações e “tiramos” o valor de uma das incógnitas, ou seja, estabelecemos seu valor em função da outra incógnita, assim:

$$x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y$$

Agora, temos o valor de x em função de y e podemos substituir esse valor na segunda equação:

$$\Rightarrow x + y = 5 \Rightarrow 1 + y + y = 5 \Rightarrow 1 + 2y = 5$$

$$\Rightarrow 2y = 5 - 1 \Rightarrow 2y = 4$$

$$\square y = 2$$

$$\text{Como } x = 1 + y \Rightarrow x = 1 + 2$$

$$\square x = 3.$$

Temos então que o par $(3; 2)$ é solução do sistema.

Método da Adição

Esse outro método de resolução de um sistema consiste em somar os termos das equações. Veja o exemplo:

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

Somando as equações:

$$\begin{array}{r} x - y = -4 \\ + 2x + y = 9 \\ \hline 3x = 5 \end{array}$$

$$\square x = 5/3$$

Para obter o valor de y , devemos substituir o valor de x encontrado em uma das equações:

$$\square x - y = -4 \Rightarrow 5/3 - y = -4$$

$$\square -y = -4 - 5/3 \Rightarrow -y = \frac{-12 - 5}{3} = \frac{-17}{3}$$

$$\square y = 17/3$$

$$\left\{ \frac{5}{3}; \frac{17}{3} \right\}$$

A solução do sistema é o par

Usando um Artifício de Cálculo

Vamos resolver o sistema abaixo pelo método da adição:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Se somarmos as equações do jeito que estão, não conseguiremos anular um dos termos. Por isso, vamos usar um artifício de cálculo:

$\square$ primeiro, multiplicamos a 1ª equação por +2;

$\square$ depois, multiplicamos a 2ª equação por -3.

O sistema sofrerá a seguinte transformação:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y = 4 & \times 2 & \Rightarrow 6x + 4y = 8 \\ 2x + 3y = 1 & \times (-3) & \Rightarrow -6x - 9y = -3 \end{array}$$

Agora, podemos somar o sistema:

$$\begin{array}{r} 6x + 4y = 8 \\ + -6x - 9y = -3 \\ \hline -5y = 5 \end{array}$$

$$\square y = -1$$

Para obter o valor de x , devemos substituir o valor de y em uma das equações:

$$\square 2x + 3y = 1 \Rightarrow 2x + 3(-1) = 1$$

$$\square 2x - 3 = 1 \Rightarrow 2x = 4$$

$$\square x = 2$$

Portanto, a solução do sistema é o par: $(2; -1)$.

Verificação:

$3x + 2y = 4 \Rightarrow 3.2 + 2.(-1) = 4 \Rightarrow 6 - 2 = 4$
(verdadeiro)

$2x + 3y = 1 \Rightarrow 2.2 + 3.(-1) = 1 \Rightarrow 4 - 3 = 1$
(verdadeiro)

Observação: Você deve ter percebido que o artifício de cálculo, usado para resolver esse sistema, permitiu que a variável x desaparecesse quando somamos as equações. Isso ocorreu porque a variável x , nas duas equações, ficou com coeficientes simétricos.

Exercícios Propostos

Nível 1

1) Resolva o sistema por substituição:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

2) Resolva os sistemas por adição:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 7x + 2y = 11 \end{cases}$

3) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 2x - 2y = -1 \end{cases}$

4) Verifique se o par $(1; 2)$ é solução para o sistema:

$$\begin{cases} 10x - 2y = 6 \\ x + 5y = 11 \end{cases}$$

5) Escreva um sistema que corresponda à seguinte situação: Um armário custa o triplo de uma mesa. Os dois juntos custam R\$ 120,00.

6) Resolva o sistema do Exercício 5.

Nível 2

7) Num quintal há galinhas e coelhos, num total de 8 cabeças e 22 pés. Quantos animais há de cada espécie?

8) Tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tens, quando tu tiveres a idade que tenho, a soma das nossas idades será 63 anos. Quais as idades hoje?

9) Estando todos irmãos reunidos à mesa, um menino diz: "Vejo tanto irmãos quanto irmãs" Uma menina diz: "Vejo que o número de meus irmãos é o dobro do de minhas irmãs". Quantos são os meninos? E as meninas?

Nível 3

10) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{y} = -1 \end{cases}$$

11) Resolva os sistemas, sabendo que a, b, c, d sempre são números positivos:

a) $\begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{b}{8} = \frac{c}{12} \\ 2a + 3b + 4c = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} \\ 3a - 2b + c = 594 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3}{a} = \frac{15}{b} = \frac{6}{c} = \frac{9}{d} \\ abcd = 7680 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{b}{10} = \frac{c}{5} \\ b^2 - c^2 = 12 \end{cases}$

Gabarito

□ **Nível 1:**

1) $x = 5, y = 1$

2) a) $x = 2, y = 8$ b) $x = 1, y = 2$

3) a) $x = -1, y = 2$ b) $x = 1/2, y = 1$

4) $(1; 2)$ é solução

5) seja a o preço do armário e m o preço da mesa

$$\begin{cases} a = 3m \\ a + m = 120 \end{cases}$$

6) $a = \text{R\$ } 90,00$ e $m = \text{R\$ } 30,00$

□ **Nível 2:**

7) 3 coelhos e 5 galinhas

8) 21 e 28 anos

9) 4 meninos e 3 meninas

□ **Nível 3:**

10) $x = 4, y = 4/3$

11)

a) $a = 0,5$, $b = 1$, $c = 1,5$

b) $a = 264$, $b = 330$, $c = 462$

c) $a = 4$, $b = 20$, $c = 8$, $d = 12$

d) $b = 4$, $c = 2$

Referências Bibliográficas

[1] MATERIAL de Nivelamento.
CASDVestibulares. São José dos Campos,
2010.

Equações do 2º grau

O objetivo desta apostila é utilizar o conhecimento básico do capítulo sobre equações do 1º grau e se aprofundar em operações envolvendo agora as equações de 2º grau, partindo dos termos formais para em seguida aplicá-los em contextos do cotidiano. Logo, ao final de tudo, desejamos que você seja capaz de:

- Identificar e resolver uma equação do segundo grau de diferentes formas.
- Aumentar seu nível de interpretação em problemas contextualizados.
- Perder o medo e aprender a usar a matemática em problemas do cotidiano!

Definições

As equações de 2º grau que iremos estudar neste capítulo são todas as equações que podem ser escritas da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Onde x é a variável real e a , b e c são os coeficientes da equação, também números reais.

OBS: Analogamente às equações de 1º grau, o coeficiente a (também chamado de **coeficiente líder**, pois multiplica o termo variável de maior expoente), que multiplica a variável com maior expoente deve ser diferente de zero.

$$a \neq 0$$

As equações de grau 2 se dividem em duas classes: **as completas e as incompletas**. Uma equação do segundo grau é **completa quando todos os coeficientes são não nulos**. Veja:

$$\rightarrow 3x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$\checkmark a = 3$$

$$\checkmark b = 5$$

$$\checkmark c = -7$$

Uma equação do segundo grau é **incompleta quando pelo menos um dos coeficientes, b ou c , são nulos**. Veja:

$$\rightarrow x^2 + x = 0$$

$$\checkmark a = 1$$

$$\checkmark b = 1$$

$$\checkmark c = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 2 = 0$$

$$\checkmark a = 1$$

$$\checkmark b = 0$$

$$\checkmark c = 2$$

$$\rightarrow 5x^2 = 0$$

$$\checkmark a = 5$$

$$\checkmark b = 0$$

$$\checkmark c = 0$$

Veremos a seguir que as equações completas e incompletas possuem algumas maneiras diferentes para encontrar suas soluções.

Raízes de uma Equação do 2º Grau e a Fórmula de Bhaskara

Como já visto no capítulo sobre equações de 1º grau, a raiz ou solução de uma equação é o valor que a variável deve assumir para que esta seja verdadeira. De modo diferente, as equações de 2º grau podem **no máximo duas raízes**.

Para encontrar as duas raízes iremos utilizar uma fórmula muito importante a partir de agora, a **fórmula de Bhaskara**, em homenagem ao matemático hindu

Bhaskara Akaria (1114 - 1185). Seja “ $ax^2 + bx + c = 0$ ” uma equação do 2º grau, as soluções são determinadas da seguinte forma:

Fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a}$$

Ou seja, as raízes serão, x_1 e x_2 , com valores:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a}$$

Exemplo: Resolva a seguinte equação utilizando a **fórmula de Bhaskara**:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Identificando os coeficientes:

→ $a = 1$

→ $b = -5$

→ $c = 6$

Substituindo na fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{((-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Logo, as duas raízes serão:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

As raízes da equação são os valores 3 e 2.

Nesta fórmula aparece uma expressão importante para os estudos das raízes, trata-se do **fator discriminante**, denominado pela letra grega **Δ (delta)**.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Fórmula de Bhaskara evidenciando o Δ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

Antes de utilizar a fórmula de bhaskara, pode-se calcular o valor do fator discriminante a fim de obter algumas informações sobre as raízes. Veja.

→ Se $\Delta = 0$, a equação só terá uma raiz, com **multiplicidade 2**, ou seja, a equação tem duas raízes iguais, pois:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Para verificar isto, basta aplicar a fórmula de Bhaskara.

→ Se $\Delta < 0$, **a equação não irá possuir raízes reais**, pois o fator discriminante está dentro de uma raiz quadrada.

OBS: A equação tem raízes nesse caso, porém não entram na nossa área de estudos, que trata-se apenas dos números reais.

→ Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas.

A seguir, veja uns exemplos que demonstram cada um desses casos:

→ $x^2 - 4x + 4$

Veja que o discriminante é dado por:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

Logo, antes mesmo de resolver, sabemos que vamos encontrar apenas um valor real como solução desta equação.

→ $x^2 + 3x + 7$

Veja que o discriminante é dado por:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -19 < 0$$

Logo, não precisamos nem aplicar a fórmula de Bhaskara com o intuito de achar raízes reais, pois elas não existem. As raízes desta equação são números complexos que não são estudados neste capítulo, não se preocupe com eles por enquanto!!!

→ $x^2 - 3x + 2$

Veja que o discriminante é dado por:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$$

Logo, esta equação possui duas raízes reais e distintas, basta seguir com a fórmula de Bhaskara para encontrá-las.

OBS: O conceito de multiplicidade trata-se de quantas vezes a raiz se repete dentre as soluções da equação. Esta definição se estende para qualquer grau de equação, mas por enquanto estamos estudando apenas as de grau 2, ou seja, a maior multiplicidade que uma raiz pode ter será 2.

Determinação de uma Equação do 2º Grau

Além da forma reduzida de escrever a equação do 2º grau ($ax^2 + bx + c = 0$), existe outra forma de escrever que torna as raízes mais visíveis, trata-se da **forma fatorada**:

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são x_1 e x_2 , podemos escrever a equação no seguinte formato:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

A partir desta forma, é fácil determinar uma equação de 2º grau que contenha x_1 e x_2 como raízes. Muitas questões de vestibulares exigem essa habilidade!

Exemplo: Passe a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ para sua forma fatorada

Encontrando as raízes:

- $a = 1$
- $b = -3$
- $c = 2$

Substituindo na fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{((-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Logo, as duas raízes serão:

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

As raízes da equação são os valores 3 e 2.

Reescrevendo a equação:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$(x - 2) \cdot (x - 1) = 0$$

A equação acima é exatamente a mesma que a equação inicial, porém apenas escrita de uma forma diferente, que permite visualizar melhor as raízes. Basta desenvolver o produto entre os parênteses para verificar isto.

Exemplo: Encontre uma equação do 2º grau que tenha 10 e 4 como raízes.

Escreva na forma fatorada:

$$a \cdot (x - 10) \cdot (x - 4) = 0$$

Veja que para determinarmos a equação pedida, basta descobrir o valor do coeficiente líder “a”. No entanto, não precisamos nos preocupar com este valor, pois qualquer que seja ele, 10 e 4 continuarão sendo soluções da equação. Para verificar isto, basta substituir a variável por 10 ou 4 e ver que os parênteses da equação passam a ser 0.

Logo, podemos escolher qualquer valor para o coeficiente, mas respeitando que este deve ser **diferente de zero**. Iremos escolher $a = 1$, obtendo uma possível solução, mas não a única:

$$(x - 10) \cdot (x - 4) = 0$$

Para finalizar, veja alguns exemplos de forma fatorada para esclarecer algumas possíveis dúvidas:

$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

Trata-se de uma equação cujo fator discriminante é nulo, ou seja, possui duas raízes iguais (ou uma raiz com multiplicidade 2). Ao aplicar a fórmula de Bhaskara, descobrimos que esta raiz é -1. Ou seja, a forma fatorada dessa equação é:

$$(x + 1)(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$$

Esta equação possui fator discriminante negativo, ou seja, não possui valores reais. Desta forma, ela pode ser escrita na forma fatorada, mas como as raízes são números complexos, não iremos utilizar esta forma neste exemplo.

Outros maneiras de resolução

Em diversas questões envolvendo equações do 2º grau, nem sempre é necessário aplicar a fórmula de Bhaskara para achar as raízes. Existem alguns métodos alternativos que podem ser mais rápidos e eficientes em certos casos.

A primeira resolução alternativa que iremos investigar é a respeito das **equações de 2º incompletas, trabalhando a fatoração destas**. Veja os exemplos:

$$\rightarrow x^2 - 3x = 0$$

Veja que podemos colocar **a variável x em evidência** na equação para deixá-la no seguinte formato:

$$x(x - 3) = 0$$

Logo, temos um produto de dois termos, $(x - 3)$ e x , que está resultando em 0, o que significa que temos duas possíveis soluções: $x = 0$ ou $(x - 3) = 0$

Portanto as raízes desta equação $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$.

$$\rightarrow x^2 - 5 = 0$$

Neste caso, tudo fica bem mais simples, basta **isolarmos a variável e tirarmos a raiz quadrada** de ambos os lados da equação.

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm \sqrt{5}$$

Portanto as raízes desta equação são $x_1 = \sqrt{5}$ e $x_2 = -\sqrt{5}$.

Uma outra maneira de resolver equações de 2º grau, trata-se de utilizar a técnica da **Soma e Produto das raízes**.

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são x_1 e x_2 , podemos dividir toda a equação pelo coeficiente a ,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

E desta forma fazer as seguintes associações:

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$$

Soma das raízes (S)

$$\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$

Produto das raízes (P)

Ou seja, a equação $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ pode ser escrita como:

$$x^2 - S \cdot x + P = 0$$

Onde S é a soma das raízes e P o produto destas.

A princípio pode parecer um pouco confuso, mas com muita prática em exercícios veremos que essa técnica é muito poderosa para resolver equações de forma muito rápida, pois a maioria das questões de provas possuem soluções fáceis de identificar através da soma e produtos das raízes.

$$\rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-10)}{2} = 5 \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{12}{2} = 6$$

Nesta equação, vemos que a soma das raízes é 5 e o produto é 6. Quais números somados resultam em 5 e multiplicados resultam em 6? Pode parecer difícil no início, mas com prática percebemos mais rapidamente que as raízes são 2 e 3.

$$\rightarrow x^2 - x = 0$$

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = 0$$

Neste caso já é evidente que uma das raízes é 0, pois o produto das raízes é 0. Como a soma é 1, a outra raiz deve ser 1.

OBS: Estas relações entre os coeficientes e operações entre as raízes são as chamadas Relações de Girard, que se estendem para equações de qualquer grau, no entanto, utilizaremos apenas para o grau 2, por enquanto.

Exercícios de Fixação**Nível 1 albertinho**

1. Encontre as raízes reais das seguintes equações, caso existam, utilizando a fórmula de Bhaskara:

- a) $x^2 + 2x + 1 = 0$
- b) $3x^2 + 7x + 5 = 0$
- c) $(x - 2)(x + 3) = x - 2$
- d) $x^2 + 9x = 0$
- e) $x^2 - 49 = 0$
- f) $x^2 + 5 = 0$

2. Encontre as raízes reais das seguintes equações, caso existam, utilizando as relações de Soma e Produto:

- a) $x^2 + 2x + 1 = 0$
- b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
- c) $x^2 - 9x + 20 = 0$
- d) $x^2 - 6x + 5 = 0$
- e) $x^2 + 4x - 5 = 0$
- f) $x^2 - 9x + 14 = 0$

3. Se a equação abaixo possui 5 como raiz, qual o valor do coeficiente c ?

$$x^2 + 10x - c = 0$$

4. Se em uma equação de 2º grau as raízes são 7 e 13, e o coeficiente que multiplica o termo variável de grau 1 é 10, qual é o valor do coeficiente líder?

5. Um retângulo possui como dimensões as raízes da seguinte equação

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

Qual a área deste retângulo?

6. Determine uma equação que tenha 3 e -7 como soluções.

Nível 2 albertinhos

1. Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - 6x + 5$, então qual é o valor da seguinte expressão?

$$\frac{5}{x_1} + \frac{5}{x_2}$$

2. O produto da idade de João pela idade de Luciana é igual a 374. João é 5 anos mais velho que Luciana. Quantos anos tem cada um deles ?
3. Um homem caminhou 240 km em uma certa viagem. Se caminhasse mais 4 km por dia, ele teria gasto dois dias a menos na viagem. Quantos dias ele gastou na viagem e quantos quilômetros andou por dia?
4. Utilizando seus conhecimentos sobre equação do segundo grau, julgue as afirmativas a seguir como verdadeiras ou falsas.

I – Toda equação do segundo grau possui pelo menos uma solução real.

II – Uma equação do segundo grau é conhecida como incompleta quando o coeficiente b ou c é igual a zero.

III – Quando o valor do discriminante é um número positivo que não possui raiz

quadrada exata, dizemos que a equação não possui solução.

Analisando as afirmativas, podemos afirmar que:

- a) todas estão incorretas.
- b) somente a afirmativa I está correta.
- c) somente a afirmativa II está correta.
- d) somente a afirmativa III está correta.
- e) todas estão corretas.

5. Veja a equação abaixo cuja variável é x .

$$(k^2 - 3k + 2)x^3 + x^2 - (4k)x - 10 = 0$$

Quais os valores da variável k para que a equação acima seja do 2º grau? Dado estes valores, quais fazem com que a equação tenha duas raízes reais distintas?

De Olho no Vestibular

1. (ENEM/2013) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -t^2/4 + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°C . Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

- a) 19,8
- b) 19,0
- c) 20,0

- d) 38,0
- e) 39,0

2. (FATEC) Se a equação $x^2 - 10x + k = 0$ tem uma raiz de multiplicidade 2, então o valor de k é:

- a) 100
- b) 25
- c) 5
- d) 1
- e) 0

3. (ENEM/2010) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t , em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções $V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3000$ e

$$V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3000.$$

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e, também, no tempo t igual a

- a) 1,3 h
- b) 1,69 h
- c) 10,0 h
- d) 13,0 h
- e) 16,9 h

4. (UERGS) Sendo S a soma e P o produto das raízes da equação $2x^2 - 5x - 7 = 0$, pode-se afirmar que
- $S - P = 6$
 - $S + P = 2$
 - $S \times P = 4$
 - $S / P = 1$
 - $S < P$
5. (FGV) As duas raízes da equação $x^2 - 63x + k = 0$ cuja variável é x são números inteiros e primos. O total de valores que k pode assumir então é:
- 4
 - 3
 - 2
 - 1
 - 0
6. (ENEM) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no:
- 19º dia
 - 20º dia
 - 29º dia
 - 30º dia
 - 60º dia
7. (Espm) As raízes da equação $3x^2 + 7x - 18 = 0$ são m e p . O valor da expressão $m^2p + mp^2 - m - p$ é:
- $29/3$
 - $49/3$
 - $31/3$
 - $53/3$
 - $26/3$
8. (UEPG) Sendo p e q as raízes da equação $2x^2 - 5x + (a - 3) = 0$, cuja variável é x , onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{4}{3}$, assinale o(s) item(s) correto(s):
- O valor de a é um número inteiro
 - O valor de a está entre -20 e 20
 - O valor de a é um número positivo
 - O valor de a é um número menor que 10
 - O valor de a é um número fracionário.
9. (UEPG) Um ciclista fez um percurso de 600 km, em " n " dias, percorrendo x quilômetros por dia. Se ele tivesse percorrido 10 km a mais por dia, teria gasto 3 dias a menos na viagem. Nestas condições, assinale os itens corretos:
- O número de dias usados para percorrer os 600 km é par
 - Ele fez o percurso em 30 dias
 - Ele percorreu mais de 12 km por dia
 - O número de quilômetros percorridos por dia é um número divisível por 8.
10. (UTFPR) A soma das soluções inteiras da equação $(x^2 + 1)(x^2 - 25)(x^2 - 5x + 6) = 0$
- 1
 - 3
 - 5

- d) 7
e) 11
11. (UESPI) Para qual valor real e positivo de “a”, a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 + ax + 12 = 0$ é igual a 25?
- a) 7
b) 6
c) 5
d) 4
e) 3
12. (UFV) As medidas da hipotenusa e de um dos catetos de um triângulo retângulo são dadas pelas raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$. A área desse triângulo é:
- a) 10
b) 6
c) 12
d) 15
e) 20
13. (PUCRJ 2006) Ache um valor de m tal que as duas soluções da equação $x(x+1) = m(x+2)$ sejam iguais.
14. (CESGRANRIO) Se as raízes da equação $x^2 + bx + 27 = 0$ são múltiplos positivos de 3, então o coeficiente b vale:
- a) 12
b) -12
c) 9
d) -9
e) 6
15. (CFTCE 2006) Um retângulo tem 12 m^2 de área. Aumentando-se o comprimento da base do mesmo de 1 m e diminuindo a altura

de 2 m, obtém-se um retângulo de área igual a 12 m^2 . Calcule as dimensões do retângulo.

16. (IFCE 2012) Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $3x^2 - 5x + p - 2 = 0$, onde p é um número real, e sabendo-se que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{2},$$

pode-se concluir corretamente que

- a) $p = -2$
b) $p = -8/5$
c) $p = 0$
d) $p = 2$
e) $p = 4$
17. (IBMECRJ) Um grupo de amigos alugou uma van por 342 reais. Ao fim do passeio, três deles estavam sem dinheiro e os outros tiveram que completar o total, pagando cada um deles 19 reais a mais do que deveriam. Podemos afirmar que o total de amigos é:
- a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Gabarito

Nível 1

1a	1b	1c	1d	1e	1f
-1	Não tem	-2 e 2	0 e -9	7 e -7	Não tem
2a	2b	2c	2d	2e	2f
-1	2 e 3	4 e 5	1 e 5	1 e -5	2 e 7
3	4	5	6	-	-
75	-1/2	9	$x^2+4x-21=0$	-	-

Nível 2

1	2	3	4	5
6	17 e 22 anos	12 dias	c	k=1 e k=2
Continuação da questão 5: k=1 e k=2 permitem duas raízes reais e distintas para x.				

De Olho no Vestibular

1	2	3	4	5	6
d	b	a	a	d	b
7	8	9	10	11	12
b	b, c, d, e.	c, d.	c	a	b
13	14	15	16	17	-
$m = -3 \pm \sqrt{8}$	b	2m e 6m	e	d	

Referências Bibliográficas

[1] GIOVANNI; CASTRUCCI; JUNIOR, Giovanni. A Conquista da Matemática. 9º Ano, FTD. São Paulo, Ed. renov. 2007.

[2] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. Matemática e Realidade Ensino Fundamental. 8ª Série/9º Ano, Atual. São Paulo, 5ª Ed. 2005.

[3] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. Matemática: Compreensão e Prática. 9º Ano, Moderna. São Paulo, 1ª Ed. 2009.

[4] MATERIAL de Nivelamento. CASDVestibulares. São José dos Campos, 2012.

[5] MALANGA, Umberto César Chacon. Matemática. Livro 1, Pré-Vestibular, Poliedro. São José dos Campos, 1ª Ed. 2011.

[6] EXERCÍCIOS de Equações do 2º Grau. Disponível em:

<<http://www.somatematica.com.br/soexercicios/equacoes2.php>>. Acesso em 12 de jun. de 2013.

Inequações do 1º grau

Neste capítulo, trabalharemos com as inequações do primeiro grau, conhecimento essencial para procedermos no aprendizado da matemática. Diante disso, trataremos de abordar exercícios fundamentais a fim de fixar a resolução de tais problemas.

Introdução

Uma inequação é uma expressão matemática que representa uma desigualdade entre os elementos de ambos os lados do sinal que representa a desigualdade. São os sinais:

- ✓ $>$ “maior que”;
- ✓ $<$ “menor que”;
- ✓ $\leq$ “menor ou igual”;
- ✓ $\geq$ “maior ou igual”;

Dizemos que uma inequação é do primeiro grau quando o expoente da variável estudada é 1.

Podemos abordar também uma inequação do 1º grau da seguinte forma: tomemos $f(x)$ e $g(x)$ funções lineares. São inequações do primeiro grau as sentenças:

- ✓ $f(x) > g(x)$
- ✓ $f(x) < g(x)$
- ✓ $f(x) \geq g(x)$
- ✓ $f(x) \leq g(x)$

Comumente, em uma questão é necessário determinar o conjunto solução da inequação, ou seja, determinar os valores de sua incógnita – seu x – que satisfazem a sentença dada. Para isso, nessa situação podemos “isolar” a incógnita para assim obter o conjunto solução. Segue um exemplo.

Exemplo

$$x + 5 \geq 32$$

Para determinarmos o conjunto solução, precisamos isolar o x . Nesse caso, basta passar o 5 subtraindo para o outro lado (assim como em uma equação comum).

$$x \geq 32 - 5$$

$$x \geq 27$$

Assim, sabemos que para satisfazer tal expressão, x deve ser um número real **maior ou igual** a 27. Podemos representar nossa resposta das seguintes formas:

$$S = [27, +\infty) \text{ ou}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 27\}$$

A representação utilizando colchetes é feita da seguinte forma:

- ✓ “ [“ ou “] ” para quando o número apresentado faz parte da solução;
- ✓ “ (“ ou “) ” para quando não faz parte da solução.

O símbolo que representa o infinito nunca deve ser representado com colchetes.

Um outro exemplo

$$15x < 300$$

Novamente, precisamos isolar o x . Assim como em uma equação habitual, passamos o 15 dividindo para o outro lado:

$$x < \frac{300}{15}$$

$$x < 20$$

O nosso conjunto solução será $(-\infty, 20)$ ou igualmente $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 20\}$

Cuidado!

$$-6x + 14 \geq -10$$

Primeiro, podemos passar o 14 subtraindo para o outro lado da desigualdade.

$$\begin{aligned} -6x &\geq -10 - 14 \\ -6x &\geq -24 \end{aligned}$$

Muita atenção nessa hora. Sempre que passarmos um número negativo multiplicando ou dividindo para o outro lado da inequação, **devemos inverter o sinal da desigualdade**, ou seja, se antes havia um ">", substituímos por um "<", e vice versa. Dessa forma, nosso exemplo seguirá da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &\leq \frac{-24}{-6} \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

Assim, nosso conjunto solução é $(-\infty, 4]$, que equivale a $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$.

IMPORTANTE

Ao passar multiplicando ou dividindo por um número negativo devemos inverter os sinais da desigualdade:

- ✓ Troca-se ">" por "<" e "<" por ">"
- ✓ Troca-se "≥" por "≤" e "≤" por "≥".

Vale também lembrar que nunca podemos dividir por 0.

Para Saber Mais

Ao estudar inequações modulares, comumente nos deparamos com o seguinte caso:

- ✓ $|x - a| < K$ ou
- ✓ $|x - a| > K$

Em que x é uma incógnita pertencente aos reais e a e K são números reais, K maior que 0. Para solucioná-las, seguimos com a seguinte propriedade:

- ✓ $|x - a| < K \Rightarrow -K + a < x < K + a$, o conjunto solução será a interseção da solução das duas inequações;
- ✓ $|x - a| > K \Rightarrow x > K + a$ e $x < -K + a$, e o conjunto solução será a união da solução das duas inequações.

Exercícios

Fixação

- Determine o conjunto solução das seguintes inequações:
 - $4x + 4 \geq 13$
 - $-2x + 3 > -27 + x$
 - $\frac{x}{4} + 17 \leq 23$
 - $2x + 2 \leq 2$
 - $6x > 0$
- Determine qual dos seguintes valores satisfaz a inequação $-7x + 6 > -29$.
 - 5
 - 6
 - 7
 - 0
- Se $x < 6$ e $6 < y$, pode-se afirmar que:
 - $x = y$
 - $x > y^4$
 - $x < y$
 - $x = 6$

De Olho no Vestibular

- (IFAL-2015) Para pintar sua casa, Marcos encontra dois pintores: Antônio, que cobra um valor contratual de R\$ 100,00 e mais R\$ 10,00 por m^2 de área pintada, e Benedito, que cobra R\$ 200,00 no contrato e mais R\$ 6,00 por m^2 de pintura. Acima de quantos m^2 de área

pintada é mais econômico contratar Benedito?

- a. 5
- b. 10
- c. 15
- d. 20
- e. 25

2. (UFAL) A soma de todos os números inteiros e positivos que satisfazem

$$\frac{3x}{2} + \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} + 5 \text{ é:}$$

- a. 3
- b. 6
- c. 10
- d. 15
- e. 21

3. Um zootecnista pretende testar se uma nova ração para coelhos é mais eficiente do que a que ele vem utilizando atualmente. A ração atual proporciona uma massa média de 10 kg por coelho, com um desvio padrão de 1 kg, alimentado com essa ração durante um período de três meses.

O zootecnista selecionou uma amostra de coelhos e os alimentou com a nova ração pelo mesmo período de tempo. Ao final, anotou a massa de cada coelho, obtendo um desvio padrão de 1,5 kg para a distribuição das massas dos coelhos dessa amostra.

Para avaliar a eficiência dessa ração, ele utilizará o coeficiente de variação (CV) que é uma medida de dispersão definida por $CV = S/X$, em que s representa o desvio padrão X , a média das massas dos coelhos que foram alimentados com uma determinada ração.

O zootecnista substituirá a ração que vinha utilizando pela nova, caso o coeficiente de variação da distribuição das massas dos coelhos que foram alimentados com a nova ração for menor do que o coeficiente de variação da distribuição das massas dos coelhos que foram alimentados com a ração atual.

A substituição da ração ocorrerá se a média da distribuição das massas dos coelhos da amostra, em quilograma, for superior a

- a. 5,0.
- b. 9,5.
- c. 10,0.
- d. 10,5.
- e. 15,0.

Gabarito

Fixação

- 1.
 - a. $[\frac{9}{4}, +\infty)$
 - b. $(-\infty, 10)$
 - c. $(-\infty, 24]$
 - d. $(-\infty, 0]$
 - e. $(0, +\infty)$
- 2. D
- 3. C

De Olho no Vestibular

1	2	3
E	D	E

Juros simples e Juros compostos

Introdução

Como vimos anteriormente, a matemática financeira é uma área de aplicação da matemática que estuda a variação do dinheiro ao longo do tempo.

No nosso dia a dia lidamos com dinheiro constantemente, na nossa conta bancária, no uso do cartão de crédito, na poupança, em um investimento ou em um empréstimo, por exemplo.

Sendo assim, provavelmente você já se deparou com uma situação envolvendo cálculo de juros. Os juros são a principal fonte de renda do sistema econômico mundial, e todas as operações, seja de curto ou longo prazo, são computadas através das taxas de juros, nos bancos, comércios e credoras.

Sendo assim, iremos analisar com mais detalhes os cálculos envolvendo juros simples e compostos a seguir.

Inicialmente, temos como definição:

- **Juros (J):** os juros correspondem ao valor remunerado pelo capital, sendo uma espécie de pagamento pelo uso de um capital. Quando emprestamos qualquer valor do banco, por exemplo, será cobrada uma taxa que corresponde ao período que ficamos com aquele valor. Essa quantia são os juros.
- **Taxa de juros (i):** a taxa de juros é a porcentagem que representa o valor adicional ao capital inicial. Esse percentual está sempre relacionado com um prazo, podendo ser dias, meses ou anos.
- **Capital (C):** o capital é o valor atual, correspondente à quantia inicial.

- **Montante (M):** o montante é a quantia total paga por meio de uma operação, incluindo o capital e os juros.



Figura 1 - Matemática Financeira

Fonte:

<https://brasilescola.uol.com.br/matematica/matematica-financeira.htm>

Juros simples

Nos juros simples, o percentual de juros incide apenas sobre o capital inicial.

A fórmula que nos dá o valor do juros simples em aplicações desse tipo é:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Onde:

J = juros

C = capital

i = taxa de juros

t = tempo de aplicação (mês, ano, etc.)

Cuidado! O tempo “t” e o tempo que se refere à taxa de juros devem estar na mesma unidade. Por exemplo: se o exercício fala de uma taxa de juros de 2% ao mês, o tempo também deve estar em meses.

→ **Exemplo 1:** Um investidor fez um investimento de R\$10 mil em uma aplicação que prefixou uma taxa de retorno de 7% ao mês, em juros simples. Qual valor estará disponível para o saque após 24 meses? Teremos então que:

C = 10.000

$i = 0,07$ (7% em decimal)

$t = 24$

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$J = 10.000 \cdot 0,07 \cdot 24$$

$$J = 16.800$$

Ou seja, o investidor terá disponível R\$16.800,00.

→ **Exemplo 2:** Qual o valor do montante produzido por um capital de R\$1.200,00, aplicado no regime de juros simples a uma taxa de 2% por 10 meses?

Inicialmente, calcularemos os juros, onde:

$C = 1.200$

$i = 0,02$ (2%)

$t = 10$

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$J = 1.200 \cdot 0,02 \cdot 10$$

$$J = 240$$

Agora, o montante final será calculado pela fórmula:

$$M = C + J$$

Onde, C = capital inicial e J = juros.

Logo,

$$M = 1.200 + 240$$

$$M = 1.440$$

Portanto, o montante produzido foi de R\$1.440,00.

Juros compostos

Os juros compostos são mais utilizados no mercado financeiro por oferecer maior rentabilidade.

Diferente dos juros simples, para os juros compostos, o valor de "J" não é calculado a partir do capital inicial, mas sim do montante atualizado todos os meses, fazendo com que o valor final cresça de maneira exponencial.

O cálculo dos juros compostos é dado pela fórmula:

$$M = C (1 + i)^t$$

Onde:

M = montante

C = capital inicial

i = taxa de juros

t = tempo

→ **Exemplo:** Um capital de R\$10.000,00 foi aplicado em uma poupança sob taxa de juros compostos de 5% ao mês durante 1,5 ano. Determine o valor do montante dessa aplicação.

Teremos então:

$C = 10.000$

$i = 0,05$ (5%)

$t = 18$ meses (1,5 ano)

Agora, aplicando na fórmula:

$$M = C (1 + i)^t$$

$$M = 10.000 (1 + 0,05)^{18}$$

$$M = 10.000 (1,05)^{18}$$

$$M = 10.000 \cdot 2,40662$$

$$M = 24.066,20 \text{ reais}$$

Diferença entre juros simples e juros compostos

Agora que você já conhece juros simples e compostos, é possível observar a diferença entre as duas modalidades. Observe a tabela comparativa abaixo, tomando como capital inicial R\$10.000,00, aplicado em um período de 4 meses com uma taxa de juros de 4% ao mês.

JUROS SIMPLES

Mês	Juros ao mês	Montante
1º	400,00	10.400,00
2º	400,00	10.800,00
3º	400,00	11.200,00
4º	400,00	11.600,00

JUROS COMPOSTOS

Mês	Juros ao mês	Montante
1º	400,00	10.400,00
2º	416,00	10.816,00
3º	432,64	11.248,64
4º	449,95	11.698,60

Exercícios

01. Lúcia emprestou 500 reais para sua amiga Márcia mediante uma taxa de 4% ao mês, em juros composto, que por sua vez, se comprometeu em pagar a dívida num período de 3 meses. Qual o valor aproximado que Márcia no final pagará para Lúcia?

- a) R\$ 520,00
- b) R\$ 540,00
- c) R\$ 560,00
- d) R\$ 580,00

02. (Vunesp) Num balancete de uma empresa consta que certo capital foi aplicado a uma taxa de 30% ao ano durante 8 meses, rendendo juros simples no valor de R\$ 192,00. O capital aplicado foi de:

- a) R\$288,00
- b) R\$880,00
- c) R\$960,00
- d) R\$2.880,00

03. (ENEM) João deve 12 parcelas de R\$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R\$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R\$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado. A opção que dá a João o menor gasto seria:

- a) renegociar suas dívidas com o banco.
- b) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
- c) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos

d) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.

e) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

04. A quantia a ser aplicada em uma instituição financeira que paga a taxa de juros simples de 8% a.a para que se obtenha R\$ 1000,00, no fim de 4 anos, é?

- a) R\$320,00
- b) R\$543,47
- c) R\$757,58
- d) R\$570,00
- e) R\$238,09

05. O valor principal de uma aplicação é de R\$ 10.000,00. Resgatou-se um total de R\$19.000,00 após 1 semestre. Qual o valor da taxa de juros ao dia?

- a) 0,010
- b) 0,007
- c) 0,002
- d) 0,005
- e) 0,009

06. Para comprar um tênis de R\$ 70,00, Alexandre deu um cheque pré-datado de 30 dias no valor de R\$ 74,20. A taxa de juros cobrada foi de:

- a) 0,6% ao mês
- b) 4,2 % ao mês
- c) 42% ao ano
- d) 6% ao mês
- e) 42% ao mês

07. Em quanto tempo um capital de R\$ 80.000,00 aplicado à taxa anual de 11 % produz R\$ 4.400,00 de juros?

- a) 7 meses
- b) 2 meses
- c) 13 meses
- d) 6 meses
- e) 5 meses

08. Maria Eduarda comprou o novo iphone 11, mas como não tinha o dinheiro todo, fez um empréstimo para pagá-lo. No final do empréstimo ela terá pago R\$ 4.300,00. A taxa de juro do empréstimo equivale a 3% a.m. Só de juros, Maria Eduarda pagou R\$ 1.800,00. Qual o preço do iphone sem considerar os juros?

- a) R\$ 2.250
- b) R\$ 2.480
- c) R\$ 2.780
- d) R\$ 2.650
- e) R\$ 2.500

09. Rafaela fez um investimento de R\$ 2.400,00 por 2 meses, a taxa mensal era de 3% ao mês. Se $\frac{2}{3}$ do total foi aplicado a juros compostos e o restante a juros simples, o juro total arrecadado ao fim do prazo foi de:

- a) R\$ 144,72
- b) R\$ 144,98
- c) R\$ 145,20
- d) R\$ 145,33
- e) R\$ 145,44

10. Qual a aplicação inicial que, empregada por um ano e seis meses, à taxa de juros compostos de 3% ao trimestre, torna-se igual a R\$ 477,62?

- a) R\$ 100,00
- b) R\$ 200,00
- c) R\$ 250,00
- d) R\$ 300,00
- e) R\$ 400,00

11. (UFMG) A quantia de R\$ 15.000,00 é emprestada a uma taxa de juros de 10% ao mês. Aplicando-se a juros compostos, o valor que deverá ser pago para a quitação da dívida, três meses depois é:

- a) R\$ 20.000
- b) R\$ 19.965,00
- c) R\$ 18.510,00
- d) R\$ 17.320,00
- e) R\$ 16.666,00

12. (Fauel 2019) Um pequeno investidor decide realizar uma aplicação no Tesouro Direto, um fundo de investimento muito pouco arriscado, porém que rende mais que a poupança tradicional. Considerando-se que tal investimento rende aproximadamente 7% ao ano no regime de juros composto, quanto uma aplicação de R\$ 100 renderia ao final de dois anos?

- a) R\$ 13,85
- b) R\$ 14,00
- c) R\$ 14,49
- d) R\$ 15,23

13. (Fauel) Luís aplicou R\$ 5000 em uma poupança que rende 1% a.m. no regime de juros compostos, podendo resgatar todo o valor com juros a qualquer momento. Assinale a alternativa CORRETA.

- a) Se Luís resgatar todo o valor um mês depois, não terá juro algum.
- b) Quanto mais tempo Luís demorar para resgatar todo o valor, menos juros ele ganhará.
- c) Ao resgatar todo o valor no segundo mês, Luís receberá R\$ 5100,50.
- d) Todos os meses, a aplicação de Luís rende R\$ 5.

14. (UniFil) Um investidor, tentando melhorar os rendimentos das suas aplicações, fez um investimento de R\$ 100.000 a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês, durante 4 meses. Assinale a alternativa que representa o valor de juros que o investidor resgatou no final da aplicação.

- a) R\$ 4060,40 de juros
- b) R\$ 4000 de juros
- c) R\$ 3900 de juros
- d) R\$ 3800 de juros

15. Márcio fez um empréstimo no banco de R\$ 2000 que foi pago em 4 parcelas sob o regime de juros compostos. Pagando, ao final, R\$ 2251,02, então o valor da taxa de juros foi de, aproximadamente:

- a) 2,4%.

- b) 3,0%.
- c) 3,4%.
- d) 4,0%.
- e) 4,2%.

Gabarito

- 1. C
- 2. C
- 3. E
- 4. C
- 5. D
- 6. D
- 7. D
- 8. E
- 9. E
- 10. E
- 11. B
- 12. C
- 13. C
- 14. A
- 15. B

Referências Bibliográficas

- 1. "Matemática financeira: o que é, principais fórmulas e dicas". Fundação Instituto de Administração, 2020. Disponível em: <https://fia.com.br/blog/matematica-financeira/>
- 2. SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Juros simples"; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/juros-simples.htm>.

Ângulos

A finalidade deste capítulo é apresentar conceitos acerca do tema ângulos e suas propriedades. Ao final do capítulo, o leitor será capaz de:

- Entender definições como bissetriz, ângulo agudo, ângulo complementar etc;
- Trabalhar ângulos com retas paralelas cortadas por uma transversal;
- Trabalhar com problemas que envolvem soma de ângulos.

Introdução

Para começarmos o estudo dos ângulos, vamos, primeiramente, definir quatro conceitos primitivos:

• Ponto

→ Determina uma posição no espaço.

Representa-se com letra maiúscula: A, B, C, ...

• Reta

→ É um conjunto de pontos infinitos.

→ Dados 2 pontos, necessariamente, existe uma única reta que contém os dois.

→ Por 1 ponto passam infinitas retas.

Representa-se com letra minúscula: a, b, c, ...

• Semirreta ou segmento de reta

→ É um trecho finito de uma reta.

Representa-se com letra minúscula: a, b, c, ...

• Plano

→ É formado por infinitas retas.

Representa-se por uma letra grega minúscula: α , θ , β , γ , ...

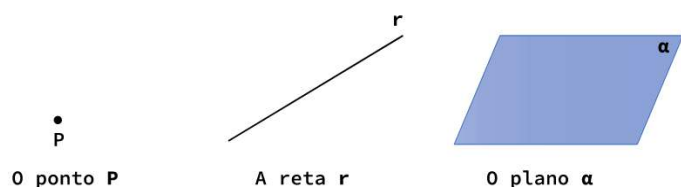


Figura 1: Representação gráfica de ponto, reta e plano [2]

Tomando esses conceitos primitivos, iremos introduzir mais duas definições: Região convexa e côncava.

• Região convexa

Quando para 2 pontos (A e B) pertencentes a uma região, o segmento AB está contido também na mesma região.

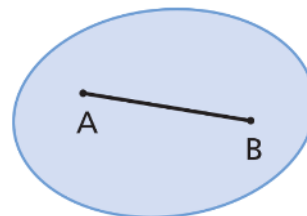


Figura 2: Exemplo de figura convexa [6].

• Região Côncava

Quando para 2 pontos (A e B) pertencentes a uma região, o segmento AB **não** está contido na mesma região.

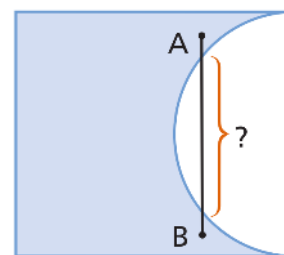


Figura 3: Exemplo de figura côncava [6].

Definição

Agora que já sabemos as noções primitivas da geometria plana, vamos começar nosso estudo dos ângulos!

Ângulo é uma região do plano delimitada por duas semirretas que partem do mesmo ponto.

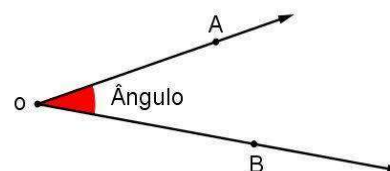


Figura 4: Representação gráfica de ângulos Sobre esse exemplo, podemos dizer:

→ Representação: **AÔB**

→ Vértice: Ponto O

→ Lados: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$

→ **Ângulos consecutivos**

Dois ângulos são consecutivos se possuírem um lado em comum.

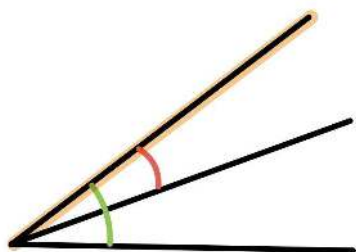


Figura 5: Ângulos consecutivos.

→ Ângulos adjacentes

Dois ângulos adjacentes não possuem pontos internos em comum.

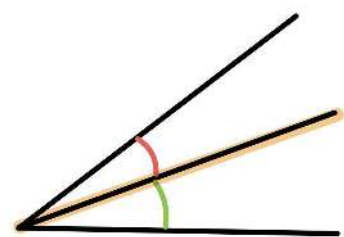


Figura 6: Ângulos adjacentes. [própria autoria]

→ Ângulos opostos pelo vértice

Dois ângulos são opostos pelo vértice se a continuação dos lados de um ângulo coincidem com os lados do outro.

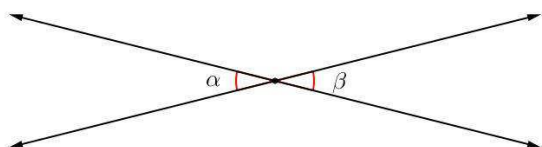


Figura 7: Representação de ângulos opostos pelo vértice. [3]

Os ângulos α (alfa) e β (beta) são opostos pelo vértice.

→ Ângulos opostos pelo vértice são congruentes, logo, na figura 16, temos que $\alpha = \beta$.

→ Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo é uma semirreta que parte de seu vértice e o divide em **duas regiões iguais**.

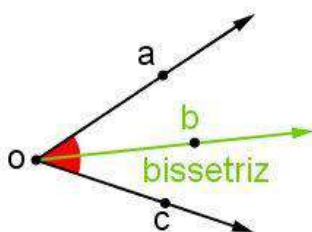


Figura 8: Representação da bissetriz do ângulo $\widehat{AOC}$, onde $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$. [3]

Posição entre retas

As retas podem formar diversos ângulos entre elas. Vamos destacar dois casos e suas propriedades:

- Retas perpendiculares: são retas concorrentes (possuem um ponto em comum) que formam quatro ângulos retos. Veja a representação na figura abaixo:

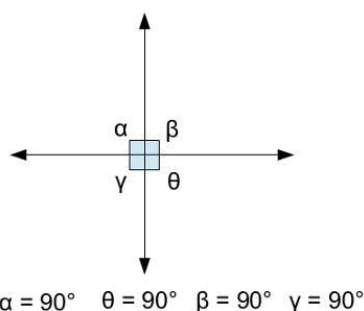


Figura 9: Retas perpendiculares [4]

- Retas paralelas cortadas por uma transversal:
 - Duas retas paralelas r e s ($r \parallel s$) cortadas por uma transversal t geram 8 ângulos dos quais 4 são agudos e 4 são obtusos.
 - Os 4 ângulos agudos são congruentes e os 4 ângulos obtusos também são congruentes.
 - Um agudo e um obtuso são suplementares (somam 180 graus).

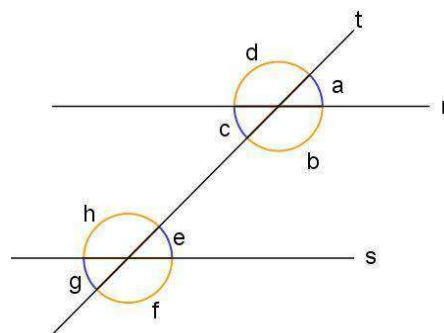


Figura 10: Duas retas paralelas, r e s , cortadas por uma transversal t . [3]

Dessa forma, **pela regra de retas paralelas cortadas por uma transversal**, podemos dizer que:

- $a = e$
- $d = h$
- $b = f$
- $g = c$

Já, por serem ângulos oposto pelo vértice, podemos dizer que:

- $a = c$
- $d = b$
- $e = g$
- $h = f$

Observações:

- Retas paralelas: são retas pertencentes ao mesmo plano e que não possuem nenhum ponto em comum.
- Transversal: reta que “corta” as duas paralelas, fazendo com que a transversal tenha um ponto em comum com cada paralela.

Curiosidades:

Existem nomenclaturas específicas para determinados pares de ângulos que serão explicadas abaixo:

- Correspondentes: (a, e), (b, f), (c, g) e (d, h). Os ângulos correspondentes são congruentes.
- Ângulos internos: (b, h) e (c, e)
- Ângulos externos: (a, g) e (d, f)
- Colaterais internos: (b, e) e (c, h). Os ângulos colaterais internos são suplementares.
- Colaterais externos: (a, f) e (d, g). Os ângulos colaterais externos são suplementares.

Classificação

Temos 6 classificações dos ângulos:

- Ângulo **agudo**: mede menos que 90° .

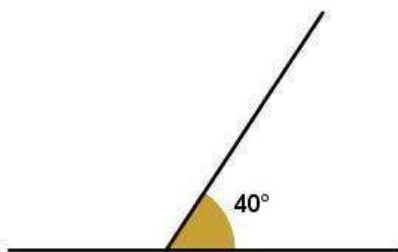


Figura 11: Ângulo agudo [3]

- Ângulo **reto**: mede exatamente 90° .

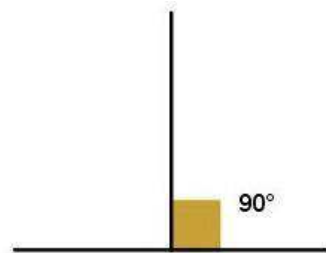


Figura 12: Ângulo reto [3]

- Ângulo **obtuso**: mede mais que 90° e menos que 180° .

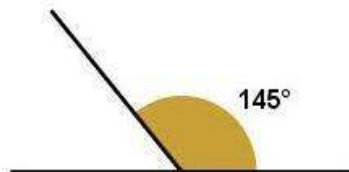


Figura 13: Ângulo obtuso [3]

- Ângulo **raso**: mede exatamente 180° .

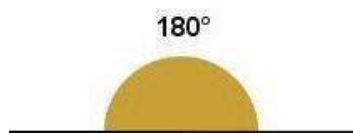


Figura 14: Ângulo raso [3]

- Ângulo **côncavo**: mede mais do que 180° .

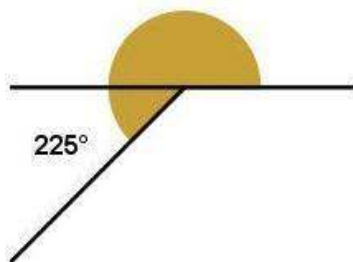


Figura 15: Ângulo côncavo [3]

- Ângulo **completo**: mede exatamente 360° .

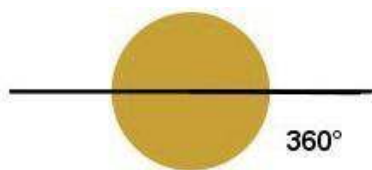


Figura 16: Ângulo completo [3]

Adição

Se existe uma semirreta $\overrightarrow{OB}$ interna a um ângulo $\widehat{AOC}$, então a soma dos ângulos internos resulta na soma dos ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOC}$, logo:

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$$

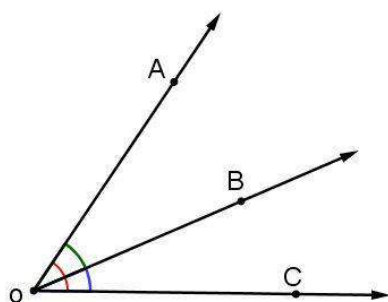


Figura 17: Representação da soma.

Ângulos Complementares

São ângulos cuja **soma de suas medidas é 90°** . Chamamos de complemento de um ângulo o valor que falta para se completar 90° .

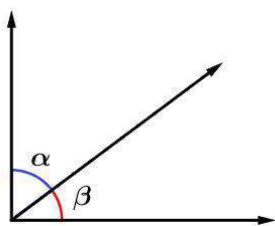


Figura 18: $\alpha + \beta = 90^\circ$

Na figura 10, vemos que α e β são ângulos complementares. Além disso, podemos afirmar que o complemento de $\alpha = 90^\circ - \alpha = \beta$.

Ângulos Suplementares

São ângulos cuja **soma de suas medidas é 180°** . Chamamos de suplemento de um ângulo o valor que falta para se completar 180° .

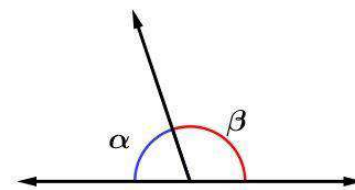


Figura 19: $\alpha + \beta = 180^\circ$ [3]

Na figura 11, vemos que α e β são ângulos suplementares. Além disso, podemos afirmar que o suplemento de $\alpha = 180^\circ - \alpha = \beta$.

Ângulos Replementares

São ângulos cuja **soma de suas medidas é 360°** . Chamamos de replemento de um ângulo o valor que falta para se completar 360° .

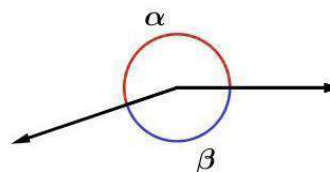


Figura 20: $\alpha + \beta = 360^\circ$ [3]

Na figura 12, vemos que α e β são ângulos replementares. Além disso, podemos afirmar que o replemento de $\alpha = 360^\circ - \alpha = \beta$.

Sistema de medidas

Existem duas medidas angulares principais: o **grau** e o **radiano**.

- Grau ($^\circ$): É definido pelo o valor do ângulo caso dividíssemos um ângulo completo em 360 partes, logo, é $\frac{1}{360}$ da região que delimita o comprimento angular de uma circunferência.
 - Ou seja, uma volta completa na circunferência percorre 360° .
 - Temos os submúltiplos minuto (') e segundo ("):

- $1^\circ = 60'$ (1 grau equivale a 60 minutos)
- $1' = 60''$ (1 minuto equivale a 60 segundos)

- Radiano (rad): Medida angular de um arco com o mesmo valor do comprimento métrico do raio.
 - Ou seja, como uma circunferência mede 2π vezes o seu raio ($2\pi \cdot r$), o valor do ângulo completo dessa circunferência é de 2π radianos ($2\pi \text{ rad}$).
 - É mais utilizado em problemas de trigonometria ou problemas com o círculo trigonométrico (possui um raio implícito)

Conversão

Para fazer a conversão de grau para radiano e de radiano para grau, basta fazer uma regra de 3 simples:

- Grau para radiano
 - Ex: Quanto vale 60° em radianos?
$$\begin{array}{l} 360^\circ \text{ — } 2\pi \text{ rad} \\ 60^\circ \text{ — } x \text{ rad} \end{array}$$

$$360x = 120\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$
- Radiano para grau
 - Ex: Quanto vale 1 rad em graus?
$$\begin{array}{l} 360^\circ \text{ — } 2\pi \text{ rad} \\ x^\circ \text{ — } 1 \text{ rad} \end{array}$$

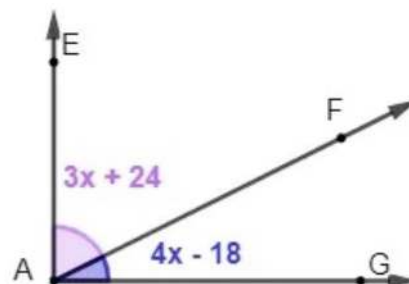
$$x \cdot 2\pi = 360$$

$$x = 57,3^\circ = 57^\circ 18'$$

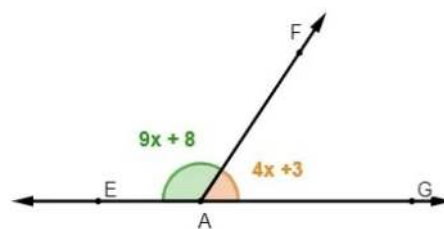
Fixação

- Classifique os ângulos abaixo:
 - 36°
 - 90°
 - 276°
 - $5\pi/6 \text{ rad}$
 - $2\pi \text{ rad}$
 - $\pi \text{ rad}$
- Calcule o complemento dos ângulos abaixo:
 - 45°
 - 80°
 - 30°
 - 15°
 - 60°

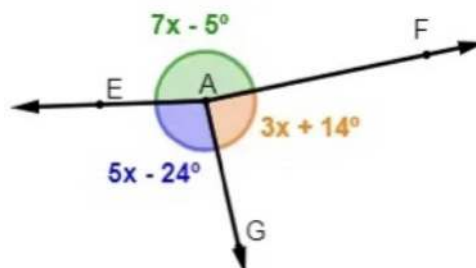
- Sabendo que o ângulo EÂG é reto, o valor do ângulo x é:



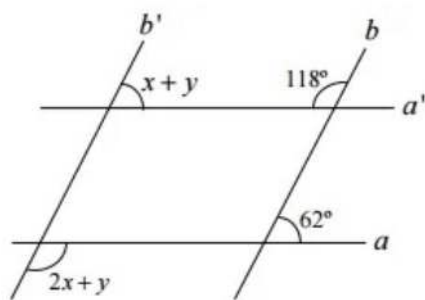
- 12°
 - 30°
 - 42°
 - 45°
 - 60°
- Sabendo que os ângulos são suplementares, e analisando a imagem a seguir, o valor de x é igual a:



- 10°
 - 11°
 - 12°
 - 13°
 - 14°
- Analisando a imagem, podemos afirmar que a medida do menor ângulo é:

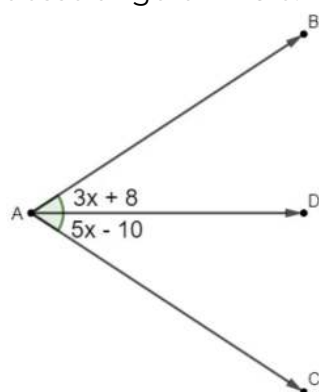


- 95°
 - 89°
 - 77°
 - 64°
 - 25°
- (IFG) Supondo que $a' // a$ e $b' // b$, marque a alternativa correta.



- $x = 31^\circ$ e $y = 31^\circ$
- $x = 56^\circ$ e $y = 6^\circ$
- $x = 6^\circ$ e $y = 32^\circ$
- $x = 28^\circ$ e $y = 34^\circ$
- $x = 34^\circ$ e $y = 28^\circ$

7. Sabendo que o segmento AD é bissetriz do ângulo BÂC, então, o valor desse ângulo BÂC é:



- 25°
- 35°
- 50°
- 70°
- 75°

8. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual a 360° , em um quadrilátero em específico, a medida dos seus ângulos internos é proporcional aos números 3, 5, 6, 10. O valor do menor ângulo é:

- 15°
- 25°
- 45°
- 60°
- 75°



Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60° no sentido horário;
- 3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.

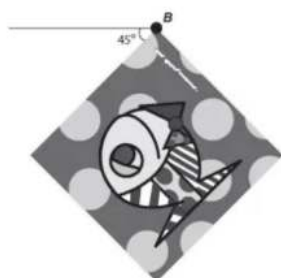
Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

- 75° no sentido horário
- 105° no sentido anti-horário
- 120° no sentido anti-horário
- 135° no sentido anti-horário
- 165° no sentido horário

2. (Enem 2017) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.

De Olho no Vestibular

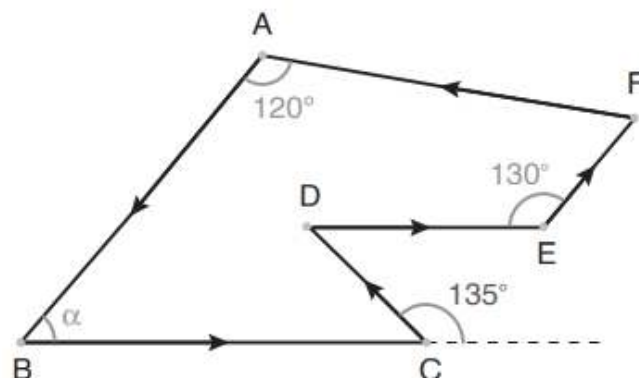
1. (Enem 2018) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.



Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360° . A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

- 90° no sentido horário.
- 135° no sentido horário.
- 180° no sentido anti-horário.
- 270° no sentido anti-horário.
- 315° no sentido horário.

3. (Enem 2015) Uma exposição artística oferece ao público uma experiência em um circuito fechado no qual os visitantes percorrem, sequencialmente, seis corredores contendo obras de arte expostas nas paredes. A figura representa o circuito percorrido por um visitante, que entra pelo portão A, percorre o corredor em direção ao portão B, em seguida percorre outro corredor até o portão C, e assim sucessivamente, até o portão F. Ao passar pelo portão F, o visitante percorre o último corredor, em direção ao portão A, onde também fica a saída da exposição.



Considere que todos os corredores do circuito são retilíneos e que os corredores BC e DE são paralelos, assim como os corredores AB e EF.

O menor ângulo formado entre os corredores AB e BC, indicado por α , mede:

- 45°
- 50°
- 55°
- 60°
- 65°

4. Em uma gincana escolar de matemática, o tema escolhido em uma das etapas foi “ângulos”. Um dos grupos formulou para um segundo grupo a seguinte questão:

“Dois ângulos são complementares, e o menor deles mede 20° . Qual é a medida do suplemento do maior?”

Se o segundo grupo respondeu corretamente à questão, sua resposta foi

- 160°
- 110°
- 90°
- 70°
- 20°

Gabarito

Fixação

1	2	3	4	5	6
-	-	A	D	B	B
7	8				
D	C				

1.

- Agudo
- Reto

- c. Côncavo
- d. Obtuso
- e. Completo
- f. Raso

2.

- a. 45°
- b. 10°
- c. 60°
- d. 75°
- e. 30°

De Olho no Vestibular

1	2	3	4	5	6
E	B	B	B		

Referências Bibliográficas

[1] Apostila de Nivelamento. CASD, 2021.

[2] "Conceitos primitivos da geometria espacial" Acessado dia 30/09/2021
<https://realizeeducacao.com.br/wiki/conceitos-primitivos-e-postulados-da-geometria-espacial/>

[3] "Ângulos" Acessado dia 30/09/2021
<https://www.infoescola.com/matematica/angulos/amp/>

[4] "Retas a concorrentes" Acessado dia 30/09/2021

<https://m.brasilescola.uol.com.br/amp/matematica/retas-concorrentes.htm>

[5] Exercício 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10

Acessado dia 30/09/2021

<https://m.exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-Angulos.htm>

[6] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau, Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana, Volume 9, 8ª Ed., São Paulo: Editora Atual, 2005

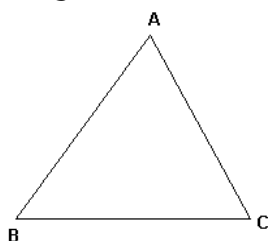
Triângulos e quadriláteros

Neste capítulo, você irá desenvolver as seguintes habilidades:

- reconhecer algumas propriedades de triângulos e quadriláteros
- saber calcular a área dessas figuras planas
- Conseguir decompor figuras planas complexas em mais simples

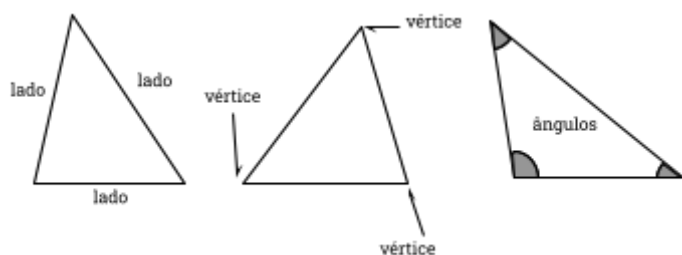
Triângulo

Dados três pontos que não estejam na mesma reta, A , B e C , chama-se triângulo a união dos três segmentos AB , BC e AC .



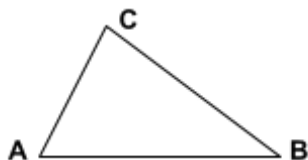
A união do triângulo ABC com os pontos de sua região interior é chamada de região triangular. A palavra triângulo é muitas vezes usada com sentido de região triangular.

O triângulo é uma figura geométrica muito utilizada em construções. Você já deve ter notado que existem vários tipos de triângulos.



Para falar dos elementos dos triângulos, a Matemática usa uma convenção universal. Com letras maiúsculas representamos os vértices, pois eles são pontos do plano. E assim temos, por exemplo:

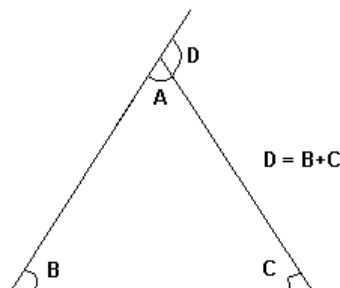
Os pontos A , B e C são os vértices.



Os segmentos AB , BC e AC são os lados.

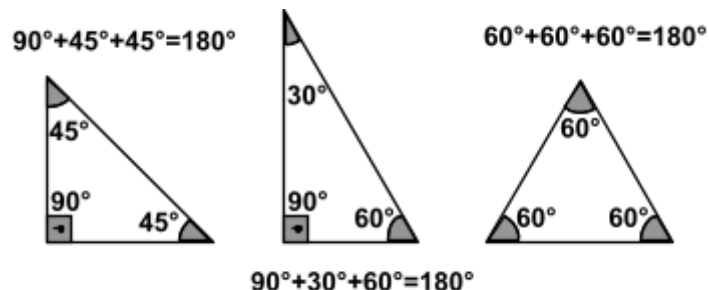
Ângulo externo

Outra propriedade importante é que, em qualquer triângulo, cada ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.

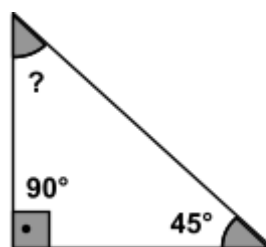


Soma dos ângulos internos

→ A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° (Muito, muito importante)



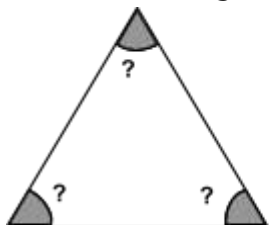
Assim, se você conhece dois ângulos de um triângulo, pode sempre descobrir a medida do terceiro ângulo. Vejamos como resolver um problema desse tipo usando essa propriedade.



O ângulo cuja medida é desconhecida mede 45° (pois $180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$), que é quanto falta à soma dos outros dois para completar 180° . O resultado é encontrado subtraindo-se de 180° (total da soma dos

ângulos internos de um triângulo) a soma dos ângulos que você já conhece.

Se todos os ângulos são iguais, então:



Neste exemplo, você não conhece nenhum dos três ângulos, mas sabe que os três possuem a mesma medida. Basta então dividir o total por 3.

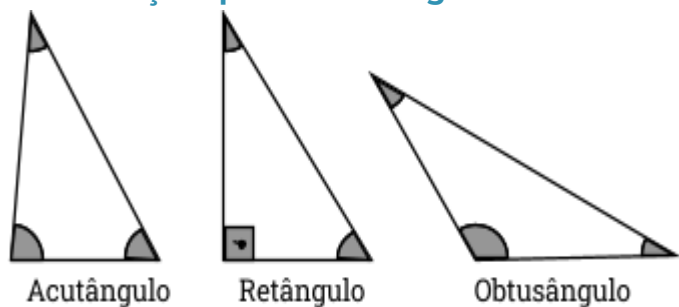
$$3X = 180^\circ$$

$$X = 60^\circ$$

Classificação dos triângulos

Como os triângulos não são todos iguais, podemos separá-los em grupos que tenham características comuns, ou seja, podemos classificá-los. Usam-se dois tipos de classificação: pelos ângulos ou pelos lados.

Classificação quanto aos ângulos



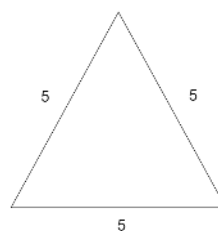
O **triângulo acutângulo** possui os 3 ângulos agudos.

O **triângulo retângulo** possui 1 ângulo reto e 2 ângulos agudos.

O **triângulo obtusângulo** possui 1 ângulo obtuso e 2 ângulos agudos.

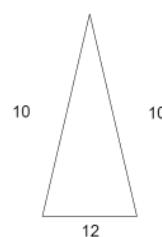
Classificação quanto aos lados

O **triângulo equilátero** possui os 3 lados com a mesma medida.



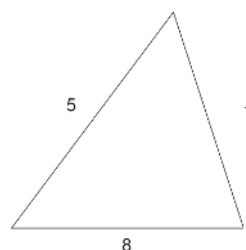
→ O triângulo equilátero possui todos os ângulos iguais.

O **triângulo isósceles** possui 2 lados com a mesma medida e o terceiro lado com medida diferente.



→ O triângulo isósceles possui os dois ângulos da base iguais

O **triângulo escaleno** possui os 3 lados com medidas diferentes.



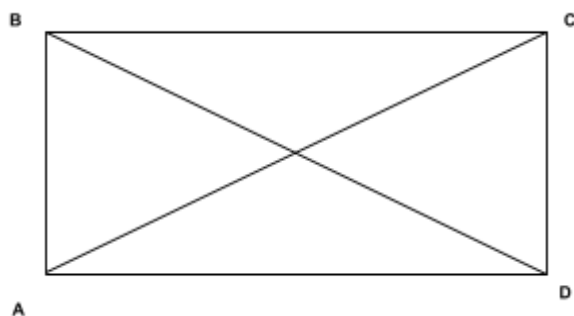
Quadrilátero

Um quadrilátero é uma figura geométrica que tem 4 lados (quadri = quatro e láteros = lados). Os exemplos mais importantes são o paralelogramo, o losango, o retângulo e o quadrado.

Antes de estudar cada quadrilátero, vamos conhecer agora um elemento dos quadriláteros que não existe nos triângulos: a diagonal.

Diagonal de um quadrilátero: é o segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos.

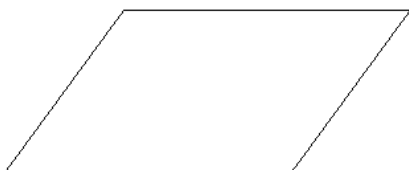
No retângulo $ABCD$, os vértices não consecutivos são A e C , e B e D . Veja a figura:



Na figura acima, há dois tipos de segmentos que ligam os vértices do retângulo $ABCD$. Há os lados do retângulo (AB, BC, CD, DA), que ligam os vértices consecutivos, e as diagonais do retângulo (AC, BD), que ligam os vértices opostos.

Quadrilátero notáveis

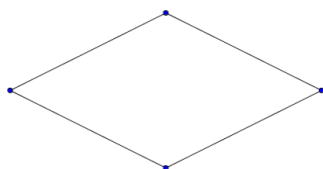
- **Paralelogramo:** é todo quadrilátero que possui todos os lados opostos paralelos.



Propriedades:

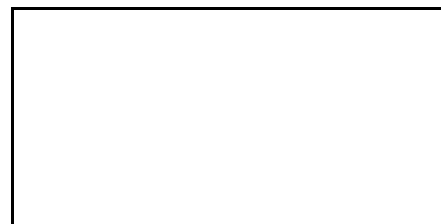
- Os lados opostos são congruentes
- Os ângulos opostos são congruentes.
- As diagonais se cortam em seus pontos médios.

- **Losango:** é todo paralelogramo que possui os quatro lados congruentes.



Propriedades:

- Todas as do paralelogramo
- As diagonais estão nas bissetrizes dos ângulos internos.
- As diagonais são perpendiculares
- **Retângulo:** é todo paralelogramo que possui os quatro ângulos congruentes.



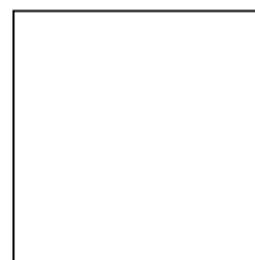
Propriedades:

- Todas as propriedades do paralelogramo
- As diagonais são congruentes
- Os quatro ângulos são retos

- **Quadrado:** é todo quadrilátero que é retângulo e losango.

Propriedades:

- Todas as propriedades do retângulo
- Todas as propriedades do losango.



As diagonais dos paralelogramos se cortam ao meio.

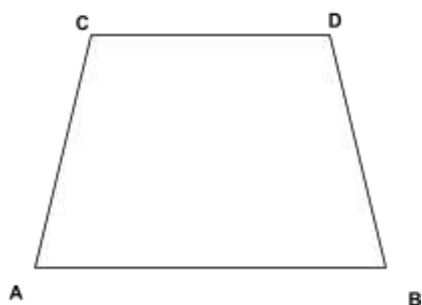
Observação:

Um quadrado também é um paralelogramo pois tem 2 pares de lados paralelos, é losango pois tem os 4 lados iguais e é um retângulo pois tem os 4 ângulos iguais a 90° . Então, podemos concluir o seguinte:

- Todo losango é paralelogramo;
- Todo retângulo é paralelogramo;
- Todo quadrado é paralelogramo, losango e retângulo;

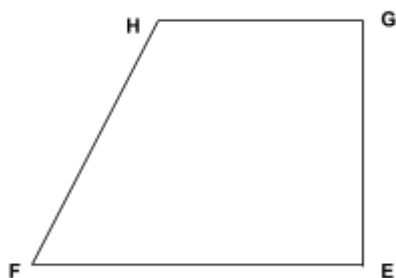
- **Trapézio:** é um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos paralelos, que chamamos de bases. Então, ele não é um paralelogramo, pois o paralelogramo possui 2 pares de lados opostos paralelos. Vejamos alguns trapézios:

- **Trapézio isósceles** que possui os lados não paralelos congruentes.



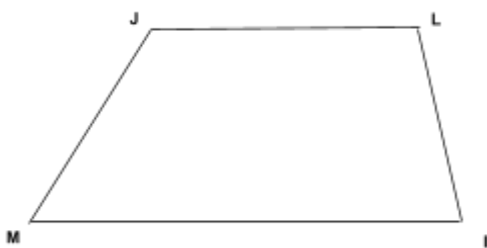
- os lados AB e CD paralelos
- AB é a base maior e CD a base menor
- Os outros dois lados não são paralelos, mas são iguais, isto é, $AC = BD$.

- **Trapézio retângulo** possui um ângulo interno de 90° .



- o lado EG perpendicular às bases formando, portanto, ângulos retos

- **Trapézio escaleno** possui lados diferentes

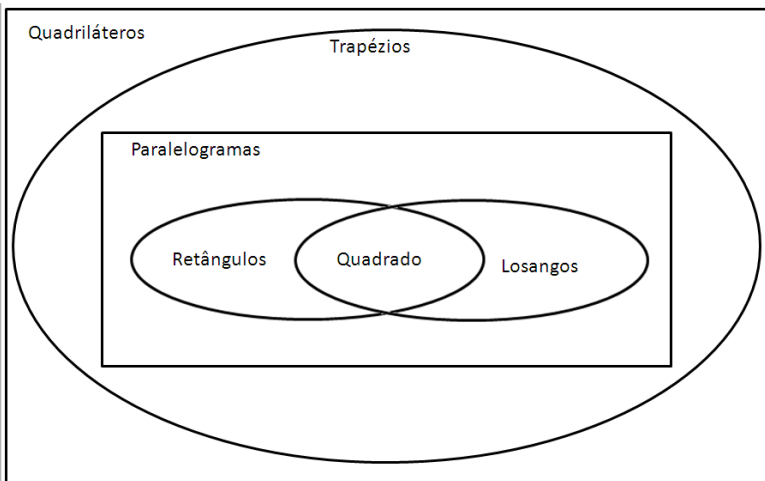


- os dois lados não paralelos desiguais, isto é, $IL \neq JM$.

Essa classificação dos trapézios tem uma analogia (semelhança) com a classificação dos triângulos.

Diagrama

Os quadriláteros podem ser representados no seguinte diagrama.



Por esse diagrama fica fácil ver essas relações. Por exemplo: todo retângulo é também um paralelogramo, pois o conjunto dos retângulos está contido no dos paralelogramos.

Áreas de superfícies

- O que é área de uma superfície?

Medir uma superfície é compará-la com outra, tomada como unidade. O resultado da comparação é um número positivo, ao qual chamamos de área. Como não existe instrumento para medir a área de uma superfície, comparamos sua área com a área de uma figura mais simples, como o retângulo ou o quadrado.

Unidades de área

Estudamos unidades específicas para cada figura a ser medida. Vamos agora recordar as unidades de área mais usuais.

- **Metro quadrado (m^2)**: é a superfície de um quadrado de 1 metro (1 m) de lado.
- **Quilômetro quadrado (km^2)**: é a superfície de um quadrado de 1 quilômetro (1 km) de lado.
- **Centímetro quadrado (cm^2)**: é a superfície de um quadrado de 1 centímetro (1 cm) de lado.

Observação:

No Brasil, costuma-se usar o hectare (ha) ou o alqueire para medir grandes extensões de terra.

Lembre-se que:

1 hectare (ha) = $10.000 m^2$ (um quadrado cujos lados medem 100 metros).

• Área do quadrado

Considere um quadrado qualquer. Vamos chamar a medida do lado desse quadrado de L .

A área desse quadrado é:



L

$$A = L \cdot L = L^2$$

Área do quadrado

Quantos centímetros quadrados cabem em um quadrado de 1 metro de lado?

 **Solução:**

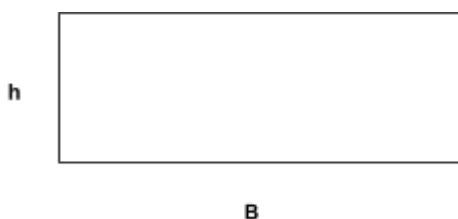
Observe que $1\text{ m} = 100\text{ cm}$

Logo, a área desse quadrado é:
 $100\text{ cm} \times 100\text{ cm} = 10000\text{ cm}^2$.

Portanto, concluímos que: em um quadrado de 1 m^2 de área, cabem 10.000 quadradinhos de 1 cm^2 de área, isto é, quadradinhos de 1 cm de lado.

• Área do retângulo

Considere um retângulo qualquer, de base b e altura h . A área do retângulo é o produto da medida da base pela altura. Então:

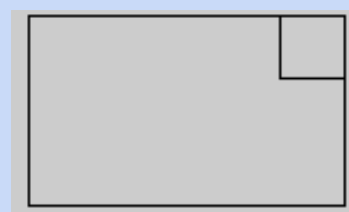


$$A = b \cdot h$$

Área do retângulo

Deseja-se forrar uma parede de $3\text{ m} \times 5\text{ m}$ com quadrados de cortiça de 1 m de lado. Quantos quadrados de cortiça serão necessários?

 **Solução:**



Para resolver esse problema, é preciso calcular a área da parede, que tem a forma de um retângulo e a área do pedaço de cortiça, que tem a forma de um quadrado.

Área do retângulo = comprimento $\times$ largura =

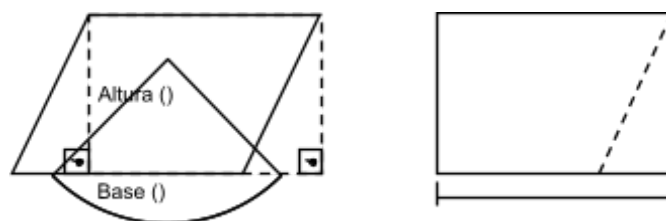
$$= 3\text{ m} \times 5\text{ m} = 15\text{ m}^2$$

Área do quadrado = lado $\times$ lado
 $= 1\text{ m} \times 1\text{ m} = 1\text{ m}^2$

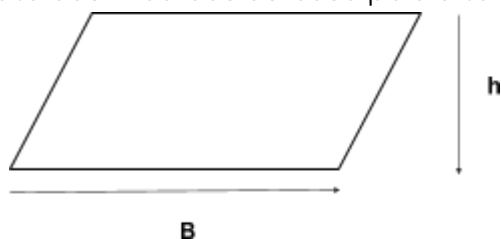
Como cada quadrado tem 1 m^2 de área, serão necessários 15 pedaços de cortiça para forrar a parede.

• Área do paralelogramo

Observe as figuras abaixo. Podemos “cortar” um pedaço do paralelogramo e encaixá-lo do outro lado, transformando o paralelogramo em um retângulo:



A área do paralelogramo é, assim, igual à área do retângulo obtido, ou seja, ao produto das medidas da base pela altura:



$$A = b \cdot h$$

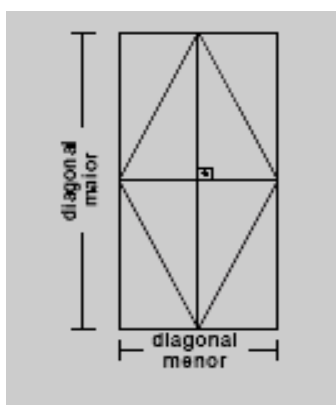
Observação:

A altura h do paralelogramo é a distância de uma base a outra; portanto, é perpendicular à base.

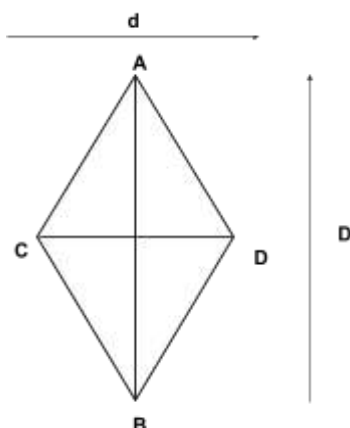
• Área do losango

O losango é uma figura geométrica de lados iguais e diagonais perpendiculares.

Podemos construir um retângulo de tal forma que o losango fique inscrito nessa construção. Observe que, dessa forma, a área do losango é metade da área do retângulo, sendo determinada em função de suas diagonais:



A área do losango é dado então pelo o produto das diagonais dividido por 2, veja:



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

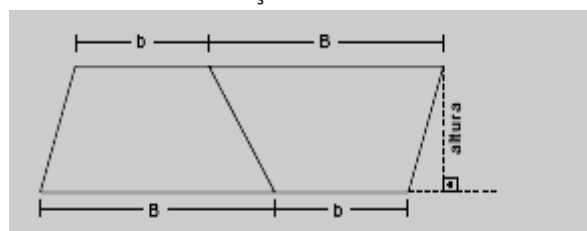
D: diagonal maior do losango

d: diagonal menor do losango

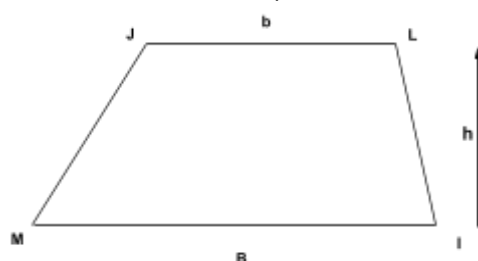
• Área do trapézio

O trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos, que chamamos de bases. Há uma base maior (B) e uma base menor (b). Além disso, a distância entre as bases é a altura (h).

Construa dois trapézios iguais e encaixe-os, colocando um deles de “cabeça para baixo” em relação ao outro.



A figura obtida é um paralelogramo cuja área é o dobro da área do trapézio. Dessa forma, a área do trapézio é:

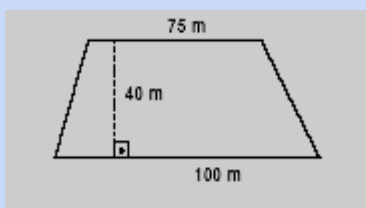


$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

Área do trapézio

Um terreno em forma de trapézio tem 75 m na base menor, 100 m na base maior e 40 m de altura. Qual a área desse terreno?

 **Solução:**



$$A = \frac{(100+75) \cdot 40}{2} \Rightarrow A = 3500 \text{ m}^2$$

Logo, a área do terreno é de 3500 m^2

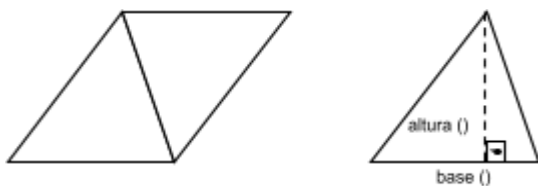
Como cada quadrado tem 1 m^2 de área, serão necessários 15 pedaços de cortiça para forrar a parede.

• Área do triângulo

Usaremos um raciocínio semelhante ao que usamos para determinar a área do trapézio. Assim, construímos dois triângulos iguais:



Encaixando-os, como na figura a seguir, obtemos um paralelogramo cuja área é o dobro da área do triângulo. Como a área do paralelogramo é determinada pelo produto da base pela altura, a área do triângulo é igual à área do paralelogramo dividida por dois.



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

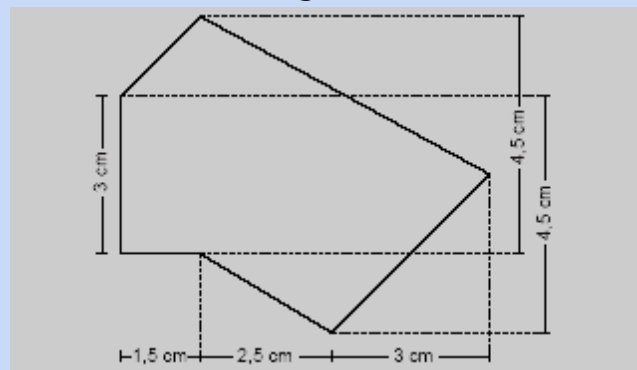
• Decompondo figuras planas

Muitas vezes nos deparamos com “figuras estranhas”, que não são nem triângulos, nem trapézios, nem nenhuma dessas figuras cujas áreas sabemos determinar. E aí, o que fazer? Nesses casos, podemos usar uma técnica muito simples: decompor a “figura estranha” em outras de formatos conhecidos, cujas áreas são mais

fáceis de serem obtidas. Veja o exemplo seguinte.

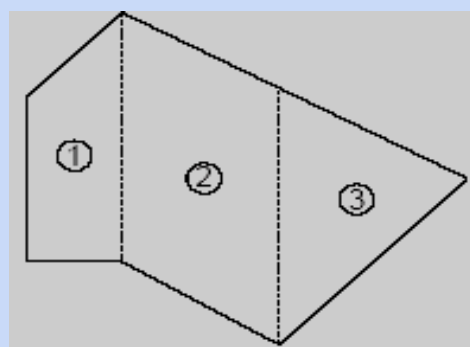
Área do trapézio

Calcule a área da figura:



 **Solução:**

Podemos decompor essa figura da seguinte maneira:



Calculamos, então, a área de cada uma das figuras:

(1) é um trapézio de área: $\frac{(4,5+3) \cdot 1,5}{2}$

$$= 5,625 \text{ cm}^2$$

(2) é um paralelogramo de área: $4,5 \cdot 2,5 = 11,25 \text{ cm}^2$

(3) é um triângulo de área: $\frac{4,5 \cdot 3}{2}$

$$= 6,75 \text{ cm}^2$$

Somando os três resultados, temos a área da figura dada:

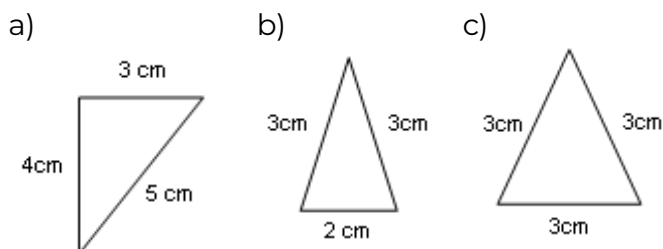
$$5,625 + 11,25 + 6,75 = 23,625$$

Assim, a área da figura é $23,625 \text{ cm}^2$

Exercícios

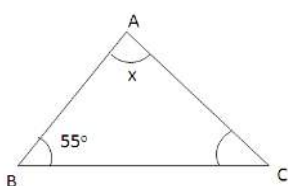
Fixação

1. Classifique os triângulos quanto aos lados.

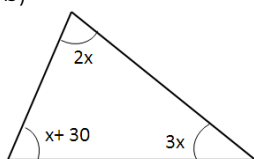


2. Em um triângulo equilátero, quanto mede cada ângulo?
3. Num triângulo isósceles, os ângulos da base medem 50° cada um. Quanto mede o outro ângulo?
4. Num triângulo isósceles, o ângulo diferente mede 110° . Quanto medem os outros dois ângulos?
5. Encontre o valor de x nas figuras.

a) $AB = AC$



b)



6. Considere as seguintes proposições:
- I. todo quadrado é um losango;
 - II. todo quadrado é um retângulo;
 - III. todo retângulo é um paralelogramo;
- Pode-se afirmar que são verdadeiras:
- a) Apenas I.
 - b) I, II e III.
 - c) Apenas II e III.
 - d) Apenas III.
 - e) Todas são falsas.

7. Qual é o lado de um quadrado de área $49 m^2$?

8. Qual é a altura de um retângulo de base $9 cm$ e área $36 cm^2$?

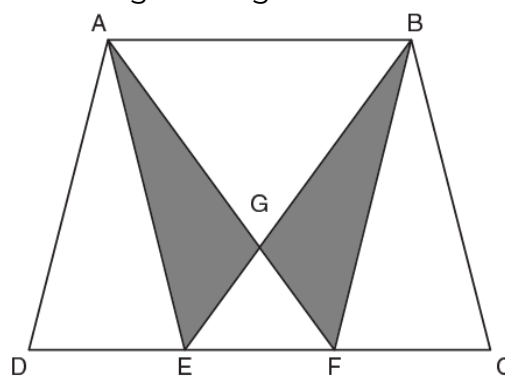
9. Qual é a base de um paralelogramo de altura $5 mm$ e área $30 mm^2$?

Nível II

10. De um losango sabemos que uma diagonal excede a outra em $4 dm$, e que esta, por sua vez, mede $2 dm$. Calcule a área deste losango.
11. A base maior de um trapézio excede a base menor em $3 km$. Por sua vez, a base menor excede a altura em $2 km$. Se a altura do trapézio é $4000 m$, qual é a sua área?

De Olho no Vestibular

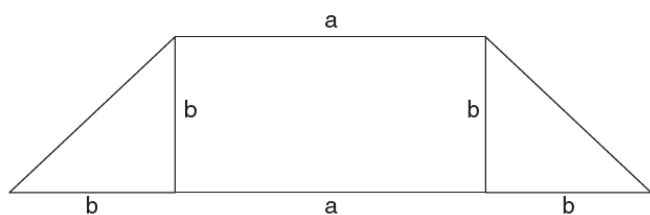
12. O logotipo de uma certa empresa automobilística é constituído de um trapézio isósceles ABCD dividido em 6 regiões, definidas por 4 segmentos de reta, AE, AF, BE e BF, conforme a seguinte figura:



Se $DE = EF = FC = 2 cm$, $AB = 4 cm$ e a área do triângulo EFG é igual a $1 cm^2$, então a área da parte do logotipo pintada de cinza é

- a. $3 m^2$
- b. $4 m^2$
- c. $6 m^2$
- d. $8 m^2$

13. Maria Júlia brincava com peças geométricas de um jogo de montagem. Em um dado momento, ela pegou uma peça retangular e duas peças triangulares e isósceles e montou um trapézio isósceles, como o mostrado a seguir, em que $a = 2,5b$:



Utilizando uma, duas ou três dessas peças para fazer outras combinações, Maria Júlia conseguiu montar diversas figuras geométricas, porém, certamente, ela não conseguiu montar um

- quadrado de aresta b .
- losango de aresta b .
- trapézio retângulo de base $3,5b$ e altura b .
- paralelogramo com base $2b$ e altura b .
- triângulo de base $2b$ e altura b .

Dicas e fatos para ajudar

1.

- o triângulo possui os 3 lados com medidas diferentes
- o triângulo possui 2 lados com a mesma medida e o terceiro lado com medida diferente.
- o triângulo possui os 3 lados com a mesma medida.

- Num triângulo equilátero, cada ângulo mede a mesma medida x , logo a soma dos ângulos é

$x + x + x = 3x$. Como a soma é 180° , tem-se:

$$3x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{3}$$

- Seja x a medida do terceiro ângulo. Como cada ângulo da base mede 50° , os ângulos do triângulo são $50^\circ, 50^\circ, x$. Como a soma é 180° , tem-se:

$$50^\circ + 50^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ$$

- Seja x a medida de cada ângulo da base. Como o ângulo diferente mede 110° , os ângulos do triângulo são $x, x, 110^\circ$. Como a soma é 180° , tem-se:

$$x + x + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow x + x = 180^\circ - 110^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 70^\circ \Rightarrow x = 70^\circ/2$$

5.

a) Como $AB = AC$, o triângulo ABC é isóscele de base BC , logo $\hat{C} = \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 55^\circ$. Então os ângulos do triângulo são $55^\circ, 55^\circ, x$. Como a soma é 180° :

$$55^\circ + 55^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ$$

b) Como os ângulos do triângulo são $x + 30^\circ, 2x$ e $3x$ e a soma é 180° , tem-se:

$$(x + 30^\circ) + 2x + 3x = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2x + 3x = 180^\circ - 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = 150^\circ \Rightarrow x = 150^\circ/6$$

6.

I) Todo quadrado possui 4 lados congruentes

II) Todo quadrado possui 4 ângulos congruentes

III) Todo retângulo possui os lados opostos congruentes

- Seja L o lado do quadrado. Como a área do quadrado é 49 m^2 , tem-se:

$$A = L^2 \Rightarrow L^2 = 49 \Rightarrow L = \sqrt{49}$$

- Sejam b a base do retângulo, h a sua altura e A a sua área. Então $b = 9 \text{ cm}$ e $A = 36 \text{ cm}^2$. Então:

$$A = b \cdot h \Rightarrow 9 \cdot h = 36 \Rightarrow h = 36/9$$

- Sejam b a base do paralelogramo, h a sua altura e A a sua área. Então $h = 5 \text{ mm}$ e $A = 30 \text{ mm}^2$. Então:

$$A = b \cdot h \Rightarrow b \cdot 5 = 30 \Rightarrow b = 30/5$$

- Sejam D a diagonal maior do losango, d a sua diagonal menor e A a sua área. Então: $d = 2 \text{ dm}$. Como a diagonal maior excede a menor em 4 dm :

$$D = d + 4 \Rightarrow D = 2 + 4 \Rightarrow D = 6 \text{ dm}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot 6}{2} \Rightarrow A = \frac{12}{2}$$

11. Sejam B a base maior do trapézio, b a sua base menor, h a sua altura e A a sua área.

Então $h = 4000 \text{ m} \Rightarrow h = 4 \text{ km}$.

Como a base menor excede a altura em 2 km:

$$b = h + 2 \Rightarrow b = 4 + 2 \Rightarrow b = 6 \text{ km}$$

Como a base maior excede a menor em 3 km:

$$B = b + 3 \Rightarrow B = 6 + 3 \Rightarrow B = 9 \text{ km}$$

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(9+6) \cdot 4}{2} \Rightarrow A = \frac{60}{2}$$

Gabarito

1. a) Escaleno b) Isósceles c) Equilátero
2. Num triângulo equilátero, cada ângulo mede 60°
3. O outro ângulo mede 80°
4. Os outros dois ângulos medem 35° cada um
5. a) $x = 70^\circ$ b) $x = 25^\circ$
6. B
7. O lado do quadrado é 7 m
8. A altura do retângulo é 4 cm
9. A base do paralelogramo é 6 mm
10. A área do losango é 6 dm^2
11. A área do trapézio é 30 km^2

De Olho no Vestibular

12	13
B	D

Teorema de Pitágoras

A finalidade deste capítulo é apresentar ao leitor o teorema de Pitágoras, um assunto imprescindível para a resolução de problemas de geometria plana e trigonometria. Ao final do capítulo, o leitor será capaz de:

- Reconhecer os problemas envolvendo a fórmula de pitágoras e
- aplicá-la com facilidade.

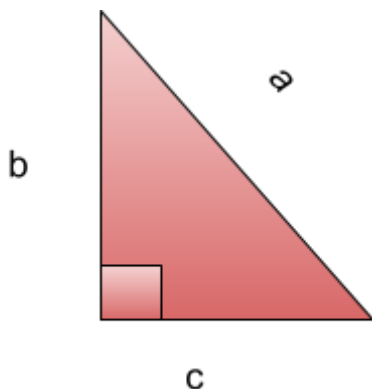
Introdução

Inicialmente, é necessário conhecermos um pouco sobre o triângulo retângulo, pois essa é a figura geométrica na qual utiliza-se o teorema em questão.

Um triângulo é dito retângulo quando possui um de seus ângulos medindo 90 graus.

Quando temos um ângulo medindo 90 graus, chamamos esse ângulo de **ângulo reto**, daí o nome **triângulo retângulo**!

Os outros dois ângulos do triângulo retângulo são sempre menores do que 90 graus e complementares, ou seja, sua soma é igual a 90 graus. Isso ocorre pois, não custa lembrar, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180 graus.



Os lados do triângulo retângulo recebem nomes especiais:

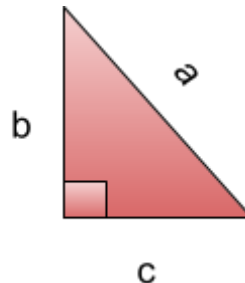
→ O lado oposto ao ângulo de 90 graus, na figura o lado **a**, é chamado **hipotenusa**.

→ Os outros dois lados, **b** e **c**, são chamados **catetos**.

O teorema

O teorema de pitágoras é uma fórmula matemática que relaciona os catetos do triângulo com a hipotenusa.

Não se esqueça que estamos usando a seguinte figura como referência:



O enunciado de pitágoras é o seguinte:

O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos

ou, matematicamente:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Essa fórmula é válida para **todos** os triângulos retângulos, e você pode inclusive usá-la para se certificar de que um triângulo é retângulo, visto que ele só possui um

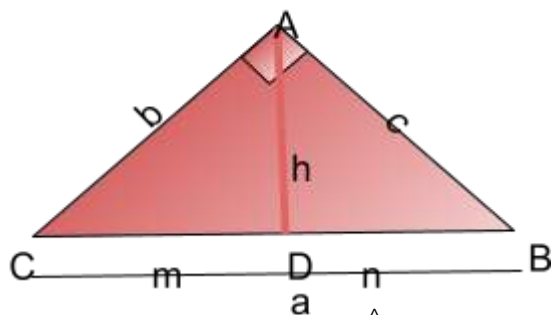
ângulo reto se o quadrado de um dos lados for igual à soma dos quadrados dos outros.

Em outras palavras, todo triângulo retângulo obedece o teorema de pitágoras, e todo triângulo que segue a relação de pitágoras é retângulo!

Para Saber Mais

Sabia que é possível demonstrar o teorema de pitágoras de inúmeros jeitos?

Aqui, vamos demonstrá-lo por semelhança de triângulos:



Como o ângulo $\hat{A}CB$ e o ângulo $\hat{ABC}$ são complementares e h é a altura do triângulo $\hat{ABC}$, ou seja, $\hat{ADC}$ é igual a 90 graus, $\hat{ABC}$ e $\hat{DAB}$ também são complementares. Daí $\hat{ACB}$ é igual ao ângulo $\hat{DAB}$, assim como $\hat{ABC}$ é igual a $\hat{CAD}$.

Com isso, teremos três triângulos semelhantes: o grande triângulo ΔABC e os dois menores, ΔADC e ΔADB :

$$\Delta ADC \sim \Delta BDA \sim \Delta BAC$$

Com a semelhança de triângulos, temos a semelhança dos lados:

$$\Delta BDA \sim \Delta BAC:$$

$$\frac{n}{c} = \frac{c}{a}$$

$$c^2 = an$$

$$\text{E } \Delta ADC \sim \Delta BAC:$$

$$\frac{m}{b} = \frac{b}{a}$$

$$b^2 = am$$

Somando as duas equações:

$$c^2 + b^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Dessa forma, está demonstrado o teorema de pitágoras.

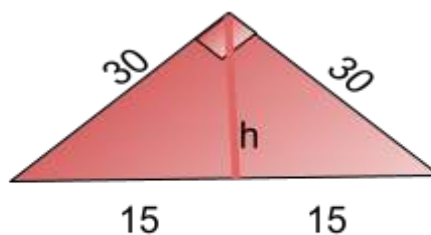
Exercícios

Resolvidos

- Quais são a área e a altura de um triângulo equilátero de lado 30?

Solução:

Traçando a altura de um triângulo equilátero (de qualquer triângulo, na verdade) obtemos dois triângulos retângulos. No caso do triângulo equilátero, teremos dois triângulos iguais com a hipotenusa medindo a mesma medida do lado do triângulo original (30) e um dos catetos medindo metade da medida do lado (15), como segue a figura:



Pelo teorema de pitágoras, conseguimos encontrar o valor do outro cateto:

$$30^2 = 15^2 + h^2$$

$$h^2 = 675$$

$$h \cong 25,98$$

Perceba que esse cateto é a própria altura do triângulo!

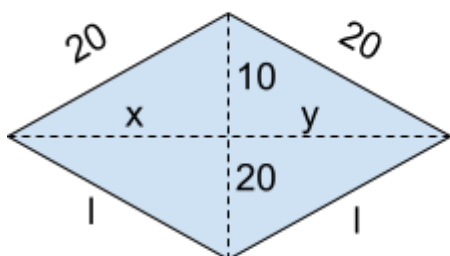
Agora, para calcular sua área, basta usar a fórmula comum de área de triângulo:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$A = \frac{30 \cdot 25,98}{2} = 389,7$$

2. Sabendo que as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares, que dois de seus lados medem 20, que uma de suas diagonais mede 30 e ela é dividida na proporção 1:2, quais os valores da outra diagonal e dos outros dois lados?

Solução:



Note que o losango pode ser dividido em 4 triângulos retângulos. Para achar o valor da outra diagonal, vamos achar os valores de x e y:

$$20^2 = 10^2 + x^2$$

Perceba que $x = y = 10\sqrt{3}$

Agora, para encontrarmos o valor do outro lado, vamos novamente aplicar o teorema de pitágoras:

$$l^2 = 20^2 + x^2$$

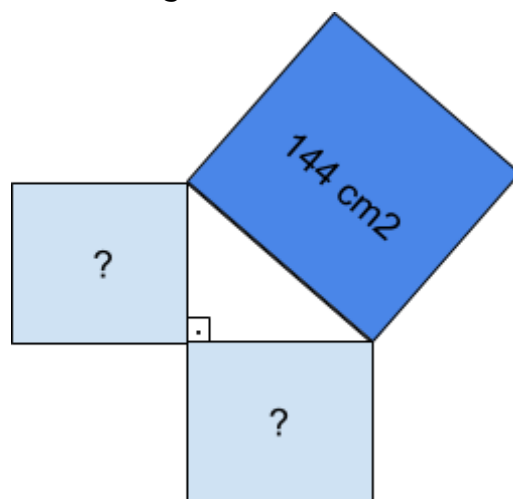
$$l = 10\sqrt{7}$$

Fixação

- Qual a área de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 12 cm?
- Quanto mede a hipotenusa de um triângulo retângulo de área 18 cm^2

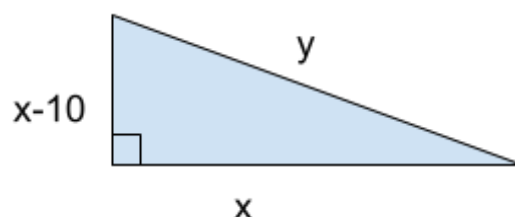
cujos catetos têm o mesmo comprimento?

- A junção de dois triângulos retângulos iguais cujos catetos têm a mesma medida e a junção de dois triângulos retângulos iguais cujos catetos têm medidas diferentes gera, respectivamente, as seguintes figuras geométricas:
 - quadrado, quadrado
 - retângulo, quadrado
 - quadrado, retângulo
 - retângulo, retângulo
- Três quadrados são arranjados para formar um triângulo retângulo, como mostra a figura abaixo:



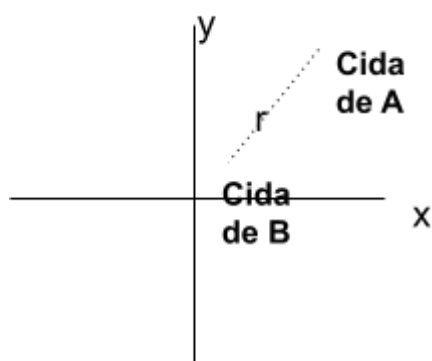
Sabendo que dois dos quadrados são iguais e que a área do quadrado maior é 144 cm^2 , qual é a área do triângulo formado?

- Considerando a figura abaixo, responda:.



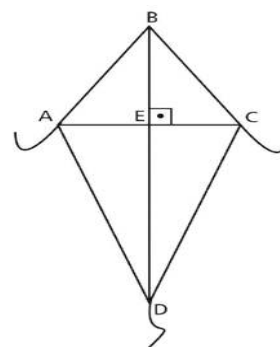
Qual é a medida de y sabendo que a área do triângulo vale 100?

6. Duas cidades estão ligadas por uma rodovia. Sabendo que a posição da cidade A no plano cartesiano é o ponto (10, 14) e a posição da cidade B é (1, 2), qual a distância, em km, entre as duas cidades?



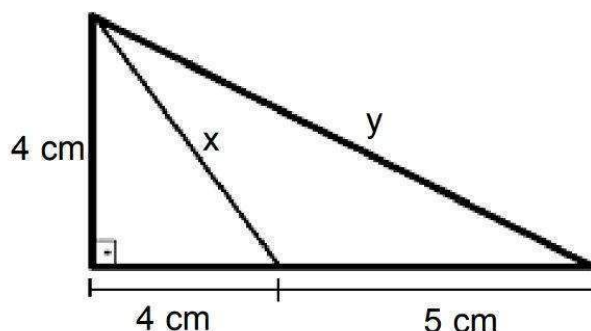
De Olho no Vestibular

1. (IFRS 2017) Considere um triângulo equilátero de lado $5\sqrt{3}$. Quais são a altura e a área desse triângulo, respectivamente?
- $15,2 \text{ cm}$ e $\frac{75}{4} \text{ cm}^2$
 - $\frac{6\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$ e $\frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$
 - $\frac{15}{2} \text{ cm}$ e $37,5\sqrt{3} \text{ cm}^2$
 - $7,5 \text{ cm}$ e $\frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$
2. (Cefet/MG - 2016) Uma pipa, cuja figura é mostrada a seguir, foi construída no formato do quadrilátero ABCD, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{CD}$. A vareta $\overline{BD}$ da pipa intercepta a vareta $\overline{AC}$ em seu ponto médio E, formando um ângulo reto. Na construção dessa pipa, as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{BE}$ usadas são, respectivamente, 25 cm e 20 cm, e a medida de $\overline{AC}$ equivale a $\frac{2}{5}$ da medida de $\overline{BD}$.



Nessas condições, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a

- 25
 - 40
 - 55
 - 70
3. (IFRS - 2016) Na figura abaixo, os valores de x e y , respectivamente, são:



- $4\sqrt{2}$ e $\sqrt{97}$
- $2\sqrt{2}$ e 97
- $2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{27}$
- $4\sqrt{2}$ e $2\sqrt{27}$

Gabarito

Fixação

- | | |
|----------------|-----------------|
| 1. 30 | 4. 36 |
| 2. $6\sqrt{2}$ | 5. $10\sqrt{5}$ |
| 3. C | 6. 15 |

De Olho no Vestibular

- | | | |
|------|------|------|
| 1- d | 2- c | 3- a |
|------|------|------|

Semelhança e Teorema de Tales

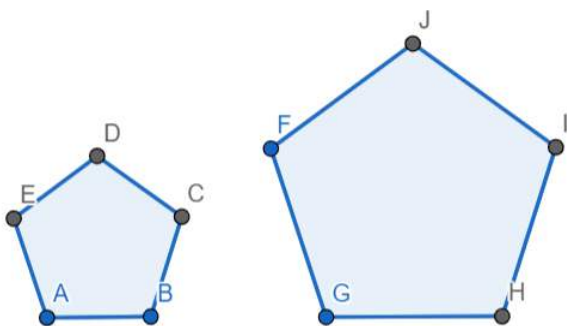
Tópicos

Bem, esse capítulo foi pensado para que você consiga resolver as questões de vestibulares. Portanto, os tópicos a serem vistos serão:

- Figuras Semelhantes
- Semelhança e Congruência de Triângulos
- Teorema de Tales

Figuras Semelhantes

O estudo das figuras semelhantes foi e ainda é de extrema importância para grandes descobertas da humanidade. Através deste tópico que grandes medições antigas como distância entre cidades, o fato da Terra ser redonda e até mesmo o diâmetro da Terra puderam ser descobertos e estudados. Vejamos agora o que de fato são figuras semelhantes:



Imagine que o pentágono da direita seja, basicamente, um “zoom” aplicado no pentágono da esquerda. Perceba que a ideia de semelhança é

bastante intuitiva, as figuras são apenas uma ampliação uma da outra.

O pentágono da direita tem todos os **ângulos idênticos** e os **lados aumentaram de forma proporcional** em relação ao pentágono da esquerda.

Mas o que significa um aumento proporcional? Primeiramente precisamos entender o que são os **lados correspondentes**. Olhe para o pentágono da esquerda e observe o lado AB. Agora olhe para o pentágono da direita e observe o lado GH. Perceba que o lado GH é simplesmente o lado AB após o “zoom”, ou seja, eles são correspondentes!

Um aumento proporcional significa que todos os lados da figura foram multiplicados por um mesmo valor. Se o lado GH é igual ao dobro do lado AB, todos os outros lados do pentágono da direita também serão o dobro de seus lados correspondentes no pentágono da esquerda.

Duas **Figuras Semelhantes** possuem:

- Ângulos correspondentes **idênticos**
- Lados correspondentes **proporcionais**

OBS: Basta uma das afirmações ser verdade, que a outra será automaticamente! Ou seja, se os ângulos forem iguais, os lados serão proporcionais, e vice-versa.

Na linguagem matemática, temos:

$$\frac{AB}{GH} = \frac{BC}{HI} = \frac{CD}{IJ} = \frac{DE}{JF} = \frac{EA}{FJ}$$

OBS: O resultado destas frações entre os lados é chamado de **razão de semelhança** ou também de **escala**.

Calculando o valor de um lado com base na semelhança de figuras.

Sabendo que duas figuras possuem todos os ângulos iguais, podemos afirmar que estas são semelhantes? Caso sejam, e a escala for 3 com um lado da figura menor valendo 2, qual o valor do lado correspondente na figura maior?

Solução:

i. Como já vimos, todos os ângulos serem iguais é uma afirmação suficiente para que as figuras sejam semelhantes. Logo, sim, elas são semelhantes.

ii. Se a escala é 3, isso significa que a figura maior tem lados correspondentes três vezes maior que os da figura menor. Se um lado da figura menor vale 2, o correspondente na figura maior vale então:

$$x = 3 \cdot 2$$

$$x = 6$$

Logo, na figura maior o lado vale 6.

Semelhança de Triângulos

Agora que já sabemos o que são figuras semelhantes em geral, podemos nos aprofundar na semelhança especificamente de triângulos. Mas porque triângulos? Pois toda figura pode ser dividida em diversos triângulos, ou seja, toda relação matemática que descobrirmos sobre os triângulos podem ser muito úteis para qualquer outra figura.

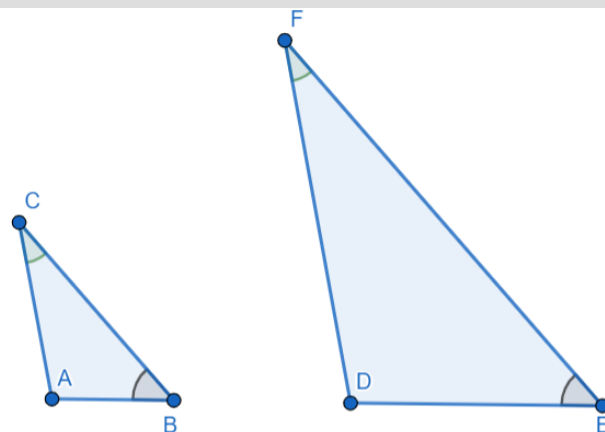
Para iniciarmos falando da semelhança de triângulos, devemos lembrar de um fato muito importante! **A soma dos ângulos de um triângulo sempre é igual a 180°.**

Isto é importante, por que para garantir que dois triângulos sejam semelhantes basta que dois ângulos sejam iguais, que o terceiro também será!

Ex: Se um triângulo tem dois ângulos iguais a 100° e 30°, sabemos que o terceiro ângulo tem que valer 50°. Logo, temos:

Para que dois **Triângulos sejam Semelhantes**, devemos ter:

- Dois ângulos **idênticos**, pois o terceiro também será
- Lados correspondentes **proporcionais**



Em um triângulo, é mais fácil identificar lados correspondentes! Basta verificar o ângulo que está "olhando" para o lado em questão.

Veja que o lado AB é correspondente ao lado DE, pois ambos são vistos pelo ângulo "verde", isto é, são opostos ao ângulo "verde".

Novamente apresentando em linguagem matemática, temos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

Congruência de Triângulos

Aplicando os conceitos de semelhança de triângulo, é possível rapidamente identificar quando dois triângulos são congruentes, isto é, idênticos!

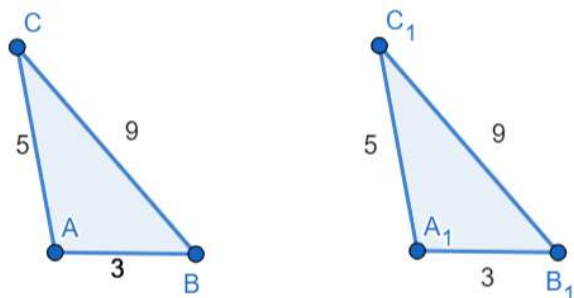
Dois triângulos (ou figura qualquer) são **congruentes** quando todas as suas medidas correspondentes são iguais.

Ou seja, basicamente são figuras exatamente iguais.

Vamos apresentar algumas regras ou casos de congruência de triângulos, ou seja, situações que se ocorrerem, certamente os triângulos serão idênticos!

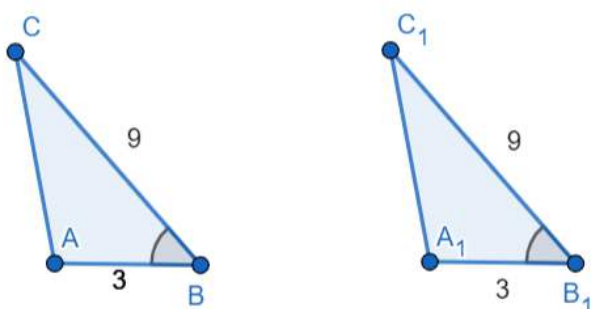
→ Caso **LLL** (Lado, Lado, Lado)

Trata-se de quando todos os lados correspondentes dos triângulos são de mesmo valor.



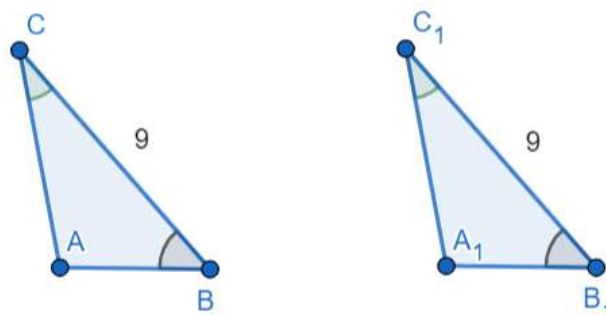
→ Caso **LAL** (Lado, Ângulo, Lado)

Trata-se de quando dois lados correspondente são iguais e o ângulo entre eles também.



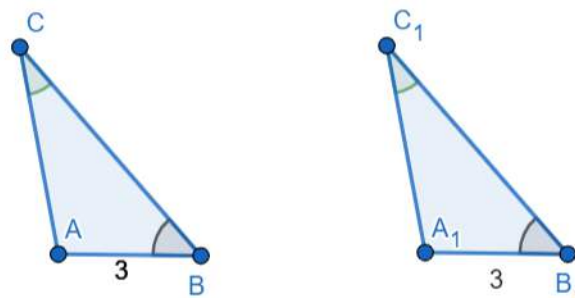
→ Caso **ALA** (Ângulo, Lado, Ângulo)

Trata-se de quando dois ângulos são iguais e o lado entre eles também.



→ Caso **LAAo** (Lado, Ângulo, Ângulo Oposto)

Trata-se de quando tivermos um lado e dois ângulos iguais entre os triângulos, sendo um desses ângulos o ângulo oposto ao lado.



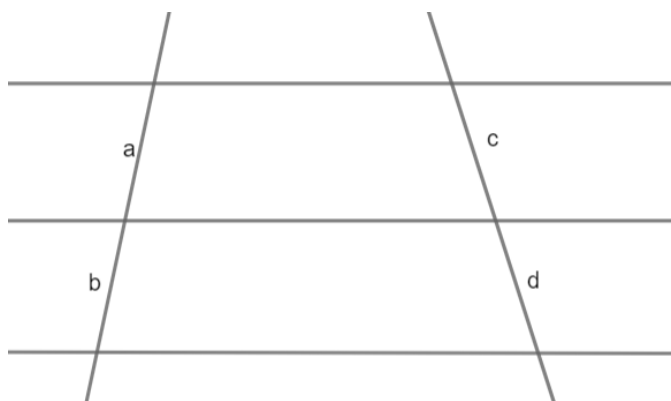
OBS: Este quarto caso (LAAo) é de certa forma redundante, pois ele já é englobado no Caso ALA.

Teorema de Tales

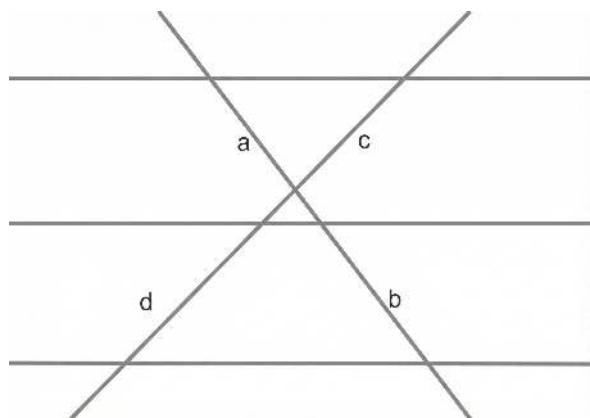
O filósofo e matemático Tales nasceu na cidade de Mileto, na Grécia antiga, por volta do ano 585 a.C. Há muitas lendas e histórias sobre ele. Uma de suas grandes contribuições para a Matemática trata-se do teorema que levou o seu nome em homenagem.

O **Teorema de Tales** é um estudo sobre as proporções das seguintes figuras:

→ **Três retas paralelas e duas retas transversais que cortam as anteriores.**



A figura também pode ser apresentada assim:



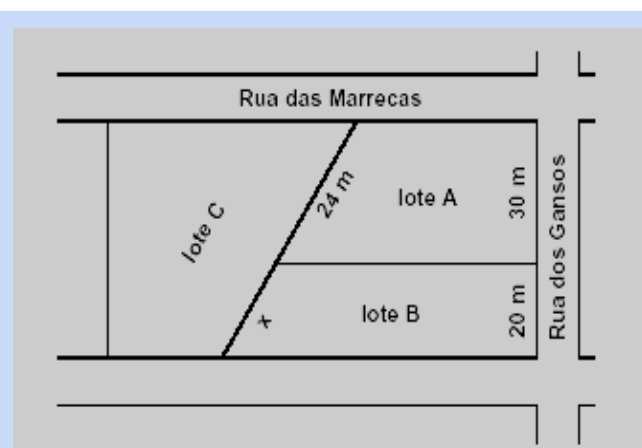
O teorema de Tales afirma o seguinte:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

A demonstração disso envolve apenas semelhança de triângulos, mas não é necessário conhecê-la.

Utilizando o Teorema de Tales para descobrir o comprimento de um segmento.

Na planta de um loteamento, determine a medida x do lado dos fundos do lote B, conforme a figura:



Solução:

Representando por x a medida que desejamos calcular e usando o Teorema de Tales, podemos descobrir essa medida sem efetuar medições. Como as laterais são paralelas, temos:

$$\frac{24}{x} = \frac{30}{20}$$

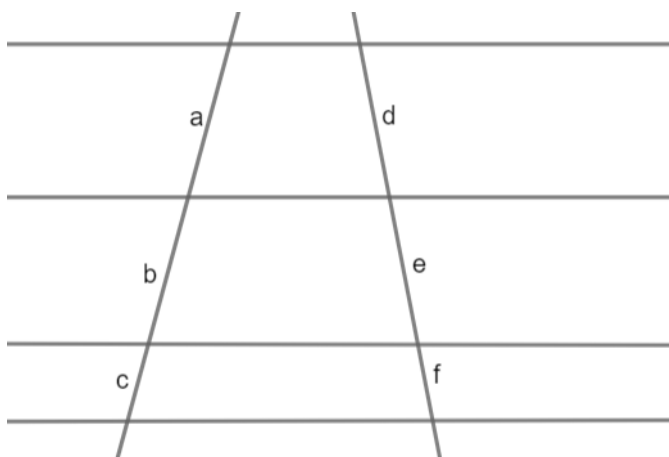
E, multiplicando na forma de cruz (ou na forma de X):

$$30 \cdot x = 20 \cdot 24 \Rightarrow 30x = 480 \Rightarrow x = 16$$

Assim, sem efetuar medições, concluímos que o lado dos fundos do lote B mede 16 metros.

O Teorema de Tales não vale apenas quando temos 3 retas paralelas, podemos na verdade ter quantas quisermos. Desta forma, temos a **Generalização do Teorema de Tales**, para infinitas retas.

Por exemplo, na figura a seguir:



Teremos a seguinte relação:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

OBS: Uma boa forma de decorar é sempre pensar que a fração é composta por segmentos OPOSTOS (um de frente para o outro).

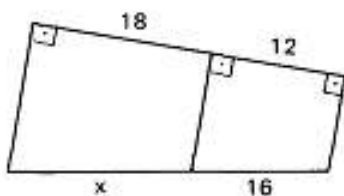
Exercícios

Fixação

1) Num mapa de guerra a escala era 1: 100000 . No mapa, o alcance do míssil era de 100 *cm*. Qual o alcance real do míssil em quilômetros?

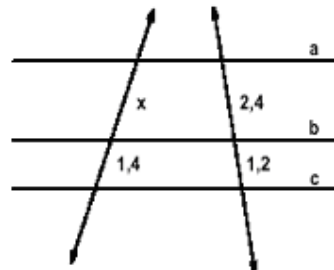
2) Um jogador de basquete mede 2,04 *m*. Para fazer propaganda de seu time, fabricaram miniaturas do jogador. A escala é 1:12. Quanto mede a miniatura, em centímetros?

3) Na figura, calcule o valor de *x*.

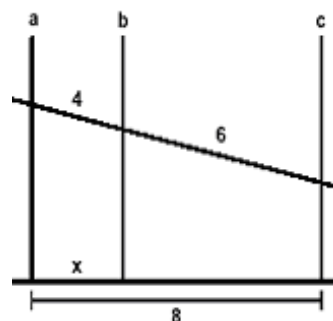


4) Nas figuras abaixo, calcule o valor de *x* (as retas *a*, *b* e *c* são paralelas).

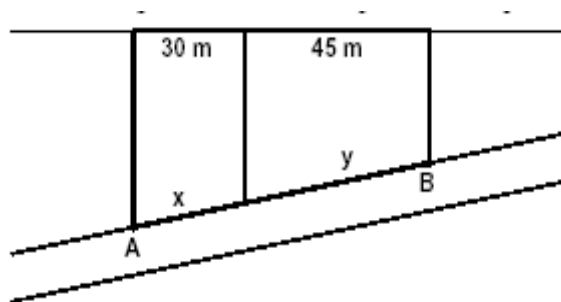
a)



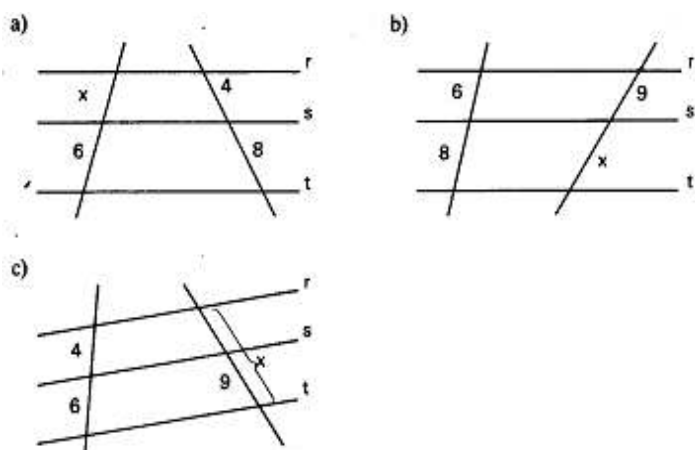
b)



5) A planta abaixo mostra as medidas de dois terrenos. Calcule as medidas de *x* e *y*, sabendo que as laterais são paralelas e que a medida de *AB* é 90 metros.

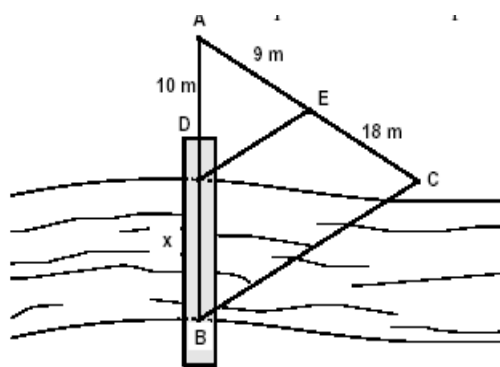


6) Determine o valor de *x* em cada caso abaixo:



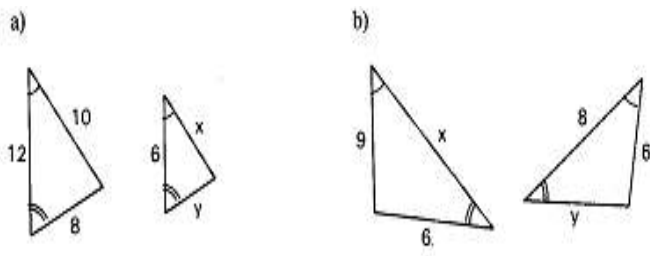
7) Observe o desenho abaixo e descubra qual deve ser

o comprimento x da ponte.

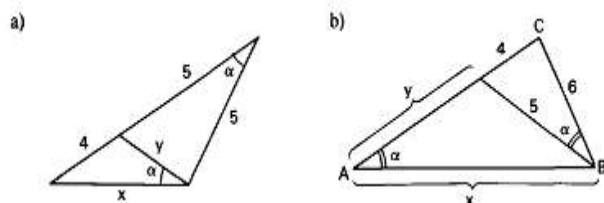


8) Se os ângulos com marcas iguais são congruentes,

determine o valor das incógnitas nos casos abaixo:



9) Determine o valor de x e y nos casos abaixo:



Gabarito

Fixação

1	2	3	4	5	6
100km	17cm	24	*	*	*
7	8	9	-	-	-
20m	*	*	-	-	-

4) a) $x = 2,8$ b) $x = 3,2$

5) $x = 36 m$, $y = 54 m$

6) a) $x = 3$ b) $x = 12$ c) $x = 15$

8) a) $x = 5$, $y = 4$ b) $x = 12$, $y = 4$

9) a) $x = 6$, $y = 10/3$ b) $x = 15/2$, $y = 5$

Dicas/Resoluções

1) Seja x o alcance real do míssil

$$escala = \frac{\text{alcance no mapa}}{\text{alcance real}} \Rightarrow \frac{1}{100000} = \frac{100 \text{ cm}}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \cdot x = 100000 \cdot 100 \text{ cm} \Rightarrow x = 100 \cdot 10^5 \text{ cm}$$

Lembre-se que

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 10^3 \cdot 10^2 \text{ cm} = 10^5 \text{ cm}$$

2) Seja x a altura da miniatura

$$escala = \frac{\text{altura da miniatura}}{\text{altura real}} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{x}{2,04 \text{ m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot x = 2,04 \text{ m} \Rightarrow x = \frac{2,04 \text{ m}}{12} \Rightarrow x = 0,17 \text{ m}$$

Lembre-se que $1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 10^2 \text{ cm}$

3) Usando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{12}{18} = \frac{16}{x} \Rightarrow 12 \cdot x = 16 \cdot 18 \Rightarrow 12x = 288 \Rightarrow x = \frac{288}{12}$$

4) a) Usando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{x}{1,4} = \frac{2,4}{1,2} \Rightarrow \frac{x}{1,4} = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot 1,4$$

$$x = 2,8$$

b) Usando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{6}{4} = \frac{8-x}{x} \Rightarrow 6 \cdot x = 4 \cdot (8 - x) \Rightarrow 6x = 32 - 4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 4x = 32 \Rightarrow 10x = 32 \Rightarrow x = 32/10$$

5) $AB = x + y \Rightarrow x + y = 90 \Rightarrow y = 90 - x$

Usando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{45}{30} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{45}{30} = \frac{90-x}{x} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{90-x}{x} \Rightarrow 3 \cdot x = 2 \cdot (90 - x)$$

$$\Rightarrow 3x = 180 - 2x \Rightarrow 3x + 2x = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{5}$$

$$y = 90 - x \Rightarrow y = 90 - \frac{180}{5}$$

6) a) Usando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{x}{6} = \frac{4}{8} \Rightarrow 8 \cdot x = 4 \cdot 6 \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 24/8$$

b) Usando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{x} \Rightarrow 6 \cdot x = 8 \cdot 9 \Rightarrow 6x = 72 \Rightarrow x = 72/6$$

c) Usando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{4}{6} = \frac{x-9}{9} \Rightarrow 6 \cdot (x - 9) = 4 \cdot 9 \Rightarrow 6x - 54 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x = 36 + 54 \Rightarrow 6x = 90 \Rightarrow x = 90/6$$

7) Usando o Teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{10}{x} = \frac{9}{18} \Rightarrow 9 \cdot x = 10 \cdot 18 \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow x = 180/9$$

8) a) Usando semelhança de triângulos:

$$\frac{6}{12} = \frac{x}{10} = \frac{y}{8}$$

$$\frac{x}{10} = \frac{6}{12} \Rightarrow 12 \cdot x = 6 \cdot 10 \Rightarrow 12x = 60 \Rightarrow x = 60/12$$

$$\frac{y}{8} = \frac{6}{12} \Rightarrow 12 \cdot y = 6 \cdot 8 \Rightarrow 12y = 48 \Rightarrow y = 48/12$$

b) Usando semelhança de triângulos:

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{x} = \frac{y}{6}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{6}{9} \Rightarrow 6 \cdot x = 8 \cdot 9 \Rightarrow 6x = 72 \Rightarrow x = 72/6$$

$$\frac{y}{6} = \frac{6}{9} \Rightarrow 9 \cdot y = 6 \cdot 6 \Rightarrow 9y = 36 \Rightarrow y = 36/9$$

9) a) Note que o triângulo menor de baixo é semelhante ao triângulo maior. Então, tem-se:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{4}{x}$$

$$\frac{x}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x \cdot x = 4 \cdot 9 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36}$$

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} \Rightarrow 9 \cdot y = 5 \cdot x \Rightarrow 9 \cdot y = 5 \cdot \sqrt{36} \Rightarrow y = \frac{5\sqrt{36}}{9}$$

9) b) Note que o triângulo menor de cima é semelhante ao triângulo maior. Então, tem-se:

$$\frac{6}{y+4} = \frac{5}{x} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{4}{6} \Rightarrow 4 \cdot x = 5 \cdot 6 \Rightarrow 4x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{4}$$

$$\frac{6}{y+4} = \frac{4}{6} \Rightarrow 4 \cdot (y + 4) = 6 \cdot 6 \Rightarrow 4y + 16 = 36 \Rightarrow$$

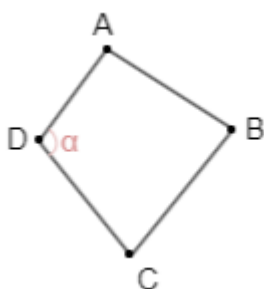
$$\Rightarrow 4y = 36 - 16 \Rightarrow 4y = 20 \Rightarrow y = 20/4$$

Polígonos

O capítulo a seguir tem como objetivo fazer um estudo sucinto dos polígonos, parte essencial no aprendizado da Geometria Plana, abordando definições e elementos, bem como os pontos de maior foco.

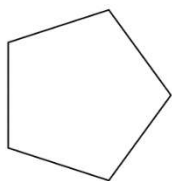
Definição

Podemos definir os polígonos como uma figura geométrica fechada por segmentos de reta consecutivos que não se cruzam. A palavra “polígono” tem origem grega significando “vários ângulos”. Tomemos como exemplo a figura a seguir:

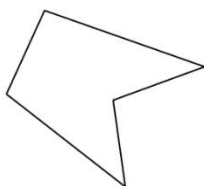


- ABCD é um polígono.
- Os pontos A, B, C e D são chamados de vértices.
- AB, BC, CD e DA são lados do polígono.
- α é um dos ângulos do polígono.

A princípio, podemos classificar os polígonos em convexos, quando suas diagonais (segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos) são **interiores** a figura. Caso contrário são chamados de côncavos.



Polígono convexo



Polígono côncavo

Nome dos polígonos

Os polígonos recebem seus nomes de acordo com o número de lados:

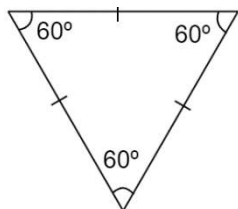
Nº de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Polígono regular

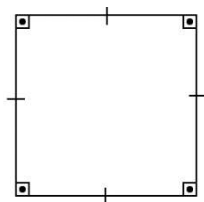
- Polígono equilátero: possui todos os lados com a mesma medida.
- Polígono equiângulo: possui todos os ângulos com a mesma medida.

Um polígono convexo é regular, se, e *somente se*, é equilátero e equiângulo. Em outras palavras, para um polígono pode ser

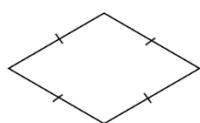
chamado de regular se cumprir as duas características citadas acima.



Triângulo regular
(triângulo equilátero)



Quadrilátero regular
(quadrado)



Quadrilátero equilátero
(Losango)



Quadrilátero equiângulo
(Retângulo)

Diagonais, ângulos internos e externos

1) Número de diagonais

Seja n ($n \geq 3$) o número de lados do polígono e d o número de diagonais. Podemos descobrir a quantidade total de diagonais a partir da seguinte expressão:

$$d = \frac{n \times (n-3)}{2}$$

Vamos aplicar a fórmula!

Qual o número de diagonais de um hexágono?

Como visto anteriormente, o hexágono é o polígono com 6 lados, logo, $n = 6$. Para descobrir a quantidade de diagonais, substituímos n na fórmula:

$$d = \frac{n \times (n-3)}{2}$$

$$d = \frac{6 \times (6-3)}{2}$$

$$d = \frac{18}{2} = 9$$

Assim, descobrimos que o hexágono tem 9 diagonais ao todo.

2) Ângulos internos

Podemos também descobrir a soma dos ângulos internos de um polígono **convexo** S_i a partir de seu número de lados n ($n \geq 3$) utilizando a seguinte fórmula:

$$S_i = (n - 2) \times 180^\circ$$

Vamos aplicar a fórmula!

Qual a soma dos ângulos internos de um triângulo? E de um quadrado?

Para descobrir tais valores, basta apenas substituir o número de lados na expressão anterior:

Triângulo: $n = 3$

$$S_i = (n - 2) \times 180^\circ$$

$$S_i = (3 - 2) \times 180^\circ$$

$$S_i = 180^\circ$$

Quadrado: $n = 4$

$$S_i = (n - 2) \times 180^\circ$$

$$S_i = (4 - 2) \times 180^\circ$$

$$S_i = 360^\circ$$

Assim, concluímos que a soma dos ângulos internos do triângulo e do quadrado é, respectivamente, 180° e 360° .

Determine a medida do ângulo interno de um pentágono regular.

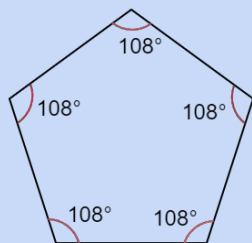
Para o pentágono, temos $n = 5$.

$$S_i = (n - 2) \times 180^\circ$$

$$S_i = (5 - 2) \times 180^\circ$$

$$S_i = 540^\circ$$

Por ser regular, o pentágono possui seus 5 ângulos internos congruentes, logo, cada um terá o valor de $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$.

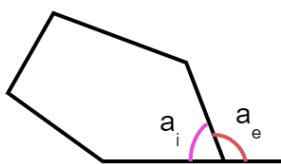


3) Ângulos externos

Denominamos como ângulo externo o suplementar ao ângulo interno:

$$a_i + a_e = 180^\circ$$

Em que a_i é um ângulo interno e a_e um ângulo externo de um polígono.



Temos também que a soma de todos os ângulos externos S_e do polígono convexo é:

$$S_e = 360^\circ$$

Exemplo

Determine o valor do ângulo interno e externo de um hexágono regular.

Já sabemos que, em um polígono regular de n lados, o ângulo interno a_i será dado por:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

Para o hexágono, teremos:

$$a_i = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$$

Além disso:

$$a_i + a_e = 180^\circ$$

$$120^\circ + a_e = 180^\circ$$

$$a_e = 60^\circ$$

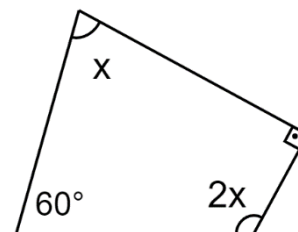
O ângulo interno vale 120° e o externo vale 60° .

Obs.: outra forma de se obter a_e para um polígono regular é simplesmente:

$$a_e = \frac{360^\circ}{n}$$

Alguns exercícios resolvidos

1. Determine o valor de x:



Resolução:

Notamos que o polígono é um quadrilátero e $n = 4$. A soma de seus ângulos internos é

$$S_i = (n - 2) \times 180^\circ$$

$$S_i = (4 - 2) \times 180^\circ$$

$$S_i = 360^\circ$$

Assim, sabemos que

$$x + 90^\circ + 2x + 60^\circ = 360^\circ$$

e $x = 70^\circ$

2. (FUVEST-1998) Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130° cada um e os outros demais ângulos internos 128° cada um. O número de lados do polígono é:

- a) 6
- b) 7
- c) 13
- d) 16
- e) 17

Resolução:

A soma dos ângulos internos, pelo enunciado, é

$$2 \times 130^\circ + (n - 2) \times 128^\circ$$

em que n é o número de ângulos e logo de lados. Dessa forma, podemos igualar a expressão com nossa fórmula:

$$(n - 2) \times 180^\circ = 2 \times 130^\circ + (n - 2) \times 128^\circ$$

Abrindo os parênteses e isolando o n :

$$52n = 364$$

$$n = \frac{364}{52} = 7$$

Chegamos em $n = 7$, ou seja, o polígono é um heptágono e a alternativa correta é a letra **B**.

3. (ITA 1988 – adaptada) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 2160° . Então o número de diagonais desse polígono, que não passam pelo seu centro, é:

a) 50 b) 60 c) 70 d) 80

Resolução: a princípio, precisamos saber que um polígono regular de número de lados n , com n par, tem um total de $\frac{n}{2}$ diagonais que passam pelo seu centro. (Um polígono regular com número de lados ímpar não possui diagonais que passam pelo seu centro). Com essa informação, podemos prosseguir.

Descobrimos primeiro a quantidade de lados desse polígono:

$$(n - 2) \times 180^\circ = 2160^\circ$$

$$n = 14$$

E o número total de diagonais:

$$d = \frac{n \times (n-3)}{2} = \frac{14 \times (14-3)}{2} = 77$$

Como o número de lados é par, a quantidade de diagonais que passam pelo centro é $\frac{14}{2} = 7$.

Por isso, a quantidade de diagonais que não passam pelo centro é $77 - 7 = 70$, fazendo da letra **C** a alternativa correta.

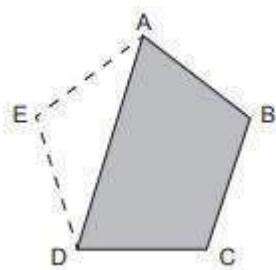
Fixação

1. Calcule a soma dos ângulos internos de um eneágono.
2. Calcule a soma dos ângulos internos de um dodecágono.
3. Calcule o valor do ângulo interno de um octógono regular.
4. Calcule o valor do ângulo externo de um quadrado.
5. Calcule o número de diagonais de um decágono.
6. Calcule o número de diagonais de um icosaágono.
7. O ângulo interno de um polígono regular vale 1,5 vez o seu ângulo externo. Qual o número de lados do polígono?
Dica: com a relação do enunciado e com a fórmula que relaciona ângulo interno e externo, teremos duas equações. Podemos substituir uma na outra e descobrir o ângulo interno, e continuar como aprendido anteriormente.
8. Quantos lados tem o polígono convexo tal que a soma do número de diagonais com o de lados é 435?
Dica: você pode chegar em uma equação do segundo grau. Não tenha medo das contas e lembre-se que o número de lados n é maior que zero.

Exercícios

De Olho no Vestibular

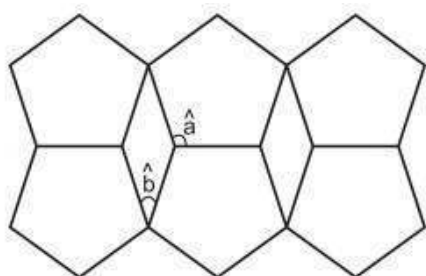
1. (Enem 2016) Um gessoiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura [1].



Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, para isso, anotou as medidas dos ângulos $x = \widehat{EAD}$, $y = \widehat{EDA}$ e $z = \widehat{AED}$ do triângulo ADE.

As medidas x , y e z , em graus, desses ângulos são, respectivamente,

- 18, 18 e 108.
 - 24, 48 e 108.
 - 36, 36 e 108.
 - 54, 54 e 72.
 - 60, 60 e 60.
2. (EPCAR 2021) Para participar de um concurso no qual serão escolhidos mosaicos para a calçada de uma igreja, um artista construiu seu mosaico usando pentágonos regulares e losangos dispostos conforme figura a seguir [2]:



Sabe-se que $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos do pentágono regular e do losango, respectivamente.

Se a soma $\hat{a} + \hat{b}$ equivale a x graus, então, quanto ao valor de x pode-se afirmar que é um número

- Primo
 - Quadrado perfeito
 - Divisível por 7
 - Múltiplo de 10
3. (UECE 2010) Sejam P e Q polígonos regulares. Se P é um hexágono e se o número de diagonais do Q , partindo de um vértice, é igual ao número total de diagonais de P então a medida de cada um dos ângulos internos de Q é
- 144°
 - 150°
 - 156°
 - 162°
4. (CN 1984) Um polígono regular possui 70 diagonais que não passam pelo seu centro. O valor da medida do ângulo interno do referido polígono está, em graus, compreendido entre
- 70° e 80°
 - 100° e 120°
 - 120° e 140°
 - 140° e 150°
 - 150° e 160° .

Gabarito

Fixação

- 1260°
- 1800°
- 135°
- 90°
- 35
- 170

7. 5
8. 30

De Olho no Vestibular

1	2	3	4
C	B	B	E

Referências Bibliográficas

[1] Disponível em:
https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD13.pdf

[2] Disponível em:
https://www.fab.mil.br/ingresso/arquivos/provas/cpcar2021_prova_a.pdf

Trigonometria Básica

O objetivo deste capítulo é entender qual a área de estudos da Trigonometria, assim como seus conceitos, detalhes e aplicações. Logo, ao final do capítulo, você será capaz de:

- Realizar operações com ângulos e funções trigonométricas.
- Utilizar a trigonometria como forma alternativa para a resolução de problemas.
- Perder o medo e aprender a usar a matemática em problemas do cotidiano!

Introdução

Antes do aprofundamento dos estudos na Trigonometria, as resoluções e reinvenções da matemática principalmente na área da geometria eram desenvolvidas através de semelhanças e congruências de figuras ou até mesmo através de aplicações de fórmulas que envolviam apenas comprimentos de segmentos, como os lados de um triângulo. Logo, surgiu a necessidade desta área de estudo focada agora nos **ângulos e arcos**, com o intuito de desenvolver um método alternativo para resolver os problemas da geometria no geral.

Arcos e Ângulos

Primeiramente, antes de nos aprofundarmos nas funções trigonométricas precisamos revisar e ter domínio sobre os conceitos de arcos e ângulos, além das

conversões entre unidades. Vamos começar pela definição de arco:

Dados dois pontos A e B em uma circunferência, esta fica dividida em duas partes e cada uma dessas partes cujas extremidades são os pontos A e B tratam-se de **arcos de circunferência** $\widehat{AB}$

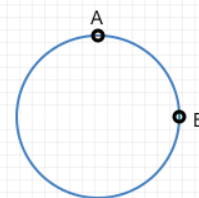


Figura 2: Dois pontos, A e B, formando dois arcos de circunferência.

Vamos trabalhar com duas unidades de medidas para arcos e ângulos: o grau e o radiano.

A unidade **grau (°)** tem seu valor unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência. Veja os exemplos:

- Um arco medindo 60° equivale a $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$, ou seja, o arco mede um sexto da circunferência.
- Um arco medindo 180° equivale a $\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$, ou seja, o arco mede metade da circunferência.

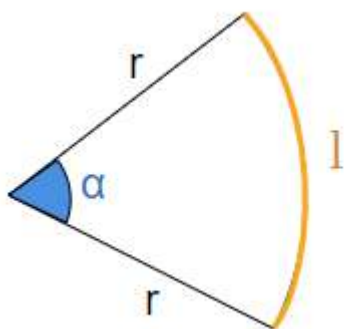
Outra unidade utilizada bastante na trigonometria é o **radiano (rad)**. A unidade radiano tem seu valor unitário igual ao **raio** da circunferência em questão. Veja os exemplos:

- Um arco medindo 1 rad significa que ao “esticar” este arco em um segmento de linha reta ele terá comprimento igual ao raio da circunferência.
- Um arco medindo 2π rad significa que ao “esticar” este arco em um segmento de linha reta ele terá comprimento igual a $2\pi r$, ou seja, igual ao comprimento inteiro da circunferência.

Esta definição de radiano também pode ser interpretada pela seguinte fórmula:

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Onde α é o arco em radianos, l é o comprimento do arco e r o raio da circunferência.



Tendo estas duas definições em mente, conseguimos realizar as conversões

entre as unidades com uma simples regra de três. Ambos os arcos de 360° e 2π rad equivalem a uma **circunferência completa**, ou seja, ou seja, a conversão pode ser feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 360^\circ &\leftrightarrow 2\pi \\ \text{grau} &\leftrightarrow \text{rad} \end{aligned}$$

Onde “grau” é o arco em graus e “rad” é o arco em radianos.

- Conversão de 60° para radianos

$$\begin{aligned} 360^\circ &\leftrightarrow 2\pi \\ 60^\circ &\leftrightarrow x \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } x = \frac{2\pi(60)}{360} = \frac{\pi}{3}$$

- Conversão de $\pi/4$ para graus

$$\begin{aligned} 360^\circ &\leftrightarrow 2\pi \\ x &\leftrightarrow \pi/4 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } x = \frac{\pi(360)}{4(2\pi)} = 45^\circ$$

Vamos agora definir rapidamente o ângulo entre dois segmentos de retas.

Dados dois segmentos de retas não paralelas em um plano, estes definem dois ângulos neste plano.

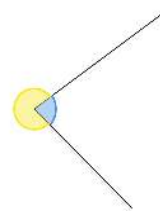
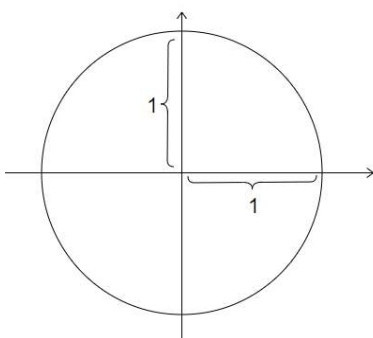


Figura 3: Os dois ângulos formados por duas semi-retas.

Um dos ângulos sempre será maior que 180° ou π rad, este é o **ângulo côncavo** (amarelo na figura). O outro ângulo sempre será menor que 180° ou π rad, este é o **ângulo convexo** (azul na figura).

Ciclo Trigonométrico

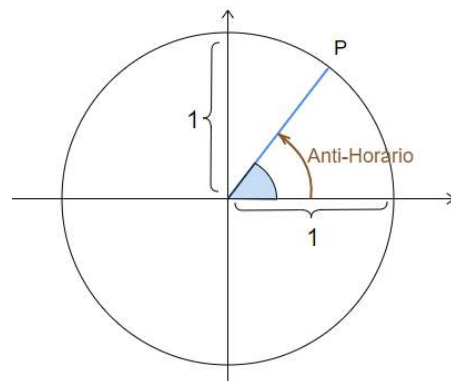
Antes de iniciarmos o estudo das funções trigonométricas, vamos nos aprofundar um pouco sobre uma figura que vai nos ajudar muito no estudo da trigonometria, o ciclo trigonométrico.



O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio 1 (unitário) que vamos usar para representar os ângulos e conseguimos de forma bem mais eficiente perceber as relações trigonométricas que veremos neste capítulo. Vamos falar agora de algumas definições importantes do ciclo trigonométrico.

→ Representação dos ângulos:

Sempre vamos desenhar os ângulos começando do eixo x positivo (no ponto mais à direita do círculo) e aumentando no sentido **anti-horário**.



OBS: Como o raio tem tamanho igual a 1, podemos usar a equação que define um ângulo em radianos:

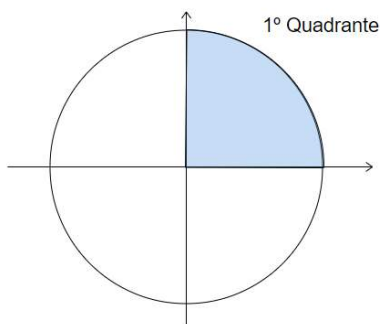
$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{l}{1}$$

$$\alpha = l$$

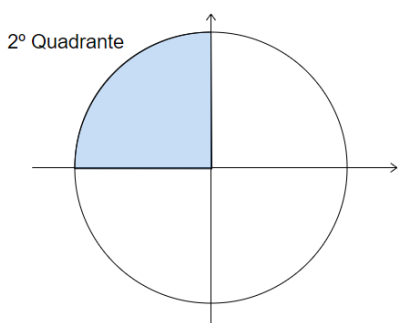
Logo, podemos concluir que, no ciclo trigonométrico, o ângulo em radianos tem mesma medida que seu arco na circunferência.

→ Quadrantes:

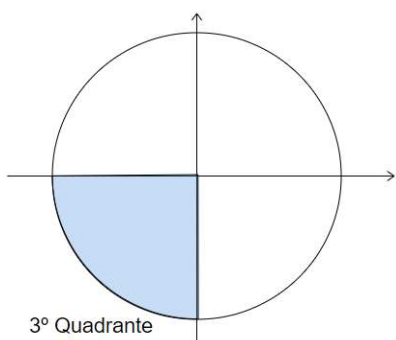
O ciclo trigonométrico é dividido em **quatro quadrantes**, saber reconhecer os quadrantes é importante pois as funções trigonométricas irão possuir comportamentos diferentes em cada uma dessas quatro regiões.



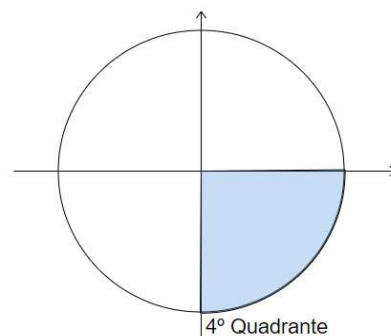
Os ângulos do primeiro quadrante são os ângulos de 0 a 90° .



Os ângulos do segundo quadrante são os ângulos de 90° a 180° .



Os ângulos do terceiro quadrante são os ângulos de 180° a 270° .



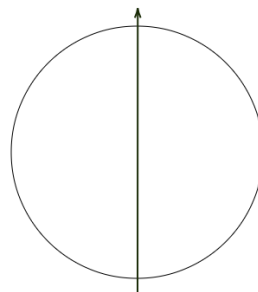
Os ângulos do quarto quadrante são os ângulos de 270° a 360° .

→ **Eixos das funções trigonométricas:**

Iniciando os estudos das funções trigonométricas, vamos falar sobre os eixos de cada uma:

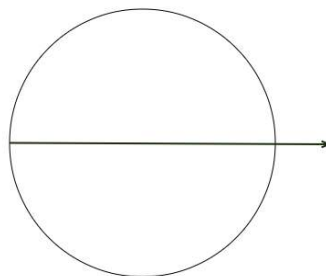
Eixo dos Senos:

Trata-se do *eixo vertical*.



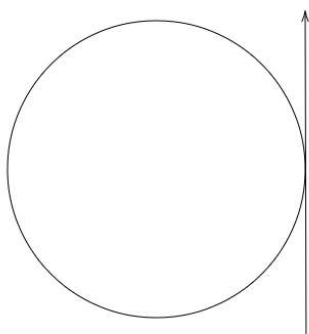
Eixo dos Cossenos:

Trata-se do *eixo horizontal*.



Eixo das Tangentes:

Trata-se do eixo abaixo que, como o próprio nome diz, é *tangente ao círculo*.



Vamos agora nos aprofundar pelas funções trigonométricas mais conhecidas, as funções seno, cosseno e tangente. Também veremos algumas fórmulas e ângulos importantes para decorar para as provas!

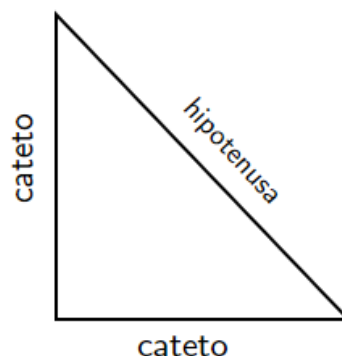
Função Seno

A primeira função trigonométrica que veremos é a função seno. Denotamos o seno de um ângulo por **sen(x)**, onde x é um ângulo qualquer.

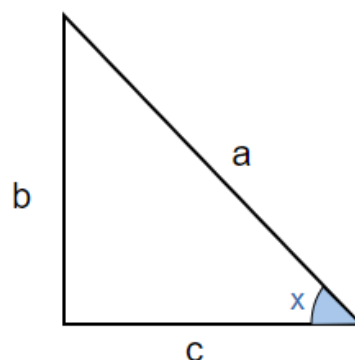
→ Mas como podemos calcular o seno de um ângulo? Veja:

Existem várias fórmulas matemáticas que nos ajudam a calcular isso, mas veremos neste capítulo como calculá-lo utilizando os **triângulos retângulos**.

Relembrando: Em um triângulo retângulo, o maior lado é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados são chamados de **catetos**.



O seno de um ângulo é definido como a **razão** entre o **cateto oposto** ao ângulo e a **hipotenusa** do triângulo retângulo:



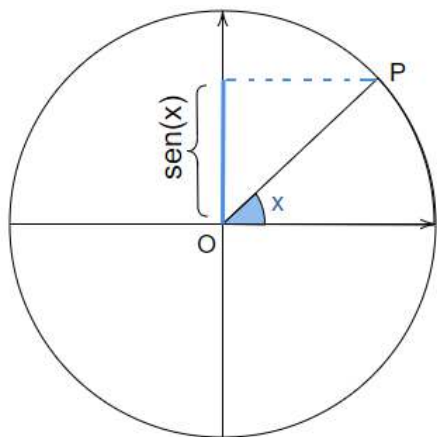
$$\text{sen}(x) = \frac{b}{a}$$

OBS: Veja, como os catetos sempre são menores que a hipotenusa, o seno de um ângulo sempre será **menor que 1**

$$0 \leq \text{sen}(x) \leq 1$$

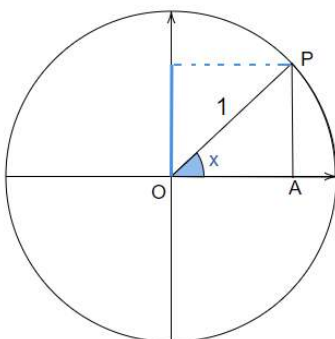
Ou seja, o seno de x pode ser qualquer valor de 0 até 1.

Veremos agora como representar o seno usando o **eixo dos senos** no ciclo trigonométrico.



→ O seno do ângulo (x) será dado pela altura do ponto P em relação ao eixo horizontal.

Podemos ver isso, aplicando a fórmula do seno no triângulo retângulo: OAP



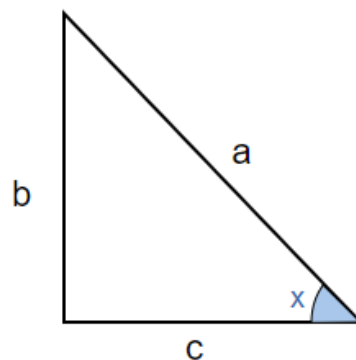
$$\text{sen}(x) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{PA}{1} = PA$$

Função Cosseno

Denotamos o cosseno de um ângulo por: **cos(x)**.

Também existem várias fórmulas da matemática que envolvem os cossenos, mas

vejamos nesta apostila a definição de cosseno aplicada aos triângulos retângulos.



O **cosseno** de x será a **razão** entre o **cateto adjacente** e a **hipotenusa**.

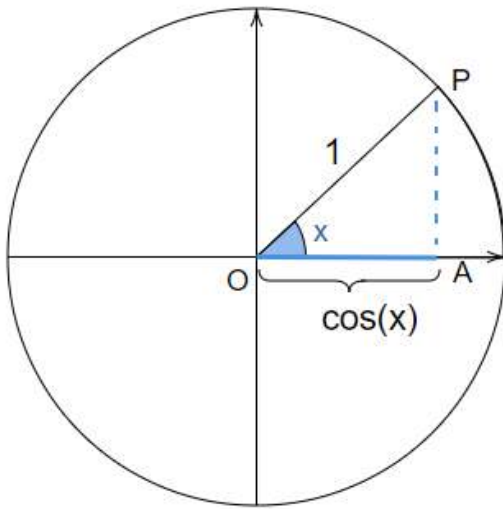
$$\cos(x) = \frac{c}{a}$$

OBS: De modo bem parecido com a função seno, como os catetos sempre são menores que a hipotenusa, o cosseno de um ângulo sempre será **menor que 1**

$$0 \leq \cos(x) \leq 1$$

Ou seja, o cosseno de x pode ser qualquer valor de 0 até 1.

Assim como o seno, o cosseno também pode ser representado no ciclo trigonométrico, utilizando o **eixo dos cossenos**.



→ O cosseno do ângulo (x) será dado pela distância do ponto A ao ponto O, no eixo horizontal.

Podemos ver isso, aplicando a fórmula do seno no triângulo retângulo OAP:

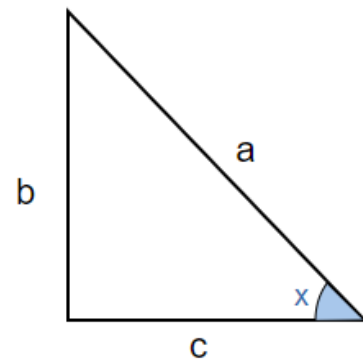
$$\cos(x) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{OA}{1} = OA$$

Função Tangente

Denotamos a tangente de um ângulo por: **tan(x)**, ou **tg(x)**.

Veremos aqui duas maneiras de definir a tangente de um ângulo, com ambas as formas nos fornecendo o mesmo resultado!

A primeira, assim como as demais, trata-se da definição no triângulo retângulo!



A tangente de um ângulo é definida como a **razão** entre o **cateto oposto** e o **cateto adjacente** do triângulo!

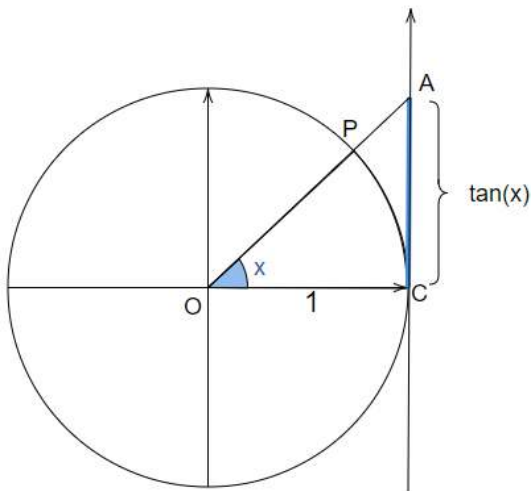
$$\tan(x) = \frac{b}{c}$$

OBS: Diferentemente da função seno e cosseno, a tangente pode sim ser maior que 1, não temos restrições para a tangente de um ângulo, ela pode assumir **qualquer valor**!

Outra forma de definir a tangente de um ângulo é a **razão** entre o **seno** e o **cosseno** deste mesmo ângulo!

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{b}{c}$$

Como já citado, existe também o **eixo das tangentes**, vamos usá-lo para representar as tangentes no ciclo trigonométrico!



- Estendemos a reta OP até encostar no eixo das tangentes.
- Onde encostar no eixo das tangentes, chamamos de ponto A
- Onde o eixo das tangentes encosta no círculo, chamamos de ponto C. Perceba que OC mede 1, pois é o raio do círculo trigonométrico.
- A tangente do ângulo x será a distância entre o ponto A e o ponto C, vertical.

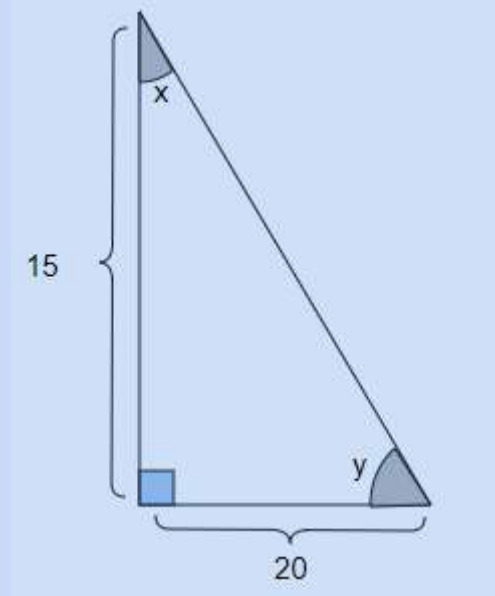
No triângulo OAC, temos:

$$\tan(x) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{CA}{1} = CA$$

OBS₂: Não existe a tangente do ângulo de 90° , ou $\frac{\pi}{2}$ em radianos. Pois sabemos que $\sin(90) = 1$ e $\cos(90) = 0$, logo, a tangente seria $1/0$, mas não existe divisão por 0!!

Cálculo do Seno, Cosseno e Tangente dos ângulos do Triângulo Retângulo

Calcule o seno, cosseno e tangente de x e de y no triângulo a seguir:



Primeiramente precisamos do valor da hipotenusa para usar nas fórmulas de seno e cosseno. Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 15^2 + 20^2 = 525$$

$$a = \sqrt{525} = 25$$

Logo, utilizando as fórmulas que vimos, obtemos os senos e cossenos de x e y:

$$\sin(x) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\sin(y) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\cos(x) = \frac{20}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\cos(y) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

OBS: Lembre-se que na fórmula do seno vai o cateto oposto e na fórmula do cosseno vai o cateto adjacente!

Agora no cálculo da tangente, temos:

$$\tan(x) = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

$$\tan(y) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

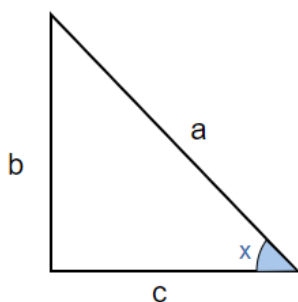
Relação Fundamental

A relação fundamental da trigonometria trata-se de uma fórmula que relaciona o seno e o cosseno de um ângulo, da seguinte forma:

$$(\sen(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$$

O quadrado do seno mais o quadrado do cosseno de um mesmo ângulo sempre resulta em 1.

→ Veja de onde surge essa fórmula:



$$(\sen(x))^2 + (\cos(x))^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2}$$

Do teorema de pitágoras, sabemos que:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

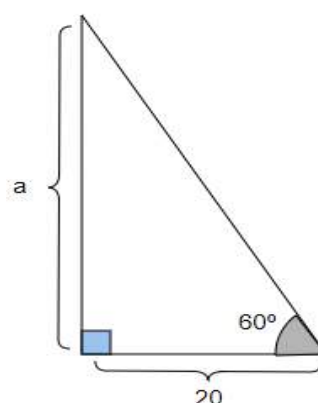
Logo, podemos concluir que:

$$(\sen(x))^2 + (\cos(x))^2 = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Ângulos Notáveis

Em diversas questões de vestibulares que envolvem as funções trigonométricas você vai precisar utilizar o seno, cosseno ou até mesmo tangente de alguns ângulos de forma decorada! As questões nem sempre vão dizer para você todas as informações! Veja este exemplo:

Calcule a medida "a" do cateto do triângulo retângulo abaixo:



Para resolver essa questão, você precisará saber o seno de 60° decorado! Portanto, decore a tabela abaixo:

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ângulos complementares e suplementares

Ângulos Complementares: São 2 ângulos que ao serem somados o resultado é **90°**.

Exemplos: 30° e 60°, 0° e 90°, 45° e 45°.

Ângulos Suplementares: São 2 ângulos que ao serem somados o resultado é **180°**.

Exemplos: 30° e 150°, 60° e 120°, 45° e 135°.

Agora as relações...

O seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar:

$$\text{sen}(x) = \cos(90 - x)$$

O cosseno de um ângulo é igual ao seno do ângulo complementar:

$$\cos(x) = \text{sen}(90 - x)$$

Exemplos:

$$\rightarrow \text{sen}(30) = \cos(60) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos(30) = \text{sen}(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \text{sen}(45) = \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

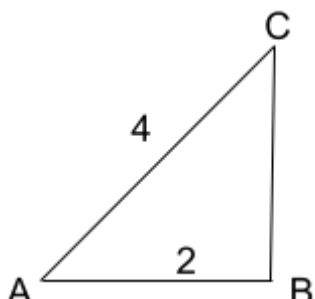
$$\rightarrow \text{sen}(0) = \cos(90) = 0$$

$$\rightarrow \cos(0) = \text{sen}(90) = 1$$

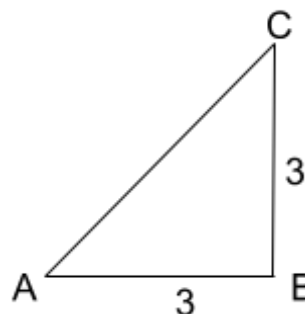
Exercícios

01. Quais os ângulos agudos dos triângulos retângulos abaixo?

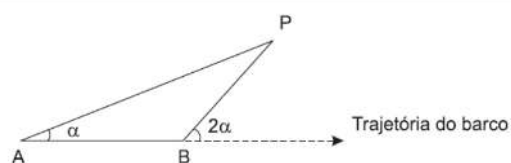
a)



b)



02. (ENEM 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α . A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000$ m. Com base nesses dados, e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) 1000 m

- b) $1000\sqrt{3} \text{ m}$
- c) $1000\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m}$
- d) $2000\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m}$
- e) $2000\sqrt{3} \text{ m}$

03. (UFAM) Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem 2 e 4, respectivamente, então a tangente do ângulo oposto ao menor lado é:

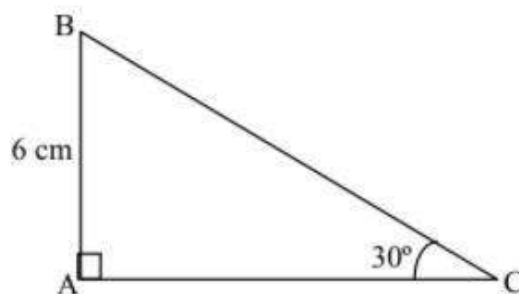
- a) $2\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{3}/3$
- c) $\sqrt{3}/6$
- d) $\sqrt{20}/20$
- e) $3\sqrt{3}$

04. (Cesgranrio) Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente de:

- a) $6\sqrt{3} \text{ m}$
- b) 12 m
- c) $13,6 \text{ m}$
- d) $9\sqrt{3} \text{ m}$
- e) 18 m

05. (Unicamp - Adaptada) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 1 metro e um dos ângulos agudos é o dobro do outro. Calcule o comprimento dos catetos.

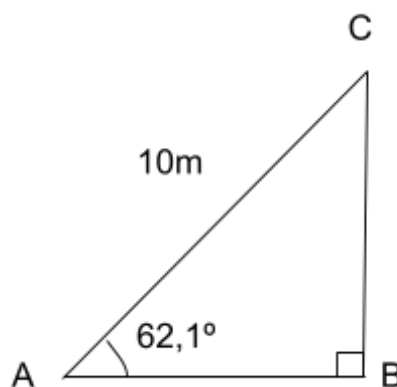
06. (IFG) Considere o triângulo retângulo ABC abaixo:



Assinale a alternativa correta:

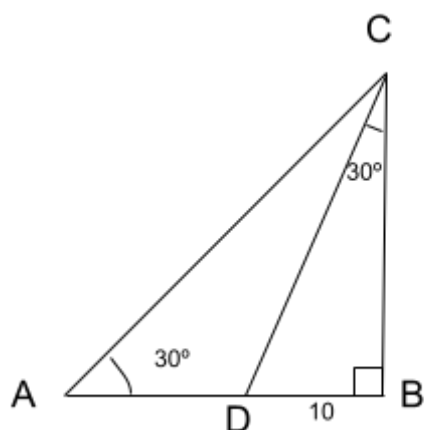
- a) A área do triângulo ABC é $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
- b) A medida do cateto AC é $8\sqrt{3} \text{ cm}$.
- c) A medida da hipotenusa é 10 cm .
- d) A razão entre a medida do cateto AB e o cateto AC é $\sqrt{3}/2$.
- e) O perímetro do triângulo ABC é $6(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}$.

07. Determine a medida dos catetos do triângulo abaixo. Considere $\sin(62,1^\circ) = 0,88$ e $\cos(62,1^\circ) = 0,47$.



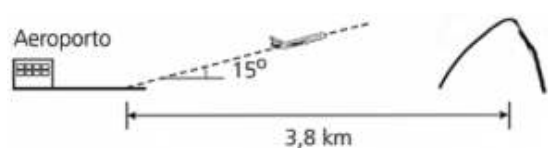
8. Sabendo que $\sin(x) = 3/4$ e $0^\circ < x < 90^\circ$, calcule $\cos(x)$ e $\tan(x)$.

9. Calcule o comprimento AB no triângulo abaixo



10. (UNICAMP 2013 - ADAPTADA)

Ao decolar, um avião deixa o solo com um ângulo constante de 15° . A $3,8 \text{ km}$ da cabeceira da pista existe um morro íngreme. A figura abaixo ilustra a decolagem, fora de escala. Podemos concluir que o avião ultrapassa o morro a uma altura, a partir da sua base, de



- a) $3,8 \operatorname{tg}(15^\circ) \text{ km}$.
- b) $3,8 \operatorname{sen}(15^\circ) \text{ km}$.
- c) $3,8 \cos(15^\circ) \text{ km}$.
- d) $[3,8 / \cos(15^\circ)] \text{ km}$.

11. (CESGRANRIO) Uma escada de 2 m de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Se a escada faz 30° com

a horizontal, a distância do topo da escada ao chão é de:

- a) $0,5 \text{ m}$.
- b) 1 m .
- c) $1,5 \text{ m}$.
- d) $1,7 \text{ m}$.
- e) 2 m .

12. Qual o maior valor que a função $f(x) = 5 \operatorname{sen}(x) + 1$ pode assumir? E o menor?

13. Qual deve ser o valor do seno de um ângulo x , sabendo que $0^\circ < x < 90^\circ$ e que o cosseno desse mesmo ângulo é igual a $3/5$?

- a) $4/5$
- b) $2/5$
- c) $3/4$
- d) $1/5$
- e) $2/3$

14. Um terreno possui o formato de um retângulo cuja base mede 80 m . Sabendo que o ângulo formado entre a base e a diagonal é de 30° , qual o valor que mais se aproxima da diagonal desse terreno? (Dado que $\sqrt{3} = 1,7$)

- a) 80 m
- b) 90 m

- c) 100 m
d) 110 m
e) 120 m

Gabarito

1	2	3	4	5	6
*	B	B	E	*	A
7	8	9	10	11	12
*	*	30	A	D	*
13	14	-	-	-	-
A	B	-	-	-	-

1.
a) 30° e 60°
b) 45°
5. $0,5m$ e $0,5\sqrt{3}m$
7. $4,7m$ e $8,8m$
8. $\cos(x) = \sqrt{7}/4$ e $\operatorname{tg}(x) = 3/\sqrt{7}$
9. $AB = 30$
12. O maior valor é 6, e o menor -4.

Referências Bibliográficas

- [1] GIOVANNI; CASTRUCCI; JUNIOR, Giovanni. A Conquista da Matemática. 9º Ano, FTD. São Paulo, Ed. renov. 2007.
- [2] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. Matemática e

Realidade Ensino Fundamental. 8ª Série/9º Ano, Atual. São Paulo, 5ª Ed. 2005.

[3] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. Matemática: Compreensão e Prática. 9º Ano, Moderna. São Paulo, 1ª Ed. 2009.

[4] MATERIAL de Nivelamento. CASDVestibulares. São José dos Campos, 2012.

[5] MALANGA, Umberto César Chacon. Matemática. Livro 1, Pré-Vestibular, Poliedro. São José dos Campos, 1ª Ed. 2011.

[6] EXERCÍCIOS de Equações do 2º Grau. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/soexercicios/equacoes2.php>. Acesso em 12 de jun. de 2013.

Introdução à circunferência

A palavra círculo tem sua origem do latim “circulus” que significa pequeno anel ou arena redonda e seus primeiros estudos têm origem com os egípcios e babilônios aproximadamente 1800 a.C. Portanto, as circunferências e os círculos são formas geométricas bem conhecidas pela humanidade e indiscutivelmente fazem um enorme impacto no nosso dia a dia e sobre a engenharia. E para isso, precisamos aprender alguns tópicos sobre esses elementos geométricos.

Aqui serão apresentadas as ideias e as teorias necessárias para que você seja capaz de resolver as questões que quiser e aprender com tranquilidade este tópico.

Tópicos

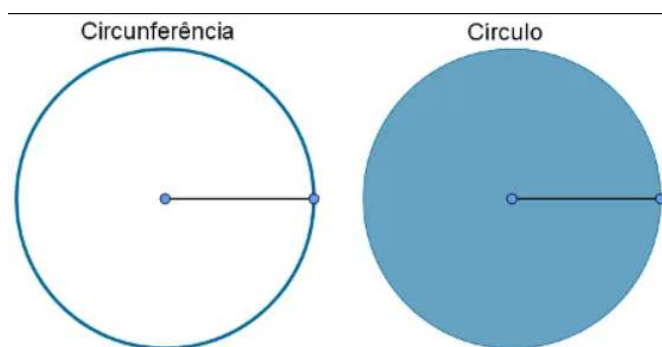
Bem, esse capítulo foi pensado para que você consiga resolver as questões de vestibulares. Portanto, os tópicos a serem vistos serão:

- Teoria de circunferência e círculo
- Cálculo de comprimento
- Cálculo de área de:
 - ✓ Círculo
 - ✓ Coroa
 - ✓ Setor circular

Teoria

Será que você consegue responder essa pergunta:
Qual a diferença entre círculo e circunferência?

Em geometria costuma-se fazer uma pequena distinção entre círculo e circunferência. A superfície de uma moeda, de uma pizza ou de um disco é um círculo. Agora, quando riscamos no papel ou no chão apenas o contorno do círculo, este contorno é chamado de circunferência.



Circunferência

É um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano, que se chama centro, é igual a uma distância fixa, chamada de raio.

Círculo

É um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado (centro) desse plano é menor ou igual a uma distância fixa (raio).

Compasso

Agora, iremos falar sobre um instrumento muito utilizado para se construir circunferências. Como você pode ver na figura abaixo, o compasso possui duas “pernas”. Uma delas tem uma ponta metálica, que deve ser assentada no papel,

no local que será o centro da circunferência. Já a ponta com o grafite deve ser girada para obter o traçado da circunferência.



Antes de traçar uma circunferência, devemos decidir qual será a abertura entre as pernas do compasso. A distância entre as duas pontas do instrumento define o raio da circunferência.

Qual a diferença entre raio e diâmetro?

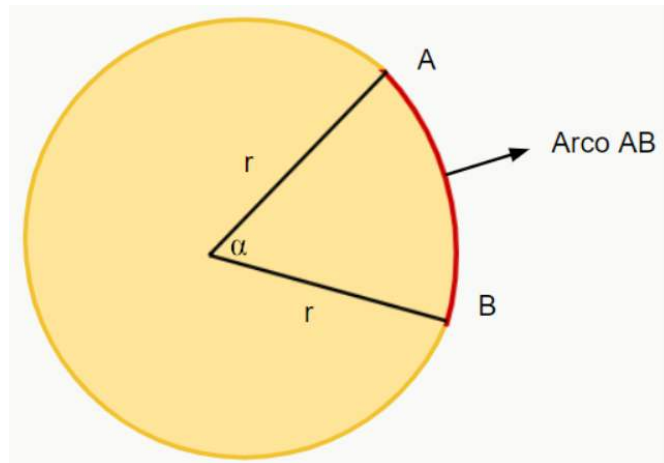
Vamos a partir daqui definir o que é o raio e o que é o diâmetro. O raio é um segmento onde uma extremidade está no centro e a outra está na circunferência, já o diâmetro é um segmento que liga dois pontos sobre a circunferência e que passa pelo centro.

Corda

A corda é o segmento que une dois pontos distintos sobre a circunferência. Observe que o diâmetro é sempre a maior corda possível dentro da circunferência.

Arco de circunferência

Arco de uma circunferência, ou às vezes só arco, é o caminho sobre o contorno da circunferência que liga dois pontos. Veja a figura abaixo:



Para simbolizar a corda que une os pontos P e Q, utilizamos a notação de segmento de reta, ou seja, corda $\overline{PQ}$. Por outro lado, o arco determinado pelos mesmos pontos é denotado como $\widehat{PQ}$.

É importante notar que, em geral, quando dizemos o arco $\widehat{PQ}$, estamos nos referindo ao menor arco entre estes dois pontos. Portanto, da mesma forma que a maior corda é o diâmetro, o maior arco $\widehat{PQ}$ é aquele que tem as extremidades em um diâmetro. Esse arco é chamado de semicircunferência, e a parte do círculo correspondente é chamada de semicírculo.

Comprimento da circunferência

Você consegue perceber que quanto maior for o raio, ou o diâmetro, de uma circunferência, maior será o seu comprimento. Não percebeu? Repare: é mais rápido você andar em torno de uma praça cujo raio é de 50 m do que andar em torno de uma outra cujo raio é de 400 m. Com isso, existe uma boa forma intuitiva de medir o comprimento de uma

circunferência. Monte uma circunferência de barbante, por exemplo, agora corte-o e estique esse barbante. Com isso, com uma régua você será capaz de medir o comprimento.

Bem, no início da humanidade era isso que era feito para essa medição. Mas depois de um tempo eles perceberam que essa não era a medida exata, e que eles nunca conseguiriam achar um valor exato. Daí, depois de muito tempo, as pessoas foram percebendo que esse comprimento dividido pelo diâmetro sempre dava uma constante entre 2 e 4. Atualmente, os matemáticos já provaram que essa constante é um número irracional e denotamos ela pela letra grega π que se aproxima de 3,14.

Conclusão: o cálculo da medida do comprimento de uma circunferência, quando conhecemos a medida de seu raio, pode ser feito por meio da relação abaixo.

Note que $d = 2r$, logo:

$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = \pi \cdot d \Rightarrow C = 2\pi r$$

Comprimento de circunferência

$$C = 2\pi R$$

Onde C é o comprimento da circunferência, π é uma constante que de vez em quando é aproximada para 3,14 e R é o raio da circunferência.

Exemplo 1: Cálculo do comprimento

Qual é o comprimento de uma circunferência cujo raio é 5 cm?

 **Solução:**

i. Nesse caso basta aplicar na expressão dada acima:

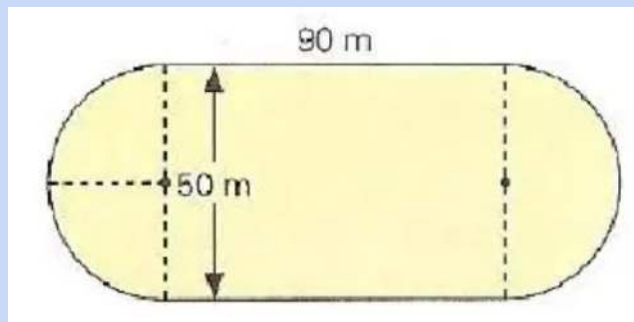
$$C = 2\pi R \Rightarrow C = 2\pi \cdot 5 \Rightarrow C = 10\pi \text{ cm}$$

Ou, aproximando:

$$C = 31,4 \text{ cm}$$

Exemplo 2: Comprimento

Uma pista de ciclismo tem a seguinte forma:



Qual é o perímetro desse trajeto?

 **Solução:**

i. Nesse exercício, percebemos que a figura não se trata apenas de uma circunferência. Temos um retângulo e duas metades de círculos. Nesse caso, o perímetro do retângulo você sabe calcular, basta somar os lados externos da pista. Com isso, temos:
 $p = 90 + 90 = 180 \text{ m}$

ii. Agora, perceba que se juntarmos os dois semicírculos temos um círculo completo, e o perímetro dessa segunda parte fica:
 $p' = 2\pi r = \pi d = 5\pi \text{ m}$

iii. O trajeto completo da figura é a soma desses perímetros já calculados, então:
 $\text{perímetro} = (180 + 5\pi) \text{ m}.$

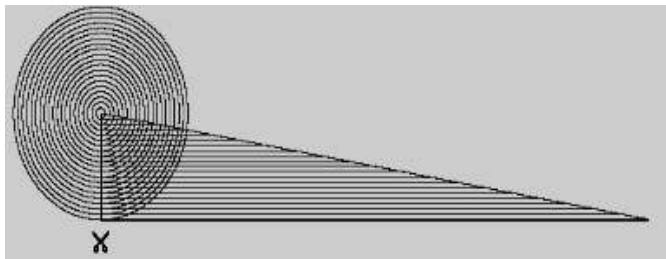
Área do círculo

Outra importante medida quando estamos falando de figuras é a área dela. Podemos precisar da área para diversos fatores: pintar o círculo, encaixar ele em certo local etc.

Porém, calcular essa área não foi uma missão tão simples para os nossos antepassados. Se imagine naquela época, será que você teria alguma ideia intuitiva parecida com a ideia para achar o perímetro só que agora para achar a área?

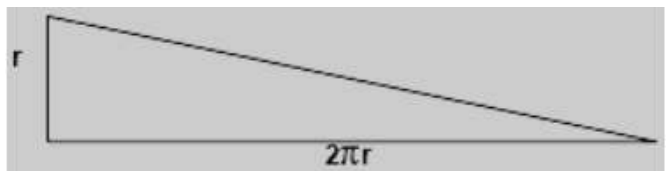
Bem, a ideia utilizada na época foi a seguinte, pegue diversas circunferências

concêntricas, ou seja que dividem o mesmo centro. Assim, recorte elas até chegar em seus centros e depois estique-as como mostra a figura abaixo:



Nesse processo, quanto maior for o número de circunferências utilizado para completar o círculo, melhor será a representação em um triângulo. Observe o triângulo abaixo, sua altura é igual ao raio do maior círculo montado e sua base mede $2\pi r$, novamente com o maior raio.

Repare que a área do círculo é igual a área deste triângulo montado. Portanto, calculando a área desse triângulo, temos:



$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Área do círculo

$$A = \pi r^2$$

Onde A é a área do círculo, π é uma constante que de vez em quando é aproximada para 3,14 e r é o raio da circunferência.

Exemplo 3: Cálculo de área

Qual é a área de um círculo cujo raio é 5 cm?

 **Solução:**

i. Para esse exercício basta aplicar a expressão achada acima:

$$A = \pi R^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A = 25\pi \text{ cm}^2$$

Ou, aproximando:

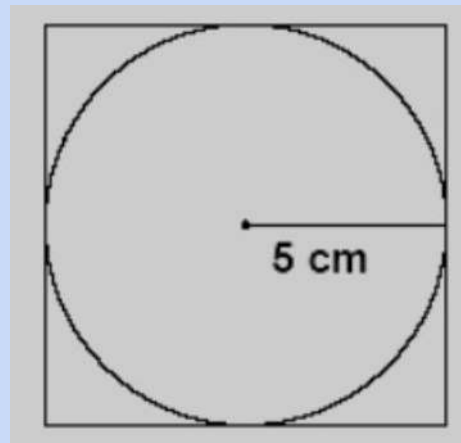
$$A = 78,5 \text{ cm}^2$$

Exemplo 4: Cálculo de área

Dentro de um quadrado de lado igual a 10 cm existe um círculo posicionado tal que a área dentro do quadrado mas externa ao círculo é a menor possível. Qual é o valor dessa área?

 **Solução:**

i. Primeiro, vamos descobrir onde fica esse círculo e qual é o seu raio. Perceba que para essa área “desperdiçada” ser mínima o círculo tem que tangenciar internamente os lados do quadrado. Para visualizar essa situação desenhe em seu caderno o que foi descrito acima e você deve chegar em algo parecido com isso:



ii. Com isso, você consegue visualizar que o raio desse círculo é metade do lado do quadrado? Pois como ele tangencia o quadrado por dentro, o seu diâmetro é igual ao lado desse quadrado. Portanto, já se é possível calcular a área desse círculo:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

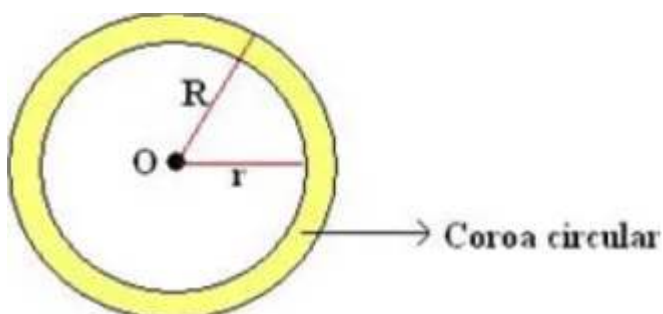
iii. Agora a área do quadrado você já sabe calcular. Relembrando:

$$A = L^2 = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$$

Portanto a resposta do exercício é

$$A_{\text{desperdiçada}} = (100 - 25\pi) \text{ cm}^2$$

Área de coroa circular



Observe a figura acima. Denomina-se coroa circular a região sombreada, que é obtida com dois círculos de mesmo centro O e raios diferentes R e r. É muito simples calcular a área dessa região, pois, como você percebe na figura, ela é obtida retirando-se do círculo maior o círculo menor. Desse modo, sua área é obtida subtraindo-se da área do círculo maior o círculo menor, desse jeito:

$$A = A_{\text{maior}} - A_{\text{menor}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Área da coroa circular

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Onde A é a área da coroa, π é uma constante que de vez em quando é aproximada para 3,14, R é o raio do círculo maior e r é o raio do menor círculo.

Acompanhe o exemplo a seguir:

Exemplo 5: Área de coroa

Qual é a área de uma coroa cujo raio menor é 5 cm e o raio maior é 8 cm?

 **Solução:**

i. Para esse exercício basta aplicar a expressão achada acima:

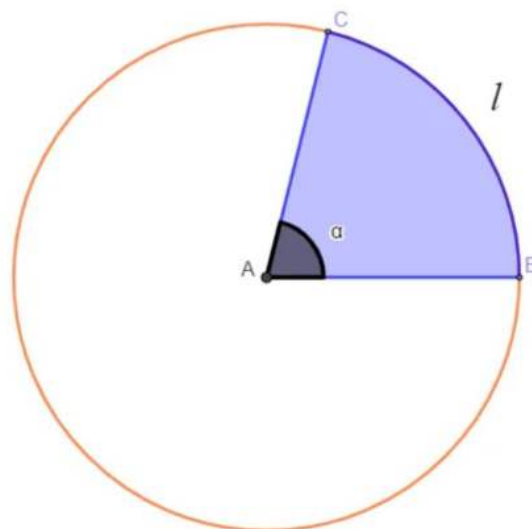
$$A = A_{\text{maior}} - A_{\text{menor}} = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow$$

$$A = \pi 8^2 - \pi 5^2 = 64\pi - 25\pi = 39\pi \text{ cm}^2$$

Ou, aproximando:

$$A = 122,5 \text{ cm}^2$$

Área de setor circular



Observe a figura acima. O setor circular é a área compreendida entre dois raios distintos e um arco de circunferência. Geralmente, nos exercícios é dado o ângulo α de abertura entre esses raios.

E a sua área é calculada da seguinte forma: Como o ângulo que compreende o círculo todo é 360° e sua área é πr^2 usando regra de três, temos:

$$\begin{array}{l} A - \alpha \\ \pi r^2 - 360^\circ \end{array}$$

Multiplicando em cruz:

$$A \cdot 360^\circ = \pi r^2 \cdot \alpha \Rightarrow A = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$$

Área do setor

$$A = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$$

Onde A é a área do setor, π é uma constante que de vez em quando é aproximada para 3,14 e r é o raio da circunferência e α é o ângulo de abertura dos raios.

Exercícios

Fixação

Utilize $\pi = 3,14$ nos exercícios a seguir:

1. A circunferência é uma região convexa?
2. O círculo é uma região convexa?
3. Todo diâmetro é uma corda? O contrário é verdade?
4. Se o diâmetro de um círculo mede 10 m, quanto mede o seu raio?
5. Todo raio é uma corda?
6. Se um ponto P dista de 3 cm do ponto O, então ele está no círculo de centro O e raio 5 cm? E ele está na circunferência de centro O e raio 5 cm?
7. Numa bicicleta em que o raio da roda é de 26 cm qual será, aproximadamente, o perímetro da circunferência da roda?
8. Qual é a área de uma coroa circular com raio maior 10 cm e raio menor 8 cm?
9. Qual a área de um setor circular de ângulo 30 graus, que tem um diâmetro de 10 metros?
10. Um fazendeiro precisou construir uma parte de uma tampa de concreto para sua cisterna. Essa parte corresponde a uma semicircunferência, ou seja, ao setor circular de ângulo 180 graus. O diâmetro da cisterna é de 3 metros, conforme constatou o fazendeiro. Sabendo que o custo de construção dessa tampa é de R\$100,00 por metro quadrado, qual o valor gasto?

Dicas e fatos que ajudam

1. Ligando dois pontos A e B de uma circunferência, os pontos entre A e B não pertencem a ela.
2. Ligando dois pontos A e B de um círculo, os pontos entre A e B pertencem a ele.
3. Todo diâmetro é um segmento que une dois pontos opostos de uma circunferência.
4. O raio é sempre metade do diâmetro
5. Raio é um segmento que liga o centro até um ponto na extremidade da circunferência
6. Releia a definição de circunferência e círculo
7. Relembre que a fórmula para o perímetro é $2\pi r$
8. Aplique na fórmula com $R=10$ cm e $r=8$ cm
9. Aplique na fórmula com $\alpha = 30^\circ$ e raio igual a metade do diâmetro
10. Faça metade da área do círculo e depois pegue o preço para pintar isso.

Gabarito**Fixação**

1. Não
2. Sim
3. Sim e o contrário nem sempre é verdade.
4. 5 m
5. Não
6. Sim, pois o círculo é toda a região interior à curva. Não, pois a circunferência é apenas o contorno dos pontos que distam 5 cm do centro.
7. $52\pi \approx 163,36$ cm
8. $36\pi \approx 427,25$ cm²
9. $2,03\pi \approx 6,54$ m²
10. Aproximadamente R\$706,85.

Calculando volumes

O capítulo a seguir aborda o cálculo do volume de sólidos recorrentes no estudo da Geometria Espacial, trazendo de forma objetiva uma abordagem aos tópicos mais recorrentes do conteúdo.

Volume

O volume de um sólido é a quantidade de espaço ocupado por esse corpo. Tal medida está sempre presente em nosso cotidiano, como em uma garrafa que compramos quando fazemos compras, por exemplo. As unidades mais usuais para volume são m^3 e L. Ao fazer tal estudo em matemática utilizamos a unidade de volume como a unidade de medida de uma dimensão ao cubo, ou seja, $(u.v.) = (u.m.)^3$. Por exemplo, se um cubo tem as três dimensões medidas em cm, obteremos seu volume em cm^3 .



[1]



[2]



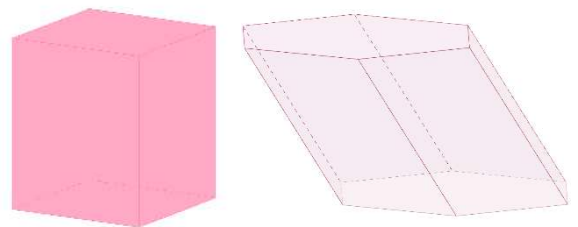
[3]

A fim de iniciar nossos estudos de sólidos, vale a pena retomar os conceitos referentes aos sólidos mais recorrentes.

Sólidos mais recorrentes

1) Prisma

Dado dois polígonos congruentes em planos paralelos distintos, o sólido formado pela reunião dos segmentos de retas paralelos que ligam os dois polígonos é chamado de prisma. A figura abaixo ilustra a definição.



Um prisma pode ser classificado como:

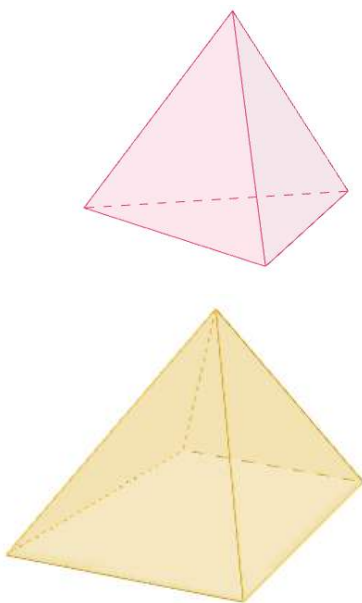
- Reto, quando as arestas laterais são perpendiculares ao plano das bases;
- oblíquo, quando as arestas laterais não são perpendiculares ao plano das bases;
- regular, quando o polígono que forma a base é um polígono regular.

Um paralelepípedo é um prisma cujos polígonos que formam as bases são paralelogramos. Um paralelepípedo reto retângulo é um prisma reto cujas bases são retângulos.

Um prisma reto cuja base é um quadrado e tem todas as arestas com mesma medida é um cubo.

2) Pirâmide

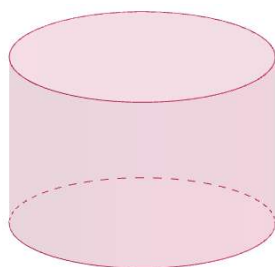
Uma pirâmide é o sólido formado pela reunião dos segmentos de reta que ligam um ponto dado com os pontos de um polígono convexo. Tal ponto é chamado de vértice e o polígono é a base da pirâmide.



Uma pirâmide é chamada de pirâmide regular quando sua base é um polígono regular e o vértice está a mesma distância de todos os lados da base.

3) Cilindro

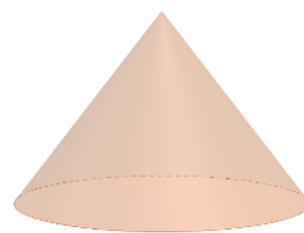
Dado dois círculos de mesmo raio em planos paralelos distintos, o sólido é formado pela união de dois círculos congruentes em planos paralelos e da região lateral gerada pelas **geratrizes**.



Se os segmentos que ligam os dois círculos (suas geratrizes) forem perpendiculares com os planos que contêm os círculos, o cilindro é chamado de cilindro circular reto.

4) Cone

Um cone é o sólido formado pela reunião dos segmentos de reta que ligam um ponto dado com uma circunferência. Tais segmentos são chamados de geratrizes, e o ponto é chamado de vértice.



O cone cuja reta que liga o vértice e o centro da circunferência é perpendicular ao plano que contém a base é chamado de cone circular reto, e a geratriz desse cone é chamada de **apótema**.

Volume dos sólidos

1) Prisma

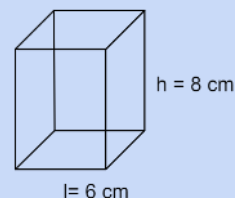
Seja h a altura do prisma definida como a distância entre os dois polígonos que são bases do prisma, e seja B a área desse polígono.

Temos que o volume V do prisma é:

$$V = B \times h$$

Exemplo

Calcule o volume do prisma reto de altura igual a 8 cm e a base é um quadrado de lado igual a 6 cm.



Já temos que $h = 8 \text{ cm}$.

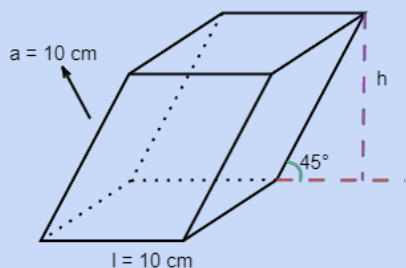
Sabemos que a área de um quadrado é o lado multiplicado por ele mesmo, ou seja, $l = 6 \text{ cm}$.

Assim, a área da base é $B = l \times l$, ou seja, $B = 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$.

Com isso chegamos ao volume do prisma reto $V = B \times h = 36 \times 8 = 288 \text{ cm}^3$

Exemplo

Calcule o volume do prisma oblíquo de aresta lateral igual a 10 cm e a base é um quadrado de lado igual a 10 cm, sendo o ângulo entre a face lateral e a base igual a 45° .



Dessa vez não temos o valor da altura, mas podemos descobrir facilmente, pois se o ângulo entre a face lateral e a base é 45° , então $\sin 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{altura}}{\text{aresta}} = \frac{h}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $h = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ e a área da base $B = l \times l = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$.

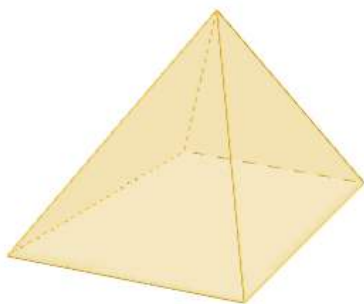
O volume do prisma é $V = B \times h = 100 \times 5\sqrt{2} = 500\sqrt{2} \text{ cm}^3$

2) Pirâmide

De forma análoga, seja a altura h a distância entre o vértice e a base da pirâmide, e B a área da base.

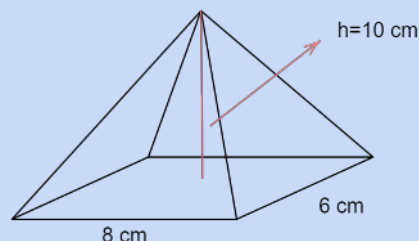
O volume V da pirâmide é:

$$V = \frac{B \times h}{3}$$



Exemplo

Calcule o volume de uma pirâmide com base retangular de lados 8 cm e 6 cm, e a altura valendo 10 cm.



Ora, precisamos calcular a área da base, que será $B = 8 \times 6 = 48 \text{ cm}^2$.

O volume da pirâmide é $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{48 \times 10}{3} = 160 \text{ cm}^3$.

3) Cilindro

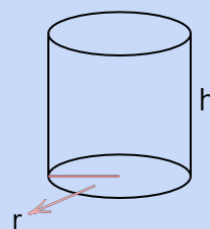
O cálculo do volume do cilindro é bem semelhante ao de um prisma. O que difere de um caso para o outro é que B se refere a área do círculo que forma a base.

Assim, sendo r o raio do círculo da base e h a altura, o volume V do cilindro é:

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

Exemplo

Determine o volume de um cilindro equilátero em função do raio r da base.



Um cilindro equilátero é um cilindro circular reto no qual o diâmetro da base é igual a altura.

Dessa forma $h = 2r$.

O volume do cilindro será

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times 2r}{3} = \frac{2 \times \pi \times r^3}{3}$$

4) Cone

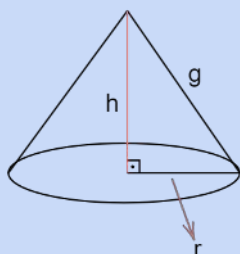
O cálculo do volume de um cone se assemelha ao do volume de uma pirâmide, de forma que B é a área do círculo que é a base do cone.

Assim, tomemos como r o raio do círculo da base e h a distância entre o vértice e a base. O volume V do cone é:

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$

Exemplo

Calcule agora o volume do cone equilátero em função do raio da base r .



O cone equilátero é o cone circular reto em que a geratriz g é igual o diâmetro da base. Assim, pelo Teorema de Pitágoras obtemos a altura h :

$g^2 = h^2 + r^2$, o que implica $(2r)^2 = h^2 + r^2$. Isolando h e descartando a resposta negativa (não faz sentido considerarmos medidas de comprimento sendo negativas), temos que $h = r\sqrt{3}$.

O volume do cone equilátero será

$$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times r\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3} \times r^3}{3}.$$

5) Esfera

A esfera, sólido não apresentado anteriormente neste capítulo diante da

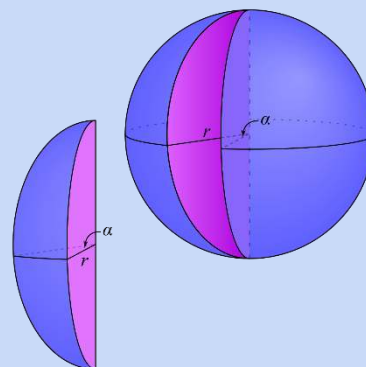
simplicidade de sua definição, tem um volume V dado por:

$$V = \frac{4\pi \times r^3}{3}$$

em que r é o raio da esfera.

Exemplo

Calcule o volume de uma esfera de raio 12 cm. Depois, calcule o volume de uma cunha de 30° da mesma esfera.



[4]

Sendo $r = 12 \text{ cm}$, o volume V será

$$V = \frac{4 \times \pi \times r^3}{3} = \frac{4 \times \pi \times 12^3}{3} = 2304\pi \text{ cm}^3.$$

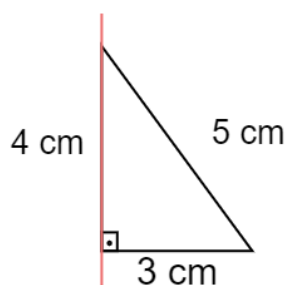
A cunha, ilustrada na figura acima, tem seu volume determinado a partir do ângulo α dado, onde o seu volume é $\frac{\alpha}{360^\circ} \times V$, V o volume da esfera completa.

Assim, a cunha pedida tem volume igual a

$$\frac{30^\circ}{360^\circ} \times 2304 = \frac{1}{12} \times 2304 = 192 \text{ cm}^3.$$

Alguns exercícios resolvidos

1. Determine o volume do sólido obtido a partir da rotação do triângulo abaixo em torno do lado medindo 4 cm.



Resolução:

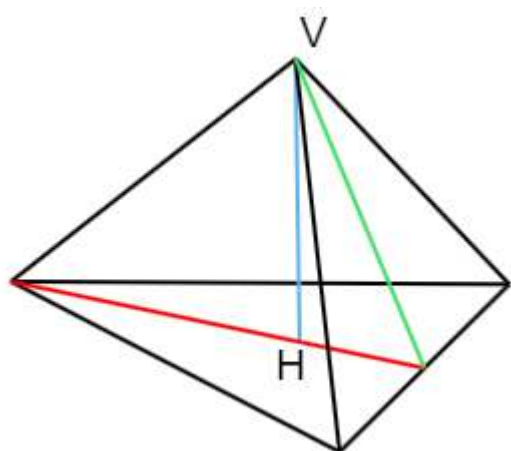
Ao rotacionar a figura em torno do lado indicado, podemos perceber que será gerado um cone, cuja altura é o lado de 4 cm e o raio da base é o lado de 3 cm. Logo, o volume V será $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 12\pi \text{ cm}^3$.

2. Determine o volume de um tetraedro regular de aresta medindo L .

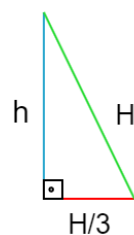
Resolução:

Esse exercício é um pouco mais difícil e exige que você saiba alguns conceitos do triângulo equilátero.

Um tetraedro é uma pirâmide cuja base é um triângulo. Por ser regular, a base é um triângulo equilátero e as faces laterais serão triângulos congruentes à base. Observe a figura.



Precisamos descobrir a altura do tetraedro, indicado em azul na figura. Mas graças as propriedades de tal sólido, o ponto H, que é o pé da altura, é também o baricentro do triângulo da base. Assim, teremos o seguinte triângulo retângulo:



Sabemos que no triângulo retângulo a altura H é $H = L \frac{\sqrt{3}}{2}$; com o Teorema de Pitágoras: $H^2 = h^2 + \left(\frac{H}{3}\right)^2$, logo, $h^2 = \frac{8}{9}H^2$, ou seja, $h^2 = \frac{8}{9} \times \left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} \times L^2$. Portanto, a altura da pirâmide é $h = \sqrt{\frac{2}{3}} \times L$. A área da base será $B = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{L \times H}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times L^2$.

Finalmente, o volume do tetraedro é $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times L^2\right) \times \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \times L\right) = \frac{\sqrt{2}L^3}{12}$.

Exercícios

Fixação

1. Determine o volume de uma esfera de raio igual a 9 cm.
2. Determine o volume de um paralelepípedo reto retângulo com arestas medindo 6 cm, 8 cm e 10 cm.
3. Determine o valor de um cubo de lado igual a 7 cm.
4. Quantos litros cabem em um cilindro de raio da base igual a 3 dm e altura igual a 5 dm?
Obs.: $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$ e $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$
5. Calcule a razão entre o volume de uma esfera de raio igual a 10 cm e o volume de um cubo lado medindo 10 cm.

6. Determine o volume de um cone equilátero com raio igual a 5 cm.
7. Determine o volume de uma pirâmide de base quadrada com a área da base igual a 25 cm^2 e altura de medida igual a aresta da base.
8. Determine o volume de um paralelepípedo reto de base medindo 3 cm e 4 cm e um ângulo obtuso de 120° entre as arestas da base, e altura medindo 10 cm.
Obs.: para calcular a área do paralelogramo que é base de tal paralelepípedo, podemos utilizar a fórmula $B = a \times b \times \text{sen} \alpha$, sendo a e b lados e α o ângulo entre esses dois lados.

De Olho no Vestibular

1. (Enem 2010) A siderúrgica “Metal Nobre” produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue. [5]

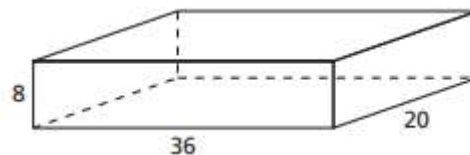


O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza:

- a) Massa.
- b) Volume.
- c) Superfície.
- d) Capacidade.

- e) Comprimento.

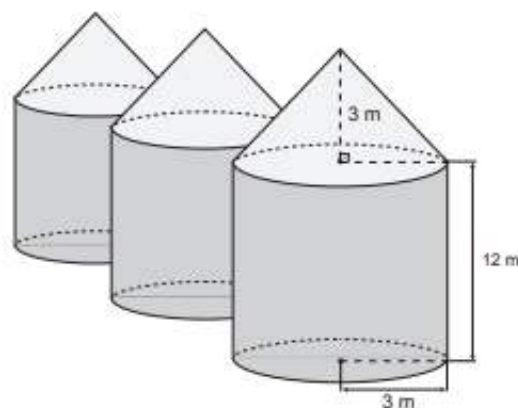
2. (Mackenzie 2012)



O número mínimo de cubos de mesmo volume e dimensões inteiras, que preenchem completamente o paralelepípedo retângulo da figura, é:

- a) 64
- b) 90
- c) 48
- d) 125
- e) 100

3. (Enem 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento. [6]

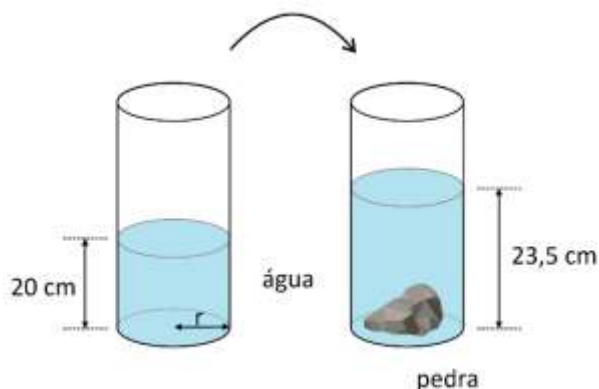


Utilize 3 como aproximação para π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

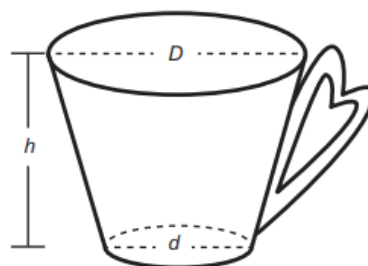
- a) 6.
- b) 16.
- c) 17.
- d) 18.
- e) 21.

4. (Fuvest 2023) Para medir o volume de uma pedra com formato irregular, Ana utilizou um recipiente cilíndrico de raio $r = 8$ cm e com água até a altura de 20 cm. Após colocar a pedra no recipiente, a altura da água subiu para 23,5 cm. [7]



O volume da pedra é:

- a) $128\pi \text{ cm}^3$
 - b) $224\pi \text{ cm}^3$
 - c) $240\pi \text{ cm}^3$
 - d) $282\pi \text{ cm}^3$
 - e) $320\pi \text{ cm}^3$
5. (PUC-RS) Uma pirâmide quadrangular regular tem aresta da base medindo π metros e tem o mesmo volume e altura de um cone circular reto. O raio do cone, em metros, mede:
- a) π
 - b) $\sqrt{\pi}$
 - c) π^2
 - d) 2π
6. (Enem 2021) Uma pessoa comprou uma caneca para tomar sopa, conforme ilustração. [8]



Sabe-se que $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$ e que o topo da caneca é uma circunferência de diâmetro (D) medindo 10 cm, e a base é um círculo de diâmetro (d) medindo 8 cm. Além disso, sabe-se que a altura (h) dessa caneca mede 12 cm (distância entre o centro das circunferências do topo e da base).

Utilize 3 como aproximação para π .

Qual é a capacidade volumétrica, em mililitro, dessa caneca?

- a) 216
- b) 408
- c) 732
- d) 2196
- e) 2928

Obs.: para fazer essa questão sem usar fórmula de volume de tronco de cone, podemos calcular o volume do cone de base com diâmetro D e depois remover o volume do cone com base de diâmetro d . Para descobrir a altura do cone d e consecutivamente D , podemos utilizar semelhança de triângulos.

Gabarito

Fixação

- | | |
|--------------------------|---|
| 1. $972\pi \text{ cm}^3$ | 5. $\frac{4\pi}{3}$ |
| 2. 480 cm^3 | 6. $\frac{\sqrt{3}}{3} 125\pi \text{ cm}^3$ |
| 3. 343 cm^3 | 7. $\frac{125}{3} \text{ cm}^3$ |
| 4. $45\pi \text{ L}$ | 8. $60\sqrt{3} \text{ cm}^3$ |

De Olho no Vestibular

1	2	3	4	5	6
B	B	D	B	B	C